This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

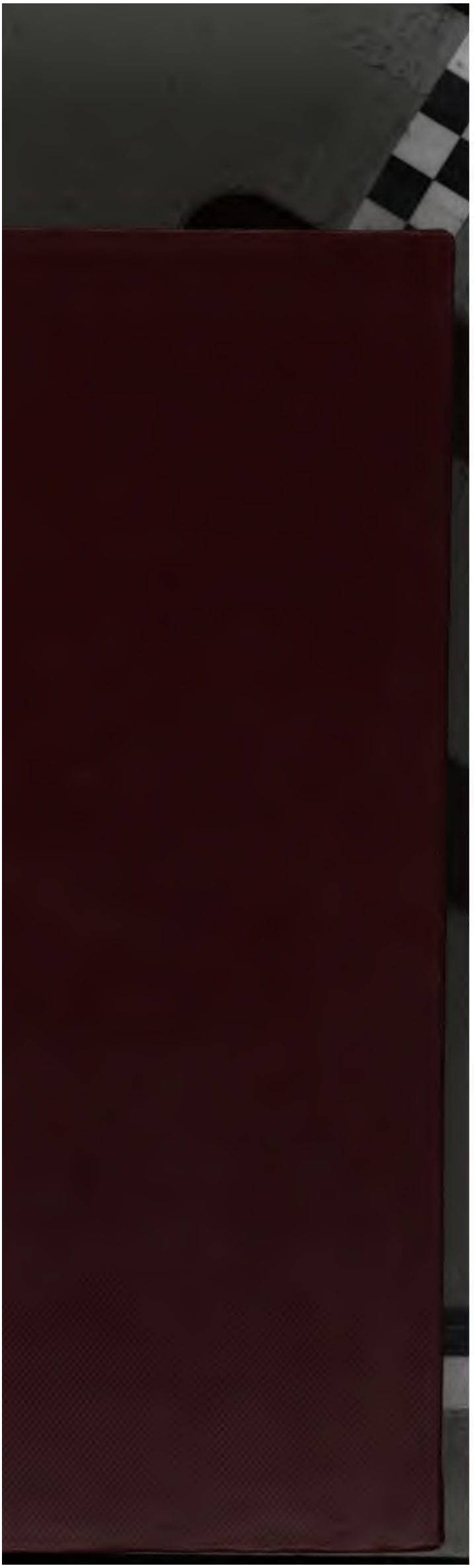
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

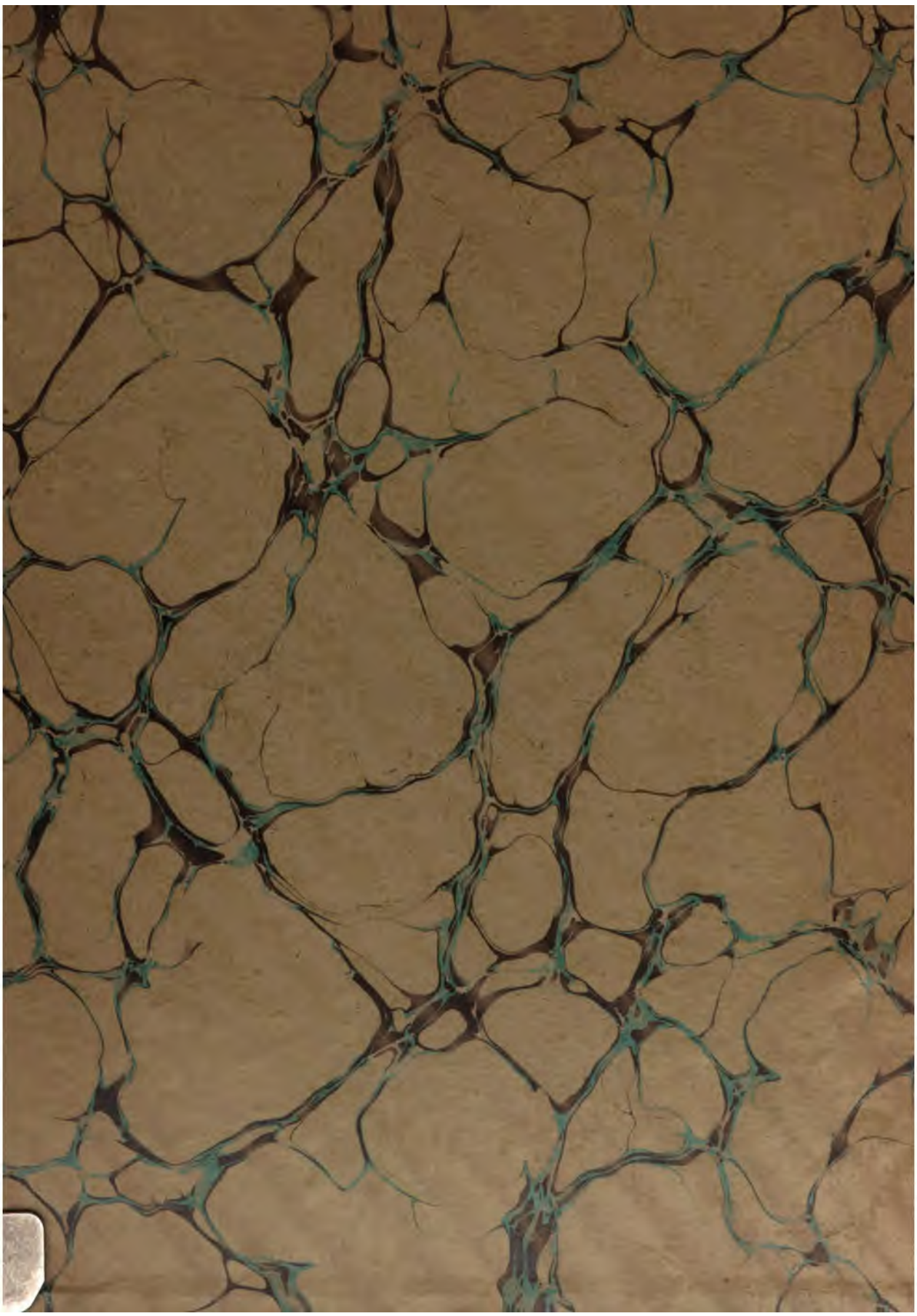
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

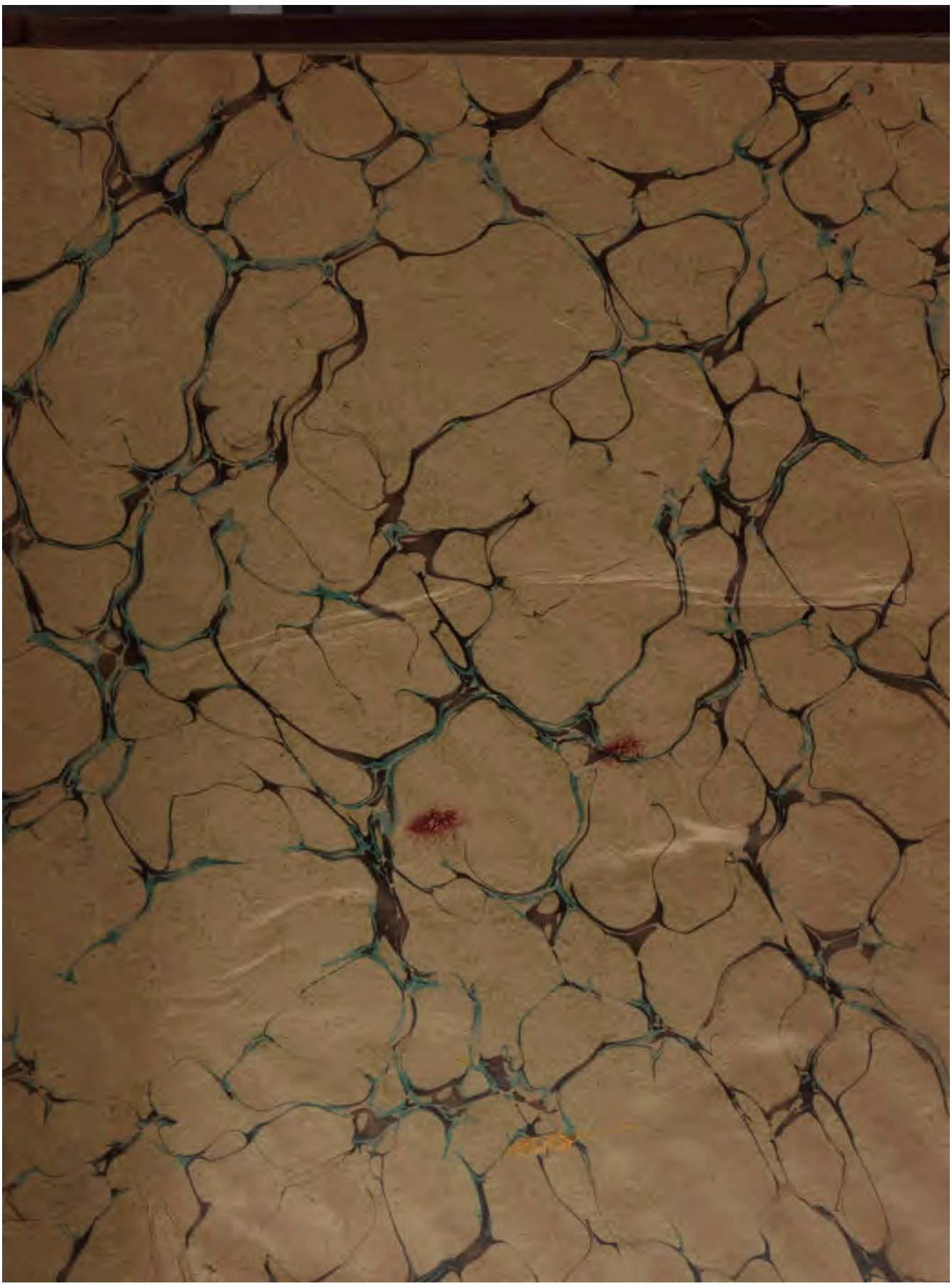
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`







510.5
P232

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

QUATORZIÈME CAHIER.

TOME VII.

STANFORD LIBRARY

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

Avril 1808.

1.6117

STANFORD LIBRARY

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

OPTIQUE,

Par M. MALUS, Chef de bataillon au corps impérial du Génie, ancien Élève de l'École Polytechnique.

LES rayons qui émanent d'un point lumineux dans un milieu de densité uniforme, peuvent être regardés comme un système de lignes droites passant par ce point. Lorsque ces rayons rencontrent la surface d'un corps qui les réfléchit ou les réfracte, leur disposition mutuelle éprouve différentes modifications d'où naissent tous les phénomènes de l'optique.

Avant de passer à l'analyse de ces phénomènes, nous exposerons quelques propriétés communes à tous les faisceaux de rayons réfléchis ou réfractés, et en général à tous les systèmes de lignes droites contiguës qui ne sont pas parallèles.

[1.] Soient

$$m(z - z') = o(x - x'), \quad n(z - z') = o(y - y') \ldots (A)$$

les équations d'une ligne droite appartenant à un système de rayons disposés dans l'espace, suivant une loi analytique quelconque, m, n, o étant des fonctions arbitraires de $x'y'z'$. A chaque point de l'espace, c'est-à-dire, pour chaque valeur particulière de $x'y'z'$, correspondent de nouvelles lignes appartenant au même système.

Considérons d'abord les lignes qui appartiennent aux points contigus à celui dont les coordonnées sont $x'y'z'$; parmi toutes ces lignes, il n'y en a qu'une certaine série qui rencontre la ligne *(A)*. Pour déterminer le lieu des points auxquels elles appartiennent, il faudra exprimer que la ligne *(A)* et une ligne contiguë, ont un point commun xyz, et par conséquent différencier l'équation *(A)* par rapport à $x'y'z'$, en regardant xyz comme constant, ce qui donne

$$dm(z-z')-mdz'=do(x-x')-odx' \quad dn(z-z')-ndz'=do(y-y')-ody' \ldots \text{(B)}.$$

Si entre les équations *(A) (B)* qui ont lieu également pour le point xyz, on élimine $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$, on a pour résultat

$$mdody'-mdndz'+ndmdz'-ndodx'+odndx'-odmdy'=0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dm}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{dm}{dz'}\right)dz'\right](ndz'-ody')\\+&\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{dn}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{dn}{dz'}\right)dz'\right](odx'-mdz')\\+&\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)dx'+\left(\frac{do}{dy'}\right)dy'+\left(\frac{do}{dz'}\right)dz'\right](mdy'-ndx')\end{aligned}\right\}=0 \ldots \text{(C)}.$$

Cette équation exprime que les deux lignes *(A) (B)*, et une troisième

$$dx'(z-z')=dz'(x-x') \qquad dy'(z-z')=dz'(y-y') \ldots \text{(D)},$$

se trouvent dans un même plan. La ligne *(D)* qui est la tangente d'une courbe à double courbure, indique la direction suivant laquelle on doit passer du point $x'y'z'$ au point contigu, pour que deux rayons consécutifs *(A)* se rencontrent; les deux tangentes d'inclinaison $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ sont liées entre elles par l'équation *(C)*, en sorte qu'il n'y en a qu'une seule qui soit indéterminée, et qu'il n'y a qu'une certaine famille de courbes à double courbure qui puisse satisfaire à l'équation *(C)*. Ces courbes sont liées entre elles par cette propriété commune, que, si on considère une d'elles en particulier, la suite des

rayons *(A)* qui appartiennent à ses différens points, se rencontre consécutivement.

Si entre les équations *(C) (D)* on élimine $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$, on obtiendra le lieu de toutes les tangentes *(D)* qui passent par le point $x'y'z'$: le résultat de cette élimination est

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{dm}{dy'}\right)(y-y')+\left(\frac{dm}{dz'}\right)(z-z')\right][n(z-z')-o(y-y')]\\&\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{dn}{dy'}\right)(y-y')+\left(\frac{dn}{dz'}\right)(z-z')\right][o(x-x')-m(z-z')]\\&\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)(x-x')+\left(\frac{do}{dy'}\right)(z-y')+\left(\frac{do}{dz'}\right)(z-z')\right][m(y-y')-n(x-x')]\end{aligned}\right\}=0\ldots(E).$$

Cette équation appartient à une surface conique du second degré qui a son centre au point $x'y'z'$, et dont les nappes indiquent la direction suivant laquelle on doit passer de ce point aux points contigus pour que la ligne *(A)* soit rencontrée par la ligne consécutive : le rayon *(A)* lui-même est une des arêtes de cette surface.

On peut déjà remarquer que tout plan passant par le centre de cette surface conique, la coupera suivant deux lignes droites, en sorte qu'il y a en général à chaque point d'un plan deux directions suivant lesquelles on peut cheminer pour que les rayons *(A)* se rencontrent, quelles que soient les fonctions m, n, o.

[2.] Soit actuellement une surface courbe

$$F(x'y'z') = 0. \qquad pdx' + qdy' + pdz' = 0\ldots(F).$$

A chaque point de cette surface appartient un des rayons *(A)*; or, si au moyen des équations *(C) (F)* on détermine $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$, on aura, comme l'équation *(C)* est du second degré, deux résultats de la forme

$$\begin{aligned}Mdz' &= Odx' \qquad Ndz' = Ody'\ldots\ldots(s)\\M'dz' &= O'dx' \qquad N'dz' = O'dy'\ldots\ldots(s'),\end{aligned}$$

en faisant

$$\alpha = o\left(\frac{dn}{dx'}\right) - n\left(\frac{do}{dx'}\right) \beta = m\left(\frac{do}{dy'}\right) - o\left(\frac{dm}{dy'}\right) \quad \gamma = n\left(\frac{dm}{dz'}\right) - m\left(\frac{dn}{dz'}\right)$$

$$\delta = m\left(\frac{do}{dx'}\right) - o\left(\frac{dm}{dx'}\right) + o\left(\frac{dn}{dy'}\right) - n\left(\frac{do}{dz'}\right)$$

$$\varepsilon = n\left(\frac{dm}{dx'}\right) - m\left(\frac{dn}{dx'}\right) + o\left(\frac{dn}{dz'}\right) - n\left(\frac{do}{dz'}\right)$$

$$\zeta = n\left(\frac{dm}{dy'}\right) - m\left(\frac{dn}{dy'}\right) + m\left(\frac{do}{dz'}\right) - o\left(\frac{dm}{dz'}\right)$$

$$L = [(\delta r + \varepsilon q + \zeta p)^2 + 4pq(\gamma\delta - \varepsilon\zeta) + 4pr(\beta\zeta - \delta\zeta) + 4qr(\alpha\zeta - \delta\varepsilon) - 4\beta\gamma p^2 - 4\alpha\gamma q^2 - 4\alpha\beta r^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$M = \zeta pq + \delta qr - \varepsilon q^2 - 2\beta pr + qL \qquad N = \varepsilon pq + \delta pr - \zeta p^2 - 2\alpha qr - pL$$

$$M' = \zeta pq + \delta qr - \varepsilon q^2 - 2\beta pr - qL \qquad N' = \varepsilon pq + \delta pr - \zeta p^2 - 2\alpha qr + pL$$

$$O = O' = -\frac{p}{r}M - \frac{q}{r}N = -\frac{p}{r}M' - \frac{q}{r}N' = 2(\alpha q^2 + \beta p^2 - \delta pq),$$

substituant ces valeurs de $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ dans l'équation *(D)*, on aura

$$M(z - z') = O(x - x') \qquad N(z - z') = O(y - y') \ldots (D)$$

$$M'(z - z') = O'(x - x') \qquad N'(z - z') = O'(y - y') \ldots (D'),$$

équations qui appartiennent à deux lignes tangentes à la surface *(F)*, et dont la direction indique sur cette surface dans quel sens on doit passer du point $x'y'z'$ aux points consécutifs, pour que les rayons *(A)* se rencontrent. On aurait également obtenu les équations *(D)* *(D')* en combinant l'équation du plan tangent à la surface *(F)* avec celle de la surface conique *(E)*.

Les équations *(s)* *(s')* ayant lieu pour chacun des points de la surface *(F)*, leurs intégrales expriment deux systèmes de courbes tracées sur cette surface, et dont chacune jouit en particulier de cette propriété, que tous les rayons *(A)* qui lui appartiennent se rencontrent consécutivement : en effet, la courbe *(s)* ou *(s')* satisfaisant en chacun de ces points à l'équation *(C)*, se trouve toujours dans la direction des points auxquels appartiennent les rayons consécutifs qui se rencontrent.

La suite des lignes *(A)* qui passent par la courbe *(s)*, se rencontrant

consécutivement, forme une surface développable *(S)*, dont l'arête de rebroussement *(σ)* est le lieu des points de rencontre : en second lieu, comme la courbe *(s)* est coupée en chacun de ses points par une des courbes *(s')*, il s'en suit que la surface développable *(S)* est coupée, suivant chacune de ses génératrices, par une surface développable *(S')*, formée par les rayons qui appartiennent à une des courbes *(s')*.

La suite des arêtes de rebroussement *(σ)* de la première série de surfaces développables *(S)* forme une surface courbe *(Σ)* à laquelle chacun des rayons *(A)* est tangent. La suite des arêtes de rebroussement *(σ')* de la seconde série de surfaces développables *(S')* forme une seconde surface *(Σ')* à laquelle tous les rayons *(A)* sont encore tangens. Ainsi, *toutes les fois qu'on considère un système de lignes droites émanant de tous les points d'une surface courbe suivant une loi analytique quelconque*, ce système de lignes peut être regardé comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables ; et puisque la suite des arêtes de rebroussement de ces deux systèmes de surfaces comprend l'intersection de toutes les génératrices, on en conclut que *le lieu des points de rencontre des lignes proposées est compris sur deux surfaces courbes.*

[3.] Concevons le plan qui passe par la ligne *(A)* et par la tangente *(D)*; son équation sera

$$(nO-oN)(x-x')+(oM-mO)(y-y')+(mN-nM)(z-z')=0\ldots(AD);$$

de même le plan qui passe par la ligne *(A)* et par la tangente *(D')*, aura pour équation

$$(nO'-oN')(x-x')+(oM'-mO')(y-y')+(mN'-nM)(z-z')=0\ldots(AD'),$$

Ces deux plans contiennent évidemment les lignes consécutives à la ligne *(A)* par lesquelles elle est rencontrée.

Pour déterminer les coordonnées xyz du point de rencontre de celle qui se trouve dans le plan *(AD)*, il faut substituer dans les équations *(B)* à $\frac{dx'}{dz}$ $\frac{dy'}{dz'}$ leurs valeurs $\frac{M}{O}$ $\frac{N}{O}$ tirées des équations *(s)*,

et combiner après cette substitution les équations *(A, B)*; ce qui donne, au moyen de l'équation *(C)*, et en faisant

$$\Lambda = \frac{nM - mN}{\left\{m\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)M + \left(\frac{dn}{dy'}\right)N + \left(\frac{dn}{dz'}\right)O\right] - n\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dz'}\right)N + \left(\frac{dm}{dz'}\right)O\right]\right\}}$$

$$x - x' = m\Lambda, \quad y - y' = n\Lambda, \quad z - z' = o\Lambda \ldots (G);$$

la distance du point $x'y'z'$ au point xyz, que nous nommerons R, est par conséquent

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (m^2 + n^2 + o^2)\Lambda^2.$$

On obtiendra un résultat semblable pour la ligne qui se trouve dans le plan *(AD')*, en substituant dans Λ, M', N', O' à M, N, O, et on aura, en nommant Λ' la valeur qui en résulte,

$$x - x' = m\Lambda', \quad y - y' = n\Lambda', \quad z - z' = o\Lambda' \ldots (G');$$

la distance R' du point $x'y'z'$ au second point de rencontre, sera

$$R'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (m^2 + n^2 + o^2)\Lambda'^2.$$

On aurait pu obtenir collectivement les doubles valeurs *(G) (G')* de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, en éliminant $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ entre les équations *(B) (F)*, ce qui aurait produit une équation du second degré, qui, combinée avec l'équation *(A)*, aurait déterminé les valeurs proposées.

Soient

$$V = 0 \qquad W = 0 \ldots\ldots (ss) \qquad V' = 0 \qquad W' = 0 \ldots\ldots (s's')$$

les intégrales des équations *(s) (s')* qui doivent être complétées par la condition que ces courbes passent par un point particulier de la surface *(F)*;

L'équation d'une surface développable *(S)* sera le résultat de l'élimination de $x'y'z'$ entre les quatre équations *(A) (ss)*;

Les équations de son arête de rebroussement *(σ)* seront le résultat de l'élimination des mêmes quantités entre cinq équations *(G) (ss)*; enfin, l'équation de la surface *(Σ)* qui est le lieu de toutes les arêtes de rebroussement *(σ)* de la série de surface *(S)*, sera le résultat de

l'élimination de $x'y'z'$ entre les trois équations (G) et l'équation $F(x'y'z') = 0$.

Tout ce qui a rapport à la série de surfaces développables (S') s'obtient par des considérations semblables aux précédentes, en substituant les courbes $(s's')$ aux courbes (ss).

[4.] Les deux surfaces développables (S) (S') qui se rencontrent suivant la ligne (A), se coupent pour chacune de ces lignes suivant un angle particulier dont nous allons déterminer l'expression; pour cela, nous observerons que le plan (AD) qui passe par le rayon (A) et par la tangente (D) contenant deux génératrices consécutives de la surface développable (S), est par conséquent tangent à cette surface, et que par la même raison le plan $(A'D')$ est tangent à la surface (S'), en sorte que l'angle compris entre ces deux plans est celui sous lequel les surfaces proposées se rencontrent. Or, si on nomme τ l'angle compris entre les deux plans (AD) (AD'), on a

$$\cos.\tau = \frac{(m^2+n^2+o^2)(MM'+NN'+OO')-(mM+nN+oO)+(mM+nN+oO)(mM'+nN'+oO')}{[(m^2+n^2+o^2)(M^2+N^2+O^2)-(mM+nN+oO)^2]^{\frac{1}{2}}[(m^2+n^2+o^2)(M'^2+N'^2+O'^2)-(mM'+nN'+oO')^2]^{\frac{1}{2}}},$$

expression qui sera toujours fonction de $x'y'z'$, à moins qu'on n'ait

$$(m^2+n^2+o^2)(MM'+NN'+OO')-(mM'+nN+oO)(mM'+nN'+oO') = 0,$$

indépendamment des valeurs de $x'y'z'$. Dans ce cas particulier, on a cos. $\tau = 0$, et les surfaces développables (S) (S') se coupent toutes à angle droit. En substituant dans cette équation pour $MNO\ M'N'O'$ leurs valeurs, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{dx}{dx'}\right)-n\left(\frac{do}{dx'}\right)\Big][m^2(q^2+r^2)+(nq+or^2)]-\Big[m\left(\frac{do}{dx'}\right)-o\left(\frac{dm}{dx'}\right)+o\left(\frac{dn}{dy'}\right)-n\left(\frac{do}{dy'}\right)\Big] \\
\quad [(m^2+n^2)pq+or(mq+np)-mnr^2] \\
\left(\frac{do}{dy'}\right)-o\left(\frac{dm}{dy'}\right)\Big][n^2(p^2+r^2)+(mp+or)]-\Big[n\left(\frac{dm}{dx'}\right)-m\left(\frac{dn}{dx'}\right)+o\left(\frac{dn}{dz'}\right)-n\left(\frac{do}{dz'}\right)\Big] \\
\quad [(m^2+o^2)pr+nq(mr+op)-moq^2] \\
\left(\frac{dm}{dz'}\right)-m\left(\frac{dn}{dz'}\right)\Big][o^2(p^2+q^2)+(mp+nq)]-\Big[n\left(\frac{dm}{dy'}\right)-m\left(\frac{dn}{dy'}\right)+m\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dm}{dz'}\right)\Big] \\
\quad [(n^2+o^2)qr+mp(nr+oq)-nop^2]
\end{array}\right\} = 0 \ldots (H),$$

en sorte que toutes les fois que *les fonctions m, n, o satisfont à cette équation*

de condition, on peut regarder les rayons (A) *comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit.*

Considérons un moment les lignes *(A)* comme le système des normales d'une surface courbe $F(x'y'z') = 0$, $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$, on aura $m = p$, $n = q$, $o = r$; substituant ces valeurs dans le numérateur de l'expression de cos. τ, ou dans le premier membre de l'équation *(H)*, il se réduit à

$$\left[r\left(\frac{dq}{dx'}\right) - q\left(\frac{dr}{dx'}\right) + p\left(\frac{dr}{dy'}\right) - r\left(\frac{dp}{dy'}\right) + q\left(\frac{dp}{dz'}\right) - p\left(\frac{dq}{dz'}\right)\right](p^2 + q^2 + r^2)^{\frac{1}{2}},$$

quantité qui est toujours nulle, puisque $p\,dy' + q\,dy' + r\,dz'$ est la différentielle de la fonction $F(x'y'z')$, en sorte que les normales d'une surface courbe sont toujours le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables qui se coupent à angle droit; d'où on conclut réciproquement que toutes les fois que dans un système de rayons *(A)*, les fonctions m, n, o satisfont à l'équation de condition *(H)*, il existe une série de surfaces normales à tous ces rayons.

Les quantités m, n, o étant des fonctions données qui ne satisfont pas généralement à l'équation *(H)*, on peut se proposer de déterminer les surfaces $p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0$, par la condition que les rayons *(A)* soient le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables rectangulaires; alors l'équation *(H)* est l'équation aux différences partielles des surfaces cherchées.

[5.] Les phénomènes de l'optique dépendent principalement du lieu des points de rencontre des rayons consécutifs, c'est-à-dire, de la forme et de la position des surfaces (Σ) (Σ'); et il est à remarquer que tout ce qui a rapport à ces surfaces est indépendant de la résolution et de l'intégration des équations, et s'obtient par de simples éliminations.

Ces surfaces peuvent avoir différentes nappes situées du même côté de la surface *(F)*, ou situées les unes d'un côté de cette surface, et les autres du côté opposé. En effet, l'angle compris entre les rayons *(A)* qui appartiennent à une même courbe *(ss)*, après avoir été positif,

peut

peut devenir négatif, et réciproquement; et il est évident qu'avant de changer de signe, cet angle aura été nul, et le point de rencontre des deux rayons consécutifs éloigné à l'infini.

Le point de rencontre de deux rayons *(A)* consécutifs est, comme nous l'avons vu, le même que le point de rencontre des deux lignes *(A) (B)*, en sorte que quand les deux rayons consécutifs sont parallèles, les deux lignes AB le sont aussi : or, l'angle qu'elles forment entre elles a pour cosinus

$$\frac{mdm + ndn + odo}{(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\,(dm^2 + dn^2 + do^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et lorsqu'elles sont parallèles, cette expression doit être égalée à l'unité, ce qui donne $(mdo - odm)^2 + (ndo - odn)^2 + (mdn - ndm)^2 = 0$, ou

$$mdo - odm = 0, \qquad ndo - odn = 0 \ldots (I).$$

Si on substitue dans ces équations, pour $\frac{dx'}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ leurs valeurs tirées de l'équation *(s)*, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M + \left(\frac{do}{dy'}\right)N + \left(\frac{do}{dz'}\right)O\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N + \left(\frac{dm}{dz'}\right)O\right] = 0 \ldots\\ \left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M + \left(\frac{do}{dy'}\right)N + \left(\frac{do}{dz'}\right)O\right] - o\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)M + \left(\frac{dn}{dy'}\right)N + \left(\frac{dn}{dz'}\right)O\right] = 0 \ldots\end{aligned}\right\}(S),$$

et sont le lieu des points particuliers des courbes *(ss)* pour lesquels les deux rayons consécutifs cessent de se rencontrer; elles expriment par conséquent une courbe qui coupe toute la série *(ss)*.

De même, si on substitue dans l'équation *(I)*, pour $\frac{dx}{dz'}$ $\frac{dy'}{dz'}$ leurs valeurs tirées des équations *(s')*, on aura

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M' + \left(\frac{do}{dy'}\right)N' + \left(\frac{do}{dz'}\right)O'\right] - o\left[\left(\frac{dm}{dx'}\right)M' + \left(\frac{dm}{dy'}\right)N' + \left(\frac{dm}{dz'}\right)O'\right] = 0 \ldots\\ \left[\left(\frac{do}{dx'}\right)M' + \left(\frac{do}{dy'}\right)N' + \left(\frac{do}{dz'}\right)O'\right] - o\left[\left(\frac{dn}{dx'}\right)M' + \left(\frac{dn}{dy'}\right)N' + \left(\frac{dn}{dz'}\right)O'\right] = 0 \ldots\end{aligned}\right\}(S'),$$

équations d'une courbe particulière qui rencontre toutes les courbes *(s's')* suivant les points où les rayons *(A)* cessent de se couper dans le même sens.

Les équations $_{\prime}(S)$ $_{\prime}(S')$ sont des solutions particulières de l'équation différentielle (C).

Si entre les équations $_{\prime}(S)$ ou $_{\prime}(S')$ et l'équation $pM+qN+rO=0$, ou $pM'+qN'+rO'=0$ [2], on élimine MNO, ou $M'N'O'$, on obtient l'équation de condition

$$\left\{p\left[m\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dm}{dz'}\right)\right]-r\left[m\left(\frac{do}{dx'}\right)-o\left(\frac{dm}{dx'}\right)\right]\right\}\left\{q\left[n\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right]-r\left[n\left(\frac{do}{dy'}\right)-o\left(\frac{dn}{dy'}\right)\right]\right\}\ldots$$
$$-\left\{p\left[n\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right]-r\left[n\left(\frac{do}{dx'}\right)-o\left(\frac{dn}{dx'}\right)\right]\right\}\left\{q\left[m\left(\frac{do}{dz'}\right)-o\left(\frac{dm}{dz'}\right)\right]-r\left[m\left(\frac{do}{dy'}\right)-o\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right]\right\}=0$$

qui exprime la condition à laquelle doivent satisfaire mno, pour qu'en chaque point de la surface $pdx'+qdy'+rdz'=0$, il existe deux rayons consécutifs parallèles, c'est-à-dire, pour qu'un des deux systèmes de surfaces développables (S) (S') soit un système de surfaces cylindriques ou planes. Si mno sont donnés, et pqr inconnus, la condition précédente peut être regardée comme l'équation aux différences partielles des surfaces $pdx'+qdy'+rdz'=0$, qui satisfont à la condition proposée.

Chacune des lignes (A) qui appartient à la courbe $_{\prime}(s)$ est asymptote à deux branches d'une arête de rebroussement (σ), situées de côtés opposés, et par conséquent la suite des lignes (A) qui appartiennent à la courbe $_{\prime}(s)$, forme une surface $_{\prime}(\Sigma)$ asymptote à deux nappes de la surface (Σ) situées de côtés opposés. Pareillement la suite des lignes (A) qui appartiennent à la courbe $_{\prime}(s')$ forme une surface $_{\prime}(\Sigma')$ asymptote à deux nappes de la surface (Σ').

La ligne d'intersection des deux surfaces $_{\prime}(\Sigma)$ $_{\prime}(\Sigma')$, c'est-à-dire, le rayon (A) qui correspond au point de rencontre des deux courbes $_{\prime}(s)$ $_{\prime}(s')$ est asymptote à deux branches d'une arête de rebroussement (σ), et à deux branches d'une arête de rebroussement (σ').

Outre les deux courbes $_{\prime}(s)$ $_{\prime}(s')$, l'équation (C) a encore une autre solution particulière qui correspond au point où les courbes (ss) $(s's')$

se confondent, c'est-à-dire, au cas où on a $M = M'$ $N = N'$ $L = 0$, et par conséquent

$$(\delta r + \varepsilon q + \zeta p)^2 + 4pq(\gamma\delta - \varepsilon\zeta) + 4pr(\varepsilon\beta - \delta\zeta) + 4qr(\alpha\zeta - \delta\varepsilon) - 4\beta\gamma p^2 - 4\alpha\gamma q^2 - 4\alpha\beta r^2 = 0.$$

La combinaison de cette équation avec l'équation $F(x'y'z') = 0$, détermine sur cette surface la courbe suivant laquelle (ss) $(s's')$ se confondent. On peut faire sur cette équation de condition les mêmes observations que nous avons faites sur celles que nous avons traitées précédemment.

CATOPTRIQUE.

[6.] Nous allons passer à l'application de cette théorie aux phénomènes de l'optique, en commençant par ceux produits par la lumière réfléchie, qui font l'objet de la catoptrique.

On appelle *angle d'incidence* l'angle compris entre le rayon incident et la normale à la surface qui le réfléchit ou le réfracte, et *angle de réflexion* ou *de réfraction*, l'angle compris entre le rayon réfléchi ou réfracté, et la même normale.

L'angle d'incidence est toujours égal à l'angle de réflexion, et le rayon réfléchi est toujours compris dans le plan qui passe par le rayon incident et par la normale au point d'incidence. C'est sur ces principes, donnés par l'expérience, que nous établirons la théorie analytique de la catoptrique.

Soient XYZ les coordonnées d'un point lumineux, les équations des projections d'un rayon de lumière seront

$$a(z - Z) = c(x - X), \quad b(z - Z) = c(y - Y) \ldots\ldots (a),$$

si ce rayon frappe en un point $x'y'z'$ une surface

$$F(x'y'z') = 0, \quad p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \ldots\ldots\ldots (F),$$

il se réfléchira suivant une ligne droite dont nous représenterons les équations par

$$m(z - z') = o(x - x'), \quad n(z - z') = o(y - y') \ldots (A).$$

Les deux lignes *(a) (A)* formant deux angles égaux avec la normale à la surface, on exprimera cette condition par l'équation

$$\frac{ap+bq+er}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{mp+nq+or}{(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)};$$

en second lieu, le rayon incident, le rayon réfléchi, et la normale étant compris dans le même plan, on aura

$$m(cq-br)+n(ar-cp)+o(bp-aq) = 0 \ldots\ldots \text{(c)}.$$

Les deux équations *(b) (c)* renferment les conditions qui doivent déterminer $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$, et on en tire

$$\frac{m}{o} = \frac{pr(a^2+b^2+c^2)+(cq-br)(bp-aq) \pm (ar-cp)(ap+bq+er)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2},$$

$$\frac{n}{o} = \frac{qr(a^2+b^2+c^2)+(ar-cp)(bp-aq) \pm (br-cq)(ap+bq+cr)}{r^2(a^2+b^2+c^2)-(cq-br)^2-(ar-cp)^2};$$

le signe supérieur d'où on tire $\frac{m}{o} = \frac{a}{c}$, $\frac{n}{o} = \frac{b}{c}$ appartient au rayon incident, et le signe inférieur d'où on tire

$$\frac{m}{o} = \frac{2(ap+bq+cr)p-a(p^2+q^2+r^2)}{2(ap+bq+cr)r-c(p^2+q^2+r^2)},$$

$$\frac{n}{o} = \frac{2(ap+bq+cr)q-b(p^2+q^2+r^2)}{2(ap+bq+cr)r-c(p^2+q^2+r^2)},$$

appartient à une ligne qui fait un angle égal avec la normale, et qui est située dans le même plan du côté opposé, c'est-à-dire, au rayon réfléchi; on en conclut

$$m = \lambda[2(ap+bq+cr)p-a(p^2+q^2+r^2)],$$
$$n = \lambda[2(ap+bq+cr)q-b(p^2+q^2+r^2)],$$
$$o = \lambda[2(ap+bq+cr)r-c(p^2+q^2+r^2)],$$

λ étant un coëfficient indéterminé qui s'évanouit du calcul; enfin, comme le point $x'y'z'$ est commun à la surface *(F)*, et un rayon incident, on a

$$a(z'-Z) = c(x'-X), \quad b(z'-Z) = c(y'-Y),$$

et par conséquent

$$a = \lambda'(x - X), \quad b = \lambda'(y' - Y), \quad c = \lambda'(z' - Z),$$

λ' étant un nouveau coëfficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Substituant les valeurs de abc dans les expressions de mno, on aura ces dernières quantités en fonctions des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x'y'z'$ du point de la surface rencontré par le rayon incident.

[7.] D'après les résultats du paragraphe [2.], le système des rayons réfléchis *(A)* peut être considéré comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables *(S) (S')* qui coupent la surface *(F)* du miroir, suivant les deux séries de courbes *(ss) (s's')* [3.], et les points de rencontre de tous ces rayons se trouvent sur deux surfaces courbes (Σ) (Σ') que nous nommerons *surfaces caustiques.*

En second lieu, si on substitue dans l'expression de cos. τ [4.] les valeurs de mno, on trouve qu'elles satisfont à l'équation de condition *(H)*, en sorte que les surfaces développables *(S) (S')* se coupent toutes à angle droit.

On peut simplifier le calcul de cette substitution en observant que les valeurs de mno étant indépendantes de la position des coordonnées, on peut supposer que le rayon réfléchi que l'on considère, soit dans un des axes des coordonnées, dans l'axe des z, par exemple; on a alors $m = 0$, $n = 0$, et l'équation *(H)* se réduit à

$$r\left(\frac{dn}{dx'}\right) - p\left(\frac{dn}{dz'}\right) + q\left(\frac{dm}{dz'}\right) - r\left(\frac{dm}{dy'}\right) = 0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
&+a\left(\frac{dp}{dx'}\right)+b\left(\frac{dq}{dx'}\right)+c\left(\frac{dr}{dx'}\right)\Big]+r\left(\frac{dq}{dx'}\right)(ap+bq+cr)-br\left[p\left(\frac{dp}{dx'}\right)+q\left(\frac{dq}{dx'}\right)+r\left(\frac{dr}{dx'}\right)\right]\\
&+a\left(\frac{dp}{dz'}\right)+b\left(\frac{dq}{dz'}\right)+c\left(\frac{dr}{dz'}\right)\Big]-p\left(\frac{dq}{dz'}\right)(ap+bq+cr)+bp\left[p\left(\frac{dp}{dz'}\right)+q\left(\frac{dq}{dz'}\right)+r\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&+a\left(\frac{dp}{dz'}\right)+b\left(\frac{dq}{dz'}\right)+c\left(\frac{dr}{dz'}\right)\Big]+q\left(\frac{dp}{dz'}\right)(ap+bq+cr)-aq\left[p\left(\frac{dp}{dz'}\right)+q\left(\frac{dq}{dz'}\right)+r\left(\frac{dr}{dz'}\right)\right]\\
&+a\left(\frac{dp}{dy'}\right)+b\left(\frac{dp}{dy'}\right)+c\left(\frac{dr}{dy'}\right)\Big]-r\left(\frac{dp}{dy'}\right)(ap+bq+cr)+ar\left[p\left(\frac{dp}{dy'}\right)+q\left(\frac{dq}{dy'}\right)+r\left(\frac{dr}{dy'}\right)\right]
\end{aligned}\right\} = 0 \ldots (H'),$$

enfin comme $m = 0$, $n = 0$ donnent $ar^2 - cpr = p(ap + bq + cr)$ $br^2 - cqr = q(ap + bq + cr)$, $bp = aq$, tous les termes de l'équation précédente sont multipliés par $ap + bq + cr$, et se réduisent à

$$r\left(\frac{dq}{dx'}\right) - q\left(\frac{dr}{dx'}\right) + p\left(\frac{dr}{dy'}\right) - r\left(\frac{dp}{dy'}\right) + q\left(\frac{dp}{dz'}\right) - p\left(\frac{dq}{dz'}\right) = 0,$$

équation qui a toujours lieu, puisque $pdx' + qdy' + rdz' = 0$ est la différentielle de l'équation $F(x'y'z') = 0$.

Si actuellement par une des courbes (ss) et par le point lumineux on conçoit une surface conique (C), tous les rayons compris dans cette surface, après s'être réfléchis, se rencontreront consécutivement et formeront une des surfaces développables (S); de même tous les rayons compris dans la surface conique (C') qui passe par une des courbes $(s's')$ et par le point lumineux, après s'être réfléchis, formeront une des surfaces développables (S'); ainsi nous considérerons dorénavant le rayon incident (a) comme le lieu de l'intersection de deux surfaces coniques (C) (C'), et le rayon réfléchi (A) comme le lieu de l'intersection de deux surfaces développables (S) (S').

Les deux surfaces coniques (C) (C') se coupent sous le même angle que les deux surfaces (S) (S') correspondantes; en effet, les deux plans tangens aux surfaces (C) (C') suivant la ligne (a), forment, avec le plan tangent au miroir (F), une pyramide triangulaire (aDD') dont les trois arêtes sont les lignes (a) (D) (D'); les lignes (D) (D') étant [2.] les tangentes des courbes (ss) $(s's')$. De même les deux plans tangens aux surfaces développables (S) (S') suivant la ligne (A), forment, avec le plan tangent au miroir (F), une pyramide triangulaire (ADD'), dont les trois lignes (A) (D) (D') sont les arêtes.

Or, l'angle qui est compris entre le rayon incident (a) et la ligne (D) qui a pour cosinus

$$\frac{aM + bN + cO}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}\,(M^2 + N^2 + O^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et l'angle compris entre le rayon réfléchi (A) et la même ligne qui a

pour cosinus

$$\frac{mM + nN + oO}{(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\,(M^2 + N^2 + O^2)^{\frac{1}{2}}},$$

sont égaux entre eux et de signes contraires à cause de l'équation

$$(aM + bN + cO)\,(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}} + (mM + nN + oO)\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

ou

$$[(ar - cp)M + (br - cq)N](m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}} + [(mr - op)M + (nr - oq)N](a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

qui a lieu indépendamment des valeurs de M et N.

Les angles compris entre les lignes $(a)\,(D')$, $(A)\,(D')$ sont aussi égaux entre eux, en sorte que les deux pyramides (aDD') (ADD') sont parfaitement semblables; d'où on conclut que les surfaces coniques (C) (C') se coupent toutes à angle droit.

[8.] Considérons un faisceau de lumière compris entre quatre des surfaces coniques (C) (C) (C') (C') infiniment proches; ce faisceau aura la forme d'une pyramide quadrangulaire rectangle, comprenant entre ses arêtes deux petits angles ii', et les rayons qu'il contient après s'être réfléchis, seront compris dans une surface quadrangulaire rectangle, comprenant entre ses arêtes deux nouveaux angles kk'.

Soit Δ la distance $[(x' - X)^2 + (y' - Y)^2 + (z' - Z)^2]^{\frac{1}{2}}$ du point lumineux au point $x'y'z'$ de la surface (F), et D la distance du point $x'y'z'$ à l'œil situé dans le prolongement du rayon réfléchi; la lumière qui parvient à l'œil après s'être réfléchie, a parcouru depuis le point lumineux un espace exprimé par $D + \Delta$, et à cette distance le faisceau de rayons partis du point lumineux aurait pour section perpendiculaire à son axe, un quadrilatère rectangle dont la surface serait $(D + \Delta)^2 ii'$; mais ce faisceau, au point où se trouve l'œil, a pour section perpendiculaire à son axe, le quadrilatère rectangle $(D \pm R)\,k\,(D \pm R')\,k'$: or, comme l'intensité de la lumière est en raison inverse de l'étendue des surfaces sur lesquelles la même quantité de rayons est dispersée, elle se trouve au lieu où est situé l'œil après la réflexion, relativement à

ce qu'elle eût été à la distance $D + \Delta$, en partant directement du point lumineux dans le rapport de $(D + \Delta)^2 ii'$ à $(D \pm R)(D \pm R')\,kk'$: on pourra donc exprimer la clarté de l'image du point $x = X, y = Y, z = Z$, vue sur le point $x'y'z'$ du miroir, par

$$T = e\,\frac{(D + \Delta)^2 ii'}{(D \pm R)(D \pm R')\,kk'},$$

e étant un coëfficient constant qui exprime la clarté réelle du point lumineux. Il faut observer que le signe $\pm$ qui affecte R et R' est indépendant des valeurs positives ou négatives qui peuvent résulter pour R et R' de leurs positions relativement aux plans de coordonnées. Ces valeurs doivent toujours être prises positivement quand les lignes R et R' sont situées derrière le miroir, et négativement quand elles sont situées en avant, parce que D est toujours pris positivement en avant du miroir.

Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du rapport $\frac{ii'}{kk'}$; or, deux rayons consécutifs (a) de la surface conique (C), comprennent entre eux l'angle très-petit i, qui, étant égal à son sinus, a pour expression

$$i^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(da^2 + db^2 + dc^2) - (ada + bdb + cdc)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

et ces deux rayons, après s'être réfléchis, comprennent entre eux l'angle k, dont l'expression est

$$k^2 = \frac{(m^2 + n^2 + o^2)(dm^2 + dn^2 + do^2) - (mdm + ndn + odo)^2}{(m^2 + n^2 + o^2)^2};$$

mais à cause de [1.]

$$\frac{ndx - mdy}{mdn - ndm} = \frac{odx - mdz}{mdo - odm} = \frac{ody - ndz}{ndo - odn},$$

on aura

$$(m^2+n^2+o^2)(dm^2+dn^2+do^2)-(mdn+ndn+odo)^2 = \frac{(mdn-ndm)^2}{(ndx-mdy)^2}\,[(m^2+n^2+o^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(mdx+ndy+odz)^2]$$

$$\frac{i^2}{k^2} = \frac{(m^2+n^2+o^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\,\frac{(ndx-mdy)^2}{(mdn-ndm)^2}\,\frac{[(a^2+b^2+c^2)(da^2+db^2+dc^2)-(ada+bdb+cdc)^2]}{[(m^2+n^2+o^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(mdx+ndy+odz)^2]},$$

et

et à cause de l'équation

$$(m^2+n^2+o)\,(adx'+bdy'+cdz')^2=(a^2+b^2+c^2)\,(mdx'+ndy'+odz')^2$$

qui résulte des deux conditions *(b) (c)*

$$\frac{i'^2}{K'^2}=\frac{(m^2+n^2+o^2)\,(ndx'-mdy')^2}{(a^2+b^2+c^2)\,(mdx'-ndm)^2}=\frac{R^2}{\Delta^2},$$

et enfin

$$\frac{i}{k}=\frac{R}{\Delta},\quad \frac{i'}{k'}=\frac{R'}{\Delta},\quad T=e\,\frac{(D+\Delta)^2\,RR'}{(D\pm R)\,(D\pm R')\,\Delta^2},$$

lorsque la distance Δ du point lumineux est infinie, on a

$$T=e\,\frac{RR'}{(D\pm R)\,(D\pm R')}.$$

On peut déjà observer qu'abstraction faite du terme $e\,\frac{(D+\Delta)^2\,RR'}{\Delta^2}$, l'intensité T de la lumière réfléchie sera d'autant plus forte que $(D\pm R)$ $(D\pm R')$ seront plus petits; en sorte que le *maximum* d'intensité aura lieu pour les points où $D\pm R=o$, $D\pm R'=o$; or, $D\pm R=o$ est l'équation de la surface caustique (Σ), et $D\pm R'=o$ est celle de la surface caustique (Σ'); c'est donc à l'intersection de ces deux surfaces que se trouve le *maximum* de lumière réfléchie. Quand le lieu de cette intersection se réduit à plusieurs points particuliers, on les nomme *foyers des rayons réfléchis.*

[9.] Nous allons faire l'application de l'analyse précédente aux surfaces de révolution. Nous supposerons le point lumineux dans l'axe des x, et nous choisirons cet axe pour celui des surfaces. On aura alors $Y=o$, $Z=o$, $a=x'-X$, $b=y'$, $c=z'$, et les équations $Fx'y'z'=o$, $pdx'+qdy'+rdz'=o$, qui représentent la surface du miroir, seront

$$y'^2+z'^2=\Phi(x'),\qquad 2y'dy'+2z'dz'=\Phi'(x')dx';$$

$\Phi(x')$ étant une fonction arbitraire de x'., on en déduit $p=\Phi'(x')$, $q=-2y'$, $r=-2z'$; substituant dans les expressions générales

de *mno* [6.], et faisant $\lambda = \frac{1}{4\varphi(x') - \varphi'^2(x') - 4(x'-X)\varphi'(x')}$, on aura

$$m = -\frac{[4\varphi.(x') - \varphi'^2.(x')](x'-X) + 4\varphi.(x')\varphi'.(x')}{4\varphi(x') - \varphi'^2(x') - 4(x'-X)\varphi'(x')} = \Psi(x'), n = y', o = z',$$

introduisant ces expressions dans les équations *(s)* *(s')* [2.], on a

$$\alpha = o, \beta = o, \gamma = o, \delta = z'[1-\Psi'(x')], \epsilon = -y'[1-\Psi'(x')], \zeta = o, L = 2(y'^2+z'^2)[1-\Psi'(x')],$$
$$M = o, N = -4z'^2\varphi'(x')[1-\Psi'(x')], O = 4y'z'\varphi'(x')[1-\Psi'(x')], M' = 8y'\varphi(x')[1-\Psi'(x')],$$
$$N' = 4y'^2\varphi'(x')[1-\Psi'(x')], \; O' = 4y'z'\varphi'(x')[1-\Psi'(x')],$$

ou simplement

$$M = o, N = -z'^2\varphi'(x'), O = y'z'\varphi'(x'), M' = 2y'\varphi(x'), N' = y'^2\varphi'(x'), O' = y'z'\varphi'(x'),$$

enfin,

$$dx' = o, \qquad y'dy' + z'dz' = o \ldots\ldots\ldots (s),$$
$$2\Phi(x')dz' - z'\Phi'(x')dx' = o, \quad y'dz' - z'dy' = o \ldots (s').$$

Les intégrales de ces équations sont en nommant A et B les constantes arbitraires qui les complètent,

$$x' = A, \qquad y'^2 + z'^2 = \Phi(A) \ldots\ldots (ss),$$
$$z'^2(1+B^2) = \Phi(x'), \qquad y' = Bz' \ldots\ldots (s's').$$

La première série des courbes *(ss)* appartient à la suite des cercles compris dans les plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et la seconde série *(s's')* à la suite des méridiens de la surface.

Si, entre les équations du rayon incident

$$(x'-X)z = z'(x-X), \; y'z = z'y, \; (x'-X)y = y'(x-X) \ldots\ldots (a),$$

et celles des courbes *(ss)*, on élimine $x'y'z'$, le résultat sera l'équation de la série de surfaces coniques *(C)*

$$(A-X)^2(y^2+z^2) = (x-X)^2\Phi.(A) \ldots\ldots (CC).$$

Ces surfaces sont une suite de cônes à base circulaire dont l'axe est celui de révolution, et dont les centres sont tous placés au point $x = X, y = o, z = o$.

Si, entre ces mêmes équations *(a)* et celles des courbes *(s's')*, on

élimine $x'y'z'$, le résultat sera l'équation de la série de surfaces coniques (C')

$$y = Bz \ldots\ldots (C'C'),$$

en sorte que ces surfaces se réduisent à une suite de plans qui passent par l'axe de révolution.

Si, entre les équations du rayon réfléchi

$$\Psi(x')(z-z') = z'(x-x'),\ y'z = z'y,\ \Psi(x')(y-y') = y'(x-x') \ldots (A),$$

et celles des courbes (ss), on élimine $x'y'z'$, on aura la série des surfaces développables (S)

$$\Psi^2(A)(y^2+z^2) = \Phi(A)[x - A + \Psi(A)]^2 \ldots\ldots\ldots (SS).$$

Ces surfaces sont une suite de cônes à base circulaire, qui ont pour axe celui de révolution, et dont les centres varient pour chaque valeur particulière de la constante arbitraire A.

Si, entre les mêmes équations (A) et celles des courbes $(s's')$, on élimine $x'y'z'$, on aura la série des surfaces développables (S'),

$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (S'S'),$$

ces surfaces se réduisent à une suite de plans qui passent par l'axe de révolution.

Pour déterminer les arêtes de rebroussement (σ) (σ') de ces surfaces développables et les surfaces caustiques (Σ) (Σ'), qui sont le lieu des points de rencontre de tous les rayons, il faut commencer par substituer dans les équations (G) (G') [3.], les valeurs de MNO, $M'N'O'$, ce qui donne

$$\Lambda = -1, \qquad \Lambda' = -\frac{\Psi.(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\Psi'(x')},$$

$$x - x' = -\Psi(x'), \qquad y - y' = -y', \qquad z - z' = -z' \ldots (G),$$

$$R = (m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}\ \Lambda = -[\Psi^2(x') + \Phi(x')]^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots (R),$$

$$x-x' = -\Psi(x')\frac{\Psi.(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x').\Psi'(x')}\ y-y' = -y'\frac{\Psi(x')\varphi(x') - 2\varphi(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\Psi'(x')} \ldots$$

$$z - z' = -z'\frac{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\Psi'(x')} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G'),$$

$$R' = (m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}\ \Lambda = -[\Psi^2(x') + \varphi(x')]^{\frac{1}{2}}\frac{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\Psi'(x')} \ldots (R').$$

Si, entre les équations (ss) et (G), on élimine $x'y'z'$, on aura celles des arêtes de rebroussement (σ) des surfaces développables (S)

$$x = A - \Psi.(A), \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots (\sigma\sigma),$$

d'où on voit que chacune de ces arêtes de rebroussement se réduit à un point situé sur l'axe des x.

Si, entre les mêmes équations (G), et celle de la surface $y'^2 + z'^2 = \Phi(x')$, on élimine les mêmes quantités, on aura l'équation de la surface caustique (Σ) qui est le lieu de toutes ces arêtes de rebroussement (σ), et qui se réduit dans ce cas-ci à l'axe de révolution

$$y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots (\Sigma).$$

Si, entre les équations $(s's')$ et (G'), on élimine $x'y'z'$, on aura celles des arêtes de rebroussement (σ') des surfaces développables (S'), qui, quoique placées dans le cas présent, n'en ont pas moins chacune une arête de rebroussement formée par la suite des rayons consécutifs qu'elles contiennent. En effet, on peut éliminer directement $x'y'z'$ entre la dernière des équations $(s's')$, et les deux dernières des équations (G'), ce qui donne $y = Bz$. Quant à l'autre projection, si on élimine z' entre la première des équations $(s's')$, et la dernière des équations (G'), on aura

$$z^2(1 + B^2) = 4\Phi^3(x')\left[\frac{1 - \Psi'(x')}{\Psi(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\Psi'(x')}\right]^2;$$

mais au moyen de la première des équations (G'), on pourra déterminer x' en fonction de x, en sorte qu'on aura un résultat de la forme

$$z^2(1 + B^2) = \chi.(x), \qquad y = Bz \ldots\ldots (\sigma'\sigma').$$

Pour déterminer la surface caustique (Σ') qui est le lieu de toutes ces arêtes de rebroussement, il faudra éliminer $x'y'z'$ entre les équations (G'), et celle de la surface $y'^2 + z'^2 = \Phi(x')$, ou éliminer la constante arbitraire B entre les deux équations $(\sigma'\sigma')$, ce qui donne

$$y^2 + z^2 = \chi.(x) \ldots\ldots (\Sigma'),$$

équation qui appartient aussi à une surface de révolution : les points où cette surface (Σ') coupe l'axe (Σ), et qui sont donnés par l'équation $\chi(x) = 0$, sont ceux où le maximum de lumière est réuni [8.], et se nomment foyers des rayons réfléchis.

Si on veut déterminer sur la surface $y'^2 + z'^2 = \Phi(x')$ les courbes $_{\prime}(s)\,{}_{\prime}(s')$ [5.], qui sont le lieu des points particuliers des courbes $(ss)\,(s's')$ pour lesquels deux rayons consécutifs cessent de se rencontrer dans le même sens, il faudra substituer dans les équations $_{\prime}(s)\,{}_{\prime}(s')$ les valeurs de MNO, $M'N'O'$, on aura alors

$$y'z' = 0, \quad y'^2 + z'^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y' = 0, \quad z' = 0 \ldots\ldots {}_{\prime}(s).$$

Ces équations appartiennent au point de la surface rencontré par l'axe de révolution. Il faut cependant observer que comme l'équation précédente donne $\frac{n}{m} = 0$, $\frac{o}{m} = 0$, on pourra encore y satisfaire en faisant $m = \pm\infty$, ou

$$4\Phi(x') - \Phi'^2(x') - 4(x' - X)\Phi'(x') = 0, \quad y'^2 + z'^2 = \Phi(x') \ldots {}_{\prime}(s),$$

équations qui appartiennent à un cercle dont tous les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe de révolution et forment une surface cylindrique $_{\prime}(\Sigma)$ asymptote à l'axe (Σ).

La courbe $_{\prime}(s')$, en substituant les valeurs de $M'N'O'$, devient

$$\Psi(x')\Phi'(x') - 2\Phi(x')\Psi'(x') = 0, \quad y'^2 + z'^2 = \Phi(x') \ldots {}_{\prime}(s'),$$

équation d'un cercle dont tous les rayons réfléchis forment une surface conique $_{\prime}(\Sigma')$ asymptote à deux nappes de la surface (Σ').

Quant au nombre $T = e\,\frac{(D+\Delta)^2 RR'}{(D \pm R)(D \pm R')\Delta^2}$ [8.] qui exprime la clarté de l'image du point lumineux, on a

$$T = e\,\frac{(D+\Delta)^2[\downarrow^2(x') + \varphi(x')][\downarrow(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')]}{\{D \mp [\downarrow^2(x') + \varphi(x')]^{\frac{1}{2}}\}\{D[\downarrow(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')\downarrow'(x')] \mp [\downarrow^2(x') + \varphi(x')]^{\frac{1}{2}}[\downarrow(x')\varphi'(x') - 2\varphi(x')]\}\Delta^2}.$$

Si on se propose de déterminer une surface de révolution telle

que tous les rayons réfléchis soient parallèles à son axe, on aura à remplir la condition $\frac{n}{m} = 0$, $\frac{o}{m} = 0$, ou

$$4\Phi(x') - \Phi'^2(x') - 4(x' - X)\Phi'(x') = 0.$$

Or, en substituant pour $\Phi(x')$ et $\Phi'(x')$ leurs valeurs $y'^2 + z'^2 \frac{2y'dy' + 2z'dz'}{dx'}$, cette équation devient

$$(y'^2 + z'^2)dx'^2 - (y'dy' + z'dz')^2 - 2(x' - X)(y'dy' + z'dz')dx' = 0,$$

et son intégrale

$$4(x' + n)(X + n) = y'^2 + z'^2,$$

représente les paraboloïdes de révolution qui ont leur foyer au point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, n étant la constante arbitraire qui particularise chacune de ces surfaces.

On en conclut réciproquement que si un paraboloïde de révolution est frappé par des rayons parallèles à son axe, tous les rayons réfléchis se réuniront au foyer.

Déterminons actuellement une surface de révolution telle que tous les rayons partis du point .....$x = X$, $y = 0$, $z = 0$, se réunissent en un second point $x = X'$, $y = 0$, $z = 0$, les équations du rayon réfléchi étant

$$m(z - z') = o(x - x'), \quad n(z - z') = o(y - y') \ldots\ldots (A),$$

la condition qui exprime que tous ces rayons passent par le point $x = X'$, $y = 0$, $z = 0$, est

$$-mz' = o(X' - x'), \qquad nz' = oy'.$$

Substituant à mno leurs valeurs, la seconde équation devient identique, et la première donne

$$[4\varphi(x') - \varphi'^2(x')](x' - X) + 4\varphi(x)\varphi'(x) = (X' - x')[4\varphi(x') - \varphi'^2(x') - 4(x' - X)\varphi'(x')].$$

Or si, comme dans le cas précédent, on remplace $\Phi(x')$ et $\Phi'(x')$ par leurs valeurs, on a

$$(y'^2 + z'^2)(2x' - X - X')dz'^2 + 2(y'^2 + z'^2 - x'^2 + x'X + x'X' - XX')dx'(y'dy' + z'dz') \ldots + (2x' - X - X')(y'dy' + z'dz')^2 = 0;$$

équation dont l'intégrale est

$$[(X-X')^2+4\theta^2](y'^2+z'^2-\theta^2)+\theta^2(2x'-X-X')^2=0;$$

et qui représente les ellipsoïdes de révolution qui ont leurs foyers aux points $x=X, y=0, z=0$, $x=X', y=0, z=0$, θ^2 étant la constante arbitraire qui particularise chacune de ces surfaces. On voit que le petit axe de ces ellipsoïdes est exprimé par 2θ, et le grand axe par $[(X-X')^2+4\theta^2]^{\frac{1}{2}}$.

[10.] Avant de pousser plus loin l'application de l'analyse précédente, nous exposerons plusieurs axiomes d'optique nécessaires au développement de cette théorie.

1.° Les jugemens que nous portons, dans les phénomènes de l'optique, sur la distance et la grandeur des objets, sont déterminés par la comparaison des sensations que nous éprouvons dans la vision simple.

2.° Nous jugeons de la distance d'un objet dont nous connaissons la véritable grandeur, d'après sa distance apparente, sa grandeur apparente et sa clarté apparente.

3.° Nous rapportons la distance d'un point lumineux au lieu d'où les rayons divergent; ainsi, lorsque nous apercevons l'image d'un point lumineux sur un miroir courbe, nous rapportons sa distance aux points du rayon réfléchi rencontrés par les rayons consécutifs, et par conséquent aux points où ce rayon est tangent aux deux surfaces $(\Sigma)(\Sigma')$. Si l'œil est placé entre ces deux caustiques, il rapporte la distance du point lumineux à la seule caustique qui est dans la direction du rayon visuel; mais si les deux caustiques se trouvent dans la direction du rayon visuel, la distance apparente est une combinaison des deux distances de l'œil aux points où le rayon réfléchi les touche.

4.° La grandeur apparente d'un objet est une fonction de l'angle compris entre les deux rayons visuels qui sous-tendent ses extrémités.

5.° Enfin, comme la clarté d'un objet éclairé diminue en raison de son éloignement, si, par une nouvelle disposition des rayons, cette

clarté est modifiée, ce changement influe sur le jugement que nous portons relativement aux dimensions ou à la distance de l'objet.

[11.] Nous commencerons par considérer un miroir plan, et nous supposerons que sa surface soit le plan des yz, en sorte que les équations [9.] $y'^2 + z'^2 = \Phi.(x')$ et $2y'dy' + 2z'dz' = \Phi'(x')dx'$, deviendront $x' = o$, $dx' = o$. On en conclut que Φ est une variable arbitraire, et $\Phi' = \infty$.

$$m = \downarrow(x') = X, \qquad n = y', \qquad o = z',$$

$$dx' = o, \qquad y'dy' + z'dz' = o \ldots\ldots (s),$$

$$dx' = o, \qquad y'dz' - z'dy' = o \ldots\ldots (s'),$$

$$x' = o, \qquad y'^2 + z'^2 = d^2 \ldots\ldots (ss),$$

$$x' = o, \qquad y' = Bz' \ldots\ldots\ldots\ldots (s's'),$$

$$X^2(y^2 + z^2) = (x - X)^2 d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (CC),$$

$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots (C'C'),$$

$$X^2(y^2 + Bz) = (x + X)^2 d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (SS),$$

$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots (S'S'),$$

$$\Lambda = \Lambda' = -1, \qquad R = R' = -(X^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} = -\Delta,$$

$$x = -X, \qquad y = o, \qquad z = o, \qquad (\sigma\sigma)(\sigma'\sigma')(\Sigma)(\Sigma'),$$

$$T = e\,\frac{(D + \Delta)^2 RR'}{(D - R)(D - R')} = e.$$

On voit, par ces résultats, que les surfaces développables *(SS)*, formées par les rayons réfléchis, sont une suite de cônes semblables aux cônes *(CC)*, et qui ont leur centre au point $x = -X$, $y = o$, $z = o$.

C'est à ce point unique, qui est le lieu constant de l'image, que se réduisent les arêtes de rebroussement $(\sigma\sigma)$ $(\sigma\sigma')$ et les surfaces caustiques (Σ) (Σ').

Ce point est situé derrière le miroir, à une distance égale à celle à laquelle se trouve, en avant, le point lumineux.

La

La valeur de T indique que la clarté de l'image est la même que celle de l'objet.

[12.] Supposons actuellement que la surface de révolution proposée [9.] soit une sphère d'un rayon ρ, ayant son centre à l'origine des coordonnées, l'équation du miroir sera

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2,$$

d'où on tire

$$\Phi(x') = \rho^2 - x'^2, \qquad \Phi'(x') = -2x';$$

et en substituant dans mno

$$m = \downarrow(x') = \frac{(\rho^2 - 2x'X)x' + \rho^2 X}{\rho^2 - 2x'X}, \qquad n = y', \qquad o = z',$$

les deux séries de courbes de réflexion seront

$$x' = A, \qquad y'^2 + z'^2 = \rho^2 - A^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (ss),$$
$$z'^2(1 + B^2) = \rho^2 - x'^2, \qquad y' = Bz' \ldots\ldots\ldots\ldots (s's').$$

Les équations (ss) appartiennent à une série de cercles parallèles au plan des yz, et les équations $(s's')$, à une série de grands cercles dont les plans passent par l'axe des x, et qui se projettent sur les plans des xz, xy, suivant une série d'ellipses qui ont toutes le même grand axe ρ.

Les deux séries de surfaces coniques concentriques sont

$$(A - X)^2(y^2 + z^2) = (x - X)^2(\rho^2 - A^2) \ldots\ldots (CC),$$
$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C'C').$$

L'équation (CC) exprime une suite de cônes à base circulaire, et l'équation $(C'C')$, une suite de plans qui passent par l'axe des x.

Les surfaces développables formées par les séries de rayons réfléchis qui se rencontrent consécutivement, sont

$$[(\rho^2 - 2AX)A + \rho^2 X]^2(y^2 + z^2) = (\rho^2 - A^2)[(\rho^2 - 2AX)x + \rho^2 X]^2 \ldots\ldots (SS),$$
$$y = Bz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (S'S').$$

Les surfaces (SS) sont une suite de cônes dont les centres se trouvent sur l'axe des x.

Les valeurs de Λ et Λ' sont,

$$\Lambda = -1, \qquad \Lambda' = -\frac{(\rho^2 - 2x'X)(\rho^2 - x'X)}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)};$$

en sorte qu'on a

$$x = -\frac{\rho^2 X}{\rho^2 - 2x'X}, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots (G),$$

$$R = (m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\Lambda = -\frac{\rho^2(\rho^2 - 2x'X + X^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 - 2x'X)} = -\frac{\rho^2\Delta}{(\rho^2 - 2x'X)},$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -X\,\frac{\rho^2 - x'^2}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)} \\ y &= 2y'X^2\,\frac{\rho^4 + 2x'^3X - 3\rho^2x'X}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)} \\ z &= 2z'X^2\,\frac{\rho^2 - x'^2}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (G'),$$

$$R' = (m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\Lambda' = -\frac{(\rho^2 - 2x'X + X^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - x'X)}{\rho^2 + 2X^2 - 3x'X} = -\frac{\Delta(\rho^2 - x'X)}{\rho^2 + 2X^2 - 3x'X}$$

Si entre les équations (ss) et (G) on élimine $x'y'z'$, on aura

$$x = -\frac{\rho^2 X}{\rho^2 - 2AX}, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots (\sigma\sigma)$$

pour équations des arêtes de rebroussement dès surfaces développables (S S). Ces courbes se réduisent à une suite de points situés sur l'axe des x.

L'équation de la surface (Σ), qui est le lieu de toutes ces arêtes de rebroussement, sera

$$y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Sigma).$$

Si entre les équations $(s's')$ et (G') on élimine $x'y'z'$, on aura les équations de l'arête de rebroussement $(\sigma'\sigma')$; et si entre les mêmes équations (G') et l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2$ on élimine $x'y'z'$, on aura l'équation de la surface (Σ'), qui est, comme nous l'avons vu, une surface de révolution. Mais, sans avoir recours à cette élimination, nous pouvons considérer simplement les cercles générateurs de cette surface, qui sont évidemment formés par l'intersection consécutive des surfaces (SS). On aura donc l'équation de ces cercles en éliminant $x'y'z'$ entre les équations (ss) et (G); ce qui donne

$$x = -X\,\frac{\rho^4 + 2A^3X - 3\rho^2AX}{\rho^2(\rho^2 + 2X^2 - 3AX)}, \qquad y^2 + z^2 = \frac{4X^4(\rho^2 - A^2)^3}{\rho^4(\rho^2 + 2X^2 - 3AX)^2} \ldots (\Sigma' ss).$$

Si on élimine la constante arbitraire A entre ces deux équations, le résultat sera la surface caustique (Σ').

Les équations (s) du cercle sur lequel les rayons se réfléchissent parallèlement à l'axe des x, deviennent

$$x' = \frac{\rho^2}{2X}, \qquad y'^2 + z'^2 = (4X^2 - \rho^2)\frac{\rho^2}{4X^2} \ldots\ldots (s),$$

et l'équation

$$y^2 + z^2 = (4X^2 - \rho^2)\frac{\rho^2}{4X^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\Sigma),$$

est celle de la surface cylindrique formée par les rayons réfléchis sur cette courbe.

Les équations (s') du cercle dont tous les rayons réfléchis forment une surface conique asymptote à deux nappes de la surface (Σ'), sont

$$x' = \frac{\rho^2 + 2X^2}{3X}, \qquad y'^2 + z'^2 = \frac{5X^2\rho^2 - \rho^4 - 4X^4}{9X^2} \ldots\ldots (s'),$$

et la surface conique proposée est

$$(\rho^4 + 7X^2\rho^2 - 8X^4)^2 (y^2 + z^2) = (5X^2\rho^2 - \rho^4 - 4X^4)[(\rho^2 - 4X^2)x + 3\rho^2 X]^2 \ldots (\Sigma');$$

On aurait également obtenu les équations (s') en faisant $x = \infty$ dans les équations (G').

Quant au nombre T qui exprime la clarté de l'image du point lumineux, on a

$$T = e\frac{(D+\Delta)^2 RR'}{(D+R)(D+R')\Delta^2} = \frac{(D+\Delta)^2\rho^2(\rho^2 - x'X)}{[D(\rho^2 - 2x'X) - \Delta\rho^2][D(\rho^2 + 2X^2 - 3x'X) - \Delta(\rho^2 - x'X)]}.$$

Nous laisserons à R et à R' le signe positif, parce que dans le cas que nous considérons, ces quantités seront toujours positives quand elles seront au-delà du plan tangent, et toujours négatives quand elles seront en-avant.

[13.] Nous allons exposer, au moyen des équations précédentes, les divers phénomènes que présentent les miroirs sphériques convexes ou concaves.

Pour fixer les idées, nous prendrons les x positives en avant du plan des yz, et les x négatives du côté opposé.

(Fig. 1.re). Considérons d'abord le cas des rayons lumineux parallèles, on aura $X = \infty$, et l'équation des surfaces coniques *(SS)* deviendra, en substituant à la constante arbitraire A la constante arbitraire x' qu'elle représente,

$$(\rho^2 - 2x'^2)^2(y^2 + z^2) = (\rho^2 - x'^2)(\rho^2 - 2x'x) \ldots\ldots (SS),$$

les valeurs positives de x' appartenant au miroir convexe, et les valeurs négatives au miroir concave.

Les centres des surfaces *(SS)* auront pour équation

$$x = \frac{\rho^2}{2x'}, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots (\sigma\sigma),$$

ainsi x étant toujours de même signe que x', tous ces centres seront, pour le miroir convexe, en avant du plan des yz, et pour le miroir concave, en arrière de ce plan.

Les surfaces *(SS)* consécutives se coupent suivant les cercles

$$x = x'\frac{3\rho^2 - 2x'^2}{2\rho^2}, \qquad y^2 + z^2 = \frac{(\rho^2 - x'^2)}{\rho^4} \ldots\ldots (\Sigma' ss).$$

La suite des cercles *(Σ′ss)* forme la surface caustique *(Σ′)*, et comme toutes les valeurs de x' sont comprises entre ρ et $-\rho$, on voit que x sera toujours de même signe que x', et que la partie de la surface *(Σ′)*, qui appartient au miroir convexe, sera toujours en avant du plan des yz, et la partie qui appartient au miroir concave, en arrière de ce plan.

Si entre les deux équations *(Σ′ss)* on élimine la constante arbitraire x', on aura l'équation de la surface caustique *(Σ′)*.

$$2x = [\rho^2 - \rho^{\frac{4}{3}}(y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}[1 + 2\rho^{-\frac{2}{3}}(y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}] \ldots\ldots (\Sigma').$$

Cette surface coupe l'axe *(Σ)* aux points $y = 0$, $z = 0$, ou $x = \pm\frac{\rho}{2}$, qui sont ceux où le *maximum* de lumière est réuni, en sorte que le foyer des rayons parallèles réfléchis est, pour le miroir convexe, $x = \frac{\rho}{2}$, et pour le miroir concave, $x = -\frac{\rho}{2}$.

Parmi les surfaces *(SS)*, il y en a deux qui se réduisent à des plans perpendiculaires à l'axe des x. Or, l'équation de ces deux surfaces a

lieu indépendamment des valeurs de $y'^2 + z'^2$. Introduisant cette condition dans l'équation (CC) on a

$$x = x' = \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (SP).$$

Ces deux plans touchent la surface (Σ') suivant deux cercles dont on aura les équations en substituant cette valeur de x' dans les équations $(\Sigma' ss)$, ce qui donne

$$x = \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}, \qquad y^2 + z^2 = \frac{\rho^2}{8}.$$

Les équations du cercle sur lequel les rayons se réfléchissent parallèlement à l'axe des x, sont

$$x' = 0, \qquad y^2 + z^2 = \rho^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (s),$$

et la surface cylindrique formée par ces rayons, est

$$y^2 + z^2 = \rho^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Sigma);$$

c'est-à-dire, qu'elle enveloppe la sphère suivant le grand cercle qui sépare le miroir concave et le miroir convexe.

Quant au cercle dont les rayons réfléchis forment une surface conique asymptote à deux nappes de la surface (Σ'), on aura

$$x' = \frac{2}{3} X, \qquad y^2 + z^2 = -\frac{4}{9} X^2 \ldots\ldots (s'),$$

résultat imaginaire, d'où on conclut que la surface (Σ') n'a pas de nappes infinies.

Pour obtenir les valeurs de R et R', on observera que $\Delta = X = \infty$, et on aura

$$R = \frac{\rho^2}{2x'}, \qquad R' = \frac{x'}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (R)(R'),$$

R et R' sont toujours de même signe et situés du même côté d'un plan tangent. En second lieu, la surface caustique (Σ') étant comprise entre les plans $x = \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ (SP) et la surface cylindrique $y^2 + z^2 = \rho^2$ (Σ), sera toujours renfermée dans l'intérieur de la sphère; en sorte que, 1.° *dans le miroir convexe*, tous les rayons se rencontrent au-delà du plan

tangent, et l'*image est située derrière le miroir*; 2.° *dans le miroir concave*, tous les rayons se rencontrent en avant du plan tangent, et l'*image est*

On peut déjà conclure de là, par induction, que lorsque des rayons parallèles frappent un miroir convexe quelconque, ils divergent après s'être réfléchis, et que lorsqu'ils frappent un miroir concave quelconque ils convergent après s'être réfléchis.

Quant au terme qui exprime l'intensité de la lumière, on a

$$T = e^{\frac{(D+\Delta)^2 RR'}{(D+R)(D+R')\Delta^2}} = e^{\frac{\rho^2 x'}{(2x'D+\rho^2)(2D+x')}}.$$

On aura le *maximum* d'intensité de lumière aux points pour lesquels $2x'D + \rho^2 = 0$, $2D + x' = 0$; équations d'où on tire $x' = \pm\rho$, valeurs qui, substituées dans $(\Sigma' ss)$, donnent $x = \pm\frac{\rho}{2}$, $R = R' = \pm\frac{\rho}{2}$, résultats conformes à la position déjà connue des foyers des rayons parallèles réfléchis sur les miroirs sphériques, convexes et concaves.

[14.] Supposons actuellement à X une valeur finie, mais plus grande que ρ, en sorte qu'on ait $X = f\rho$, $f > 1$.

Nous déterminerons avant tout les limites du miroir convexe et du miroir concave. Si du point lumineux $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, on enveloppe la sphère par une surface conique, le cercle de contact sera la limite des deux miroirs. Or le plan tangent à la sphère en un point $x'y'z'$, est $x'(x - x') + y'(y - y') + z'(z - z') = 0$; et si on exprime qu'il passe par le point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, on aura la condition $x'X - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$, ou $x' = \frac{\rho^2}{X} = \frac{\rho}{f}$.

Le miroir convexe sera donc compris entre les limites

$$x' = \rho, \text{ et } x' = \frac{\rho}{f},$$

et le miroir concave entre les limites

$$x' = \frac{\rho}{f}, \text{ et } x' = -\rho.$$

Cela posé, les surfaces *(SS)* seront

$$[(\rho - 2x'f)x' + \rho^2 f]^2 (y^2 + z^2) = (\rho^2 - x'^2)[(\rho - 2x'f)x + \rho^2 f]^2 \ldots\ldots (SS).$$

La position du centre de ces cônes sera

$$x' = \frac{\rho^2 f}{2x'f - \rho}, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots (\sigma\sigma).$$

Cette valeur est positive depuis $x' = \rho$ jusqu'à $2x'f - \rho = 0$, ou $x' = \frac{\rho}{2f}$. Or cette dernière limite étant comprise dans celles du miroir concave, x sera toujours positif pour le miroir convexe : il est négatif pour le miroir concave, depuis $x' = \frac{\rho}{2f}$ jusqu'à $x' = -\rho$.

Les surfaces *(SS)* consécutives se coupent suivant les cercles

$$x = \frac{3x'f^2\rho^2 - f\rho^3 - 2f^2x'^3}{\rho^2 + 2f^2\rho^2 - 3x'f\rho}, \quad y^2 + z^2 = \frac{4f^4(\rho^2 - x'^2)^3}{(\rho^2 + 2f^2\rho^2 - 3x'f\rho)^2} \ldots (\Sigma' ss);$$

et le lieu de tous ces cercles qu'on obtient en éliminant x' entre ces deux équations, est la surface (Σ').

Les surfaces *(SS)* qui se réduisent à des plans, sont

$$x = \rho \frac{1 \pm (1 + 8f^2)^{\frac{1}{2}}}{4f} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (SP).$$

Ces surfaces sont situées, l'une en avant du plan des yz, et l'autre en arrière de ce plan; et on doit observer que quelle que soit f, les deux valeurs de x seront toujours comprises entre les limites $x = \pm \rho$.

Les équations du cercle sur lequel les rayons se réfléchissent parallèlement à l'axe des x, sont,

$$x' = \frac{\rho}{2f} \qquad y'^2 + z'^2 = \rho^2 \frac{4f^2 - 1}{4f^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (s),$$

et la surface cylindrique formée par ces rayons est

$$y^2 + z^2 = \rho^2 \frac{4f^2 - 1}{4f^2}.$$

Quelle que soit la valeur de f, le rayon de cette surface est toujours moindre que celui de la sphère.

Quant au cercle (s), dont les rayons réfléchis forment une surface conique asymptote à deux nappes de la surface (Σ'), on aura

$$x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f}, \qquad y'^2+z'^2 = \rho^2\frac{5f^2-1-4f^4}{9f^2} \ldots\ldots (s').$$

Or puisque f est >1, ces expressions sont imaginaires et indiquent que la surface caustique (Σ') est composée d'une seule nappe.

$$R = \frac{\Delta\rho}{2x'f-\rho}, \qquad R' = \frac{\Delta(x'f-\rho)}{\rho+2f^2\rho-3x'f},$$

$$T = e\frac{(D+\Delta)^2RR'}{(D+R)(D+R')\Delta^2} = e\frac{(D+\Delta)^2\rho(x'f-\rho)}{[D(2x'f-\rho)+\Delta\rho][D(\rho+2f^2\rho-3x'f)+\Delta(x'f-\rho)]}.$$

1.° Considérons d'abord ces résultats dans les limites du miroir *convexe*, $x' = \rho$, $x' = \frac{f}{f}$.

Entre ces limites R et R' sont toujours positifs et situés d'un même côté du plan tangent. En second lieu, la surface caustique (Σ') étant comprise entre les plans (SP) et la surface cylindrique (Σ), elle se trouvera renfermée toute entière dans l'intérieur de la sphère; en sorte que l'*image du point lumineux sera toujours située derrière le plan tangent au miroir.*

De plus, R est compris entre les limites $R = \Delta\frac{1}{2f-1}$ et $R = \Delta$, et R' entre les limites $R' = \Delta\frac{1}{2f-1}$, $R' = 0$, et on a toujours $R<\Delta$, $R'<\Delta$, Δ étant toujours la distance du point lumineux $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, au point $x'y'z'$, où se fait la réflexion. Or, la distance Δ' de l'image du point lumineux au point $x'y'z'$ du miroir, étant $\frac{R+R'}{2}$ est comprise entre les limites $\Delta' = \Delta\frac{1}{2f-1}$, $\Delta' = \Delta\frac{1}{2}$, et on a toujours $\Delta'<\Delta$, en sorte que le point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, *sera toujours vu à une distance de la surface moindre que sa distance réelle.*

On a, d'après le paragraphe [8.], les deux rapports $\frac{i}{k} = \frac{R}{\Delta}$, $\frac{i'}{k'} = \frac{R'}{\Delta}$, et par conséquent $i<k$, $i'<k'$, donc deux rayons consécutifs

consécutifs partant du point lumineux et comprenant un angle i, après s'être réfléchis, comprendront un angle $k > i$, c'est-à-dire, qu'ils divergeront davantage. Réciproquement, si deux rayons convergens comprennent un angle k, ils comprendront, après s'être réfléchis, un angle $i < k$. Si au lieu de considérer une suite de rayons lumineux partant du point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, on considère une suite de rayons visuels partant de ce point, comme on aura toujours $i < k$, $i' < k'$, on aura aussi somme de $i = I <$ somme de $k = K$, somme de $i' = I' <$ somme de $k' = K'$; donc, si les deux extrémités d'une ligne O soutendent un angle K', son image sera vue sous un angle $I' < K'$, d'où on conclut *que la grandeur apparente des objets vus sur le miroir convexe est moindre que leur grandeur réelle.*

Les caustiques $(\Sigma)(\Sigma')$ étant situées au-delà du miroir convexe comme dans le miroir plan, ces objets seront vus dans le même sens que dans ce miroir, c'est-à-dire, qu'ils *conserveront la même position que s'ils étaient aperçus à la vue simple.*

Enfin, comme on a toujours $T < e$ *la clarté des différens points de l'image est toujours moindre que leur clarté réelle.*

2.° Considérons les mêmes quantités dans le miroir concave, et en premier lieu dans la zone sphérique comprise entre les limites $x' = \frac{\rho}{f}$, $x' = \frac{\rho}{2f}$.

R est renfermé entre les limites $R = \Delta$, et $R = \infty$, et R' entre les limites $R' = 0$, $R' = -\Delta \frac{1}{2f^2 - 1}$, et on a toujours $R > \Delta$ — $R' < \Delta$, R est situé au-delà du plan tangent, et R' en avant de ce plan; mais comme on a toujours $R > -R'$, la distance $\Delta' = \frac{R + R'}{2}$ sera toujours comptée dans le sens de R, et par conséquent au-delà du plan tangent, en sorte que *l'image sera située derrière le miroir.*

En second lieu, la distance Δ' étant comprise entre les limites $\Delta' = \frac{\Delta}{2}$, $\Delta' = \infty$, *la distance de l'image, après avoir été moindre que la distance de l'objet, s'éloignera à l'infini.*

Elle sera droite dans le sens des angles ik, et renversée dans le sens des angles $i'k'$, lorsque $D=\infty$.

Au-delà de la limite $x'=\frac{\rho}{2}$, les lignes R et R' étant de même signe et situées en avant du miroir, *l'image sera renversée dans les deux sens*, si $D>R$; elle continuera à être augmentée dans le sens des angles ik, jusqu'à $x'=0$, et ensuite diminuée jusqu'à $x'=-\rho$, si $D>\frac{2\Delta R}{\Delta-R}$; et elle sera toujours diminuée du tiers dans le sens des angles $i'k'$, lorsque $D=\infty$.

En faisant $D(2x'-\rho)+\Delta\rho=0$, $D-\Delta=0$, on a pour la position du foyer, $x'=-\rho$, et en substituant dans $(\sigma\sigma)$ ou $(\Sigma' ss)$ $x=-\frac{\rho}{3}$.

[16.] *(Fig. IV et V.)* Nous allons actuellement supposer le point lumineux dans l'intérieur de la sphère, en sorte que les observations suivantes ne sont relatives qu'au miroir sphérique concave. Nous ferons donc X positif, mais moindre que ζ.

La position des centres des surfaces (ss) est, comme nous l'avons vu [13.],

$$x=\frac{\rho^2 X}{2x'X+\rho^2},\qquad y=0,\qquad z=0\ldots\ldots(\sigma\sigma).$$

Cette valeur est positive pour le miroir concave qui est en avant du plan des yz, tant que $2x'X-\rho^2$ est positif. La limite de cette valeur s'obtient donc par l'équation $2x'X-\rho^2=0$, ou $x'=\frac{\rho^2}{2X}$; mais comme x' ne peut pas être plus grand que ζ, la plus grande valeur de cette limite sera $\rho=\frac{\rho^2}{2X}$, et par conséquent la moindre valeur de X, $X=\frac{\rho}{2}$. Ainsi, tant que X sera compris entre ρ et $\frac{\rho}{2}$, les centres des cônes (SS) qui appartiennent au miroir antérieur, seront positifs depuis $x'=\rho$ jusqu'à $x'=\frac{\rho}{2X}$; mais si X est moindre que $\frac{\rho}{2}$, tous ces centres seront négatifs.

1.° Supposons d'abord $X>\frac{\rho}{2}$, c'est-à-dire, $X=f\rho$, f étant un

nombre plus grand que $\frac{1}{2}$, et moindre que . 1 ., et considérons ce que deviennent, dans cette hypothèse, les équations du paragraphe [15.].

Les surfaces (SS) se coupent suivant les cercles

$$x = \frac{3x'f^2\rho^2 - f\rho^3 - 2f^2x'^2}{\rho^2 + 2f^2\rho^2 - 3x'f\rho}, \qquad y^2 + z^2 = \frac{4f^2(\rho^2 - x'^2)^2}{(\rho^2 + 2f^2 - 3x'f\rho)^2} \ldots (\Sigma' ss).$$

Or, pour le miroir antérieur au plan des yz, x est positif et égal à $\rho\frac{f}{2f-1}$ quand $x' = \rho$, il devient infini quand

$$\rho^2 + 2f^2\rho^2 - 3x'f\rho = 0, \text{ ou } x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f};$$

après cette limite, le dénominateur devenant positif, x passe subitement de l'infini positif à l'infini négatif : ce qui indique que la surface caustique (Σ') est composée de deux nappes infinies.

Le dénominateur continuant à augmenter, les cercles $(\Sigma' ss)$ se rapprocheront du plan des yz, et le dépasseront de nouveau quand le numérateur deviendra positif. Ils s'en rapprocheront ensuite pour se terminer au-delà de ce plan à la valeur négative $x' = -\rho\frac{f}{2f+1}$, qui a lieu lorsque $x' = -\rho$.

On a les valeurs des *maxima* et *minima* des valeurs de x, en différenciant l'équation $(\Sigma' ss)$ par rapport à x', et en faisant $\frac{dx'}{dx} = 0$, ce qui donne

$$2fx'^3 - x'^2\rho(1+2f^2) + f^2\rho^3 = 0,$$

équation dont les trois racines sont

$$x' = f\rho, \quad x' = \rho\frac{1+(1+8f^2)^{\frac{1}{2}}}{4f}, \quad x' = \rho\frac{1-(1+f^2)}{4f} = \ldots$$

La substitution de cette première racine dans les équations $(\Sigma' ss)$, détermine un cercle qui contient les points de rebroussement de toutes les arêtes $(\sigma'\sigma')$, et qui est un arête de rebroussement de la surface caustique (Σ').

La seconde valeur de x' est évidemment impossible, puisqu'elle donne $x' > \rho$. La troisième racine substituée dans l'équation $(\Sigma' ss)$ détermine

le cercle de la dernière nappe de la surface (Σ') le plus éloigné du plan des yz. L'équation

$$x' = \rho\frac{1 \pm (1+8f^2)^{\frac{1}{2}}}{4f} \ldots\ldots (SP),$$

qui donne celles des surfaces (SS) qui se réduisent à un plan, étant identique avec les deux dernières racines de l'équation du troisième degré que nous venons de considérer, est susceptible des mêmes observations. Ainsi, la première valeur étant impossible, il n'y a dans ce cas qu'une seule des surfaces (SS) qui se réduise à un plan perpendiculaire à l'axe des x. Les équations du cercle sur lequel les rayons se réfléchissent parallélement à l'axe des x, sont

$$x' = \frac{\rho}{2f}, \qquad y'^2 + z'^2 = \rho^2\frac{4f^2-1}{4f^2} \ldots\ldots (s),$$

et la surface cylindrique formée par ces rayons, est

$$y^2 + z^2 = \rho\frac{4f^2-1}{4f^2} \ldots\ldots (\Sigma).$$

Quant au cercle (s') dont les rayons réfléchis forment la surface conique asymptote aux deux nappes de la surface (Σ'), on aura

$$x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f}, \qquad y'^2 + z'^2 = \rho^2\frac{5f^2-1-4f^4}{9f^2} \ldots\ldots (s'),$$

et la surface conique proposée aura pour équation [13],

$$(1+7f^2-8f^4)^2(y^2+z^2) = (5f^2-1-4f^4)[(1-4f^2)x + 3f\rho]^2 \ldots\ldots (\Sigma').$$

La valeur de $y'^2 + z'^2$ de l'équation (s') n'est réelle qu'autant qu'elle est positive, en sorte qu'on aura ses limites par l'équation $5f^2 - 1 - 4f^4 = 0$; ou $f^2 = \frac{5 \pm 3}{8}$, ce qui, dans le cas que nous considérons, se réduit à $f = 1$, $f = \frac{1}{2}$; mais parmi les valeurs de f comprises dans ces limites, il y en a une qui donnera un *maximum* pour $y'^2 + z'^2$, et on l'obtient par la condition $\frac{d(y'^2+z'^2)}{df} = 0$, ce qui donne $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$; dans ce cas, la valeur de $(y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$ devient $\frac{\rho}{3}$, en sorte que pour toutes les valeurs de f, $(y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$ ne peut pas être plus grande que $\frac{\rho}{3}$.

Examinons actuellement les quantités

$$R = \frac{\Delta\rho}{2x'f-\rho}, \qquad R' = \frac{\Delta(x'f-\rho)}{\rho-2f^2\rho-3x'f},$$

dans les hypothèses $f > \frac{1}{2}$ et $f < 1$.

R et R' sont positifs et situés au-delà du plan tangent, depuis $x' = \rho$ jusqu'à $\rho + 2f^2\rho - 3x'f = 0$, ou $x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f}$, en sorte que *l'image du point lumineux est toujours située au-delà du miroir.*

(Fig. IV et V.) En second lieu, dans les mêmes limites $R > \Delta$, $R' > \Delta'$, $i > K$, $i' > K'$: donc deux rayons contigus comprenant un angle i, après s'être réfléchis, comprendront un angle $K < i$, c'est-à-dire, qu'ils divergeront moins après la réflexion. Réciproquement, si deux rayons convergens comprennent un angle k, après s'être réfléchis, ils comprendront un angle $i > k$, c'est-à-dire, qu'ils convergent davantage; et en raisonnant comme dans le paragraphe [17.], on en conclut que lorsque l'objet est situé à une distance de la surface moindre que $\frac{\rho}{2}$, *sa grandeur apparente surpasse sa grandeur réelle* dans les parties du miroir comprises entre les limites analogues à $x' = \rho$, $x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f}$.

(Fig. VI et VII.) Cette conséquence est évidente, d'après ce qui précède, lorsque les rayons qui partent des extrémités de l'objet o, convergent vers le miroir pour se réfléchir ensuite vers l'œil ω; mais on conçoit qu'il y a une position de l'œil pour laquelle ces rayons sont parallèles, et qu'enfin si l'œil s'éloigne davantage du miroir, ces rayons, pour se réfléchir vers lui, doivent diverger entre eux comme, par exemple, ceux qui partent des extrémités de l'objet o', et qui se réfléchissent vers l'œil ω' : dans ce cas, on conclut, *à fortiori*, que l'image O' de l'objet sera plus grande que l'objet o' lui-même. Les lignes R et R' étant situées, ainsi que les caustiques, au-delà du plan tangent, comme dans le miroir plan, l'image ne sera pas renversée. Enfin,

$$T = e\frac{(D+\Delta)^2\rho(x'f-\rho)}{[D(2x'f-\rho)+\Delta\rho][D(\rho+2f^2\rho-3x'f)+\Delta(x'f-\rho)]}$$

donnant constamment, dans les mêmes limites, $T > e$, *la clarté* de l'image

sera toujours plus forte que celle de l'objet, ce qui contribue à diminuer la distance apparente ou à augmenter la grandeur apparente.

(Fig. IV et V.) A la limite $x' = \rho\frac{1+2f^2}{3f}$, R' passe de l'infini positif à l'infini négatif; mais on a encore $-i' > k'$, jusqu'à la limite $x' = f\rho$, qui donne $R' = \Delta$, $-i' = k'$: donc entre ces limites, pour l'œil situé au point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, l'*image de l'objet est augmentée, mais renversée dans le sens des angles i'k'*, si $D > R'$.

Quant à R, il ne change pas de signe entre ces limites, et on a toujours $R > \Delta$, $i > k$, en sorte que l'*image continue à être augmentée et droite dans le sens des angles ik*, c'est-à-dire, dans le sens perpendiculaire au plan qui passe par l'axe des x.

(Fig. IV.) Si $f > \frac{1}{2f}$, c'est-à-dire, si $f > \frac{1}{\sqrt{2}}$, comme entre les limites $x' = f\rho$, $x' = \frac{\rho}{2f}$, R est positif et situé derrière le plan tangent, $R > \Delta$, $i > K$, R' négatif et situé en avant du plan tangent $-R' < \Delta$, $-i' < k'$, l'*objet paraîtra augmenté et droit dans le sens des angles ik, et diminué et renversé dans le sens des angles i'k'*, si $D > \frac{2\Delta R'}{\Delta - R'}$.

A la limite $x' = \frac{\rho}{2f}$, K passe subitement de l'infini positif à l'infini négatif; mais on a encore $-R > \Delta$, $-i > k$, jusqu'à $x = 0$, qui donne $R = -\Delta$. Ainsi, dans ces limites, l'*objet paraîtra augmenté et renversé dans le sens des angles ik, diminué et renversé dans le sens des angles i'k'*. Si, au contraire, $f < \frac{1}{2f}$ ou $f < \frac{1}{\sqrt{2}}$, comme entre les limites $x' = \frac{\rho}{2f}$, $x' = \frac{1}{f\rho}$, R est négatif $-R > \Delta$, $-i' > k$, R' négatif $-R' > \Delta$, $-i' > k'$, l'*image sera augmentée et renversée dans les deux sens*, si $D > R$.

Après la limite $x' = f\rho$, R est négatif $-R > \Delta$, $-i > k$, jusqu'à $x' = 0$, qui donne $R = -\Delta$, $-i = k$; R' est négatif $-R' < \Delta$, $-i < k'$. Dans ces limites, l'*objet paraîtra augmenté et renversé dans le sens des angles ik*, si $D > R$, *diminué et renversé dans le sens des angles i'k'*, si $D > \frac{2\Delta R'}{\Delta - R'}$.

Quant

Quant au second miroir concave compris entre les limites $x' = o$, $x' = -\rho$, comme on a constamment R et R' négatifs et situés en avant du plan tangent, et de plus, $-R < \Delta$, $-i < K$, $-R' < \Delta$, $-i' < K'$, *l'image sera toujours renversée et diminuée dans les deux dimensions, tant que* $D > \frac{2\Delta R}{\Delta - R}$ et $> \frac{2\Delta R'}{\Delta - R'}$.

Si, comme dans les cas précédens, on substitue les valeurs $x' = \pm\rho$ dans les équations $(\sigma\sigma)$ ou $(\Sigma' ss)$, on a pour les positions des foyers,

$$x = \rho \frac{f}{\pm 2f - 1}.$$

Le signe supérieur donne toujours $x > \rho$, et le signe inférieur, $-x < \rho$.

[17.] *(Fig. VIII.)* Si le point lumineux est à la distance $X = \frac{\rho}{2}$, on aura, en substituant pour f sa valeur $\frac{1}{2}$ dans les équations du paragraphe [14.],

$$[2(\rho - x')x' + \rho^2]^2 (y^2 + z^2) = (\rho^2 - x'^2)[2(\rho - x')x + \rho^2]^2 \ldots\ldots (SS),$$

$$x = \frac{\rho^2}{2(x' - \rho)}, \qquad y = o, \qquad z = o \ldots\ldots (\sigma\sigma),$$

$$x = \frac{3x'\rho^2 - 2\rho^3 - 2x'^3}{6\rho(\rho - x')}, \quad y^2 + z^2 = \frac{(\rho^2 - x'^2)(\rho + x')^2}{9\rho^2} \ldots (\Sigma' ss),$$

$$x = \rho \frac{1 \pm (3)^{\frac{1}{2}}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (SP),$$

$$x' = \rho \qquad y'^2 + z'^2 = o \ldots\ldots\ldots\ldots (s)(s'),$$

$$R = \frac{\Delta\rho}{x' - \rho}, \qquad R' = \frac{\Delta(x' - 2\rho)}{3(\rho - x')},$$

$$T = e \frac{(D + \Delta)^2 \rho (x' - 2\rho)}{[D(x' - \rho) + \Delta\rho][3D(\rho - x') + \Delta(x' - 2\rho)]}.$$

On peut remarquer particulièrement que les valeurs de x, dans les équations $(\sigma\sigma)(\Sigma' s)$, sont toutes négatives et comprises entre $x = -\infty$ et $x = -\frac{\rho}{4}$, et l'on fera sur les autres équations, des observations analogues à celles du paragraphe précédent.

(Fig. IX.) Soit encore $X = \frac{\rho}{4}$, $f = \frac{1}{4}$, on aura

$$[(4\rho - 2x')x' + \rho^2]^2(y^2 + z^2) = (\rho^2 - x'^2)[(4\rho - 2x')x + \rho^2]^2 \ldots (SS),$$

$$x = \frac{\rho^2}{2x' - 4\rho}, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots (\sigma\sigma),$$

$$x = \frac{3x'\rho^2 - 4\rho^3 - 2x'^3}{6\rho(3\rho - 2x')}, \qquad y^2 + z^2 = \frac{(\rho^2 - x'^2)^3}{9\rho^2(3\rho - 2x')^2} \ldots (\Sigma' ss),$$

$$x = \rho\left[1 \pm \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (SP),$$

$$x' = 2\rho, \qquad y'^2 + z'^2 = -3\rho^2 \ldots (s),$$

$$x' = \frac{3}{2}\rho, \qquad y'^2 + z'^2 = -\frac{5}{4}\rho^2 \ldots (s'),$$

$$R = \frac{2\Delta\rho}{x' - 2\rho} \qquad R' = \frac{2\Delta(x' - 4\rho)}{9\rho - 6x'},$$

$$T = e\,\frac{(D + \Delta)^2 4\rho(x' - 4\rho)}{[D(x' - 2\rho) + 2\Delta\rho][D(9\rho - 6x') + 2\Delta(x' - 4\rho)]}.$$

Si enfin $X = 0$, $f = 0$,

$$x'^2(y^2 + z^2) = (\rho^2 - x'^2)x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (SS),$$

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots (\sigma\sigma)(\Sigma'),$$

$$x = \rho\,\frac{1 \pm 1}{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (SP),$$

$$x' = \infty, \qquad y'^2 + z'^2 = -\infty \ldots (s)\,(s'),$$

$$R = -\Delta, \qquad R' = -\Delta, \qquad T = e.$$

[19.] L'œil placé en un point $x = X'$, $y = Y'$, $z = Z'$, peut apercevoir sur le miroir $Fx'y'z' = 0$, plusieurs images du point lumineux. En effet, l'équation du rayon réfléchi étant

$$m(z - z') = o(x - x'), \qquad n(z - z') = o(y - y'),$$

on exprime que ce rayon passe par l'œil par la condition

$$m(Z' - z') = o(X' - x'), \qquad n(Z' - z') = o(Y' - y').$$

Or si, au moyen de ces deux équations et de celle du miroir $Fx'y'z'$, on détermine les coordonnées $x'y'z'$ du point de la surface qui correspond

à l'image du point lumineux, on obtiendra autant de résultats qu'il y aura de valeurs réelles de $x'y'z'$; en sorte que si ces équations donnent quatre valeurs réelles pour $x'y'z'$, le point lumineux pourra être aperçu par l'œil sur quatre points différens, et ainsi de suite, si ce résultat a un nombre de racines réelles plus grand ou moindre.

[20.] Si on veut déterminer sur le miroir $Fx'y'z' = 0$, la figure suivant laquelle sera vue par l'œil, situé au point $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, une courbe $x = fz$, $y = fz$, on éliminera xyz entre les quatre équations

$$m(z-z') = o(x-x'), \quad n(z-z') = o(y-y'), \quad x = fz, \quad y = fz.$$

Le résultat $R = 0$ en $x'y'z'$ sera l'équation d'une surface qui coupera le miroir $Fx'y'z' = 0$ suivant la courbe cherchée; en sorte qu'en éliminant alternativement $x'y'z'$ entre ces deux équations, on aura les projections de cette courbe sur les trois plans de coordonnées.

Si c'est une surface courbe $\Pi = 0$, $d\Pi = \pi dx + \pi' dy + \pi'' dz = 0$ dont on veut déterminer le contour apparent sur le miroir $Fx'y'z' = 0$, on éliminera xyz entre les quatre équations

$$m(z-z') = o(x-x'), \quad n(z-z') = o(y-y'), \quad \Pi = 0, (x-x')\pi + (y-y')\pi' + (z-z')\pi'' = 0;$$

le résultat $R = 0$ en $x'y'z'$, sera l'équation d'une surface qui coupera le miroir $Fx'y'z' = 0$ suivant la courbe cherchée.

Ces résultats servent à déterminer la forme des images, modifiée par la courbure du miroir. Ils peuvent aussi servir à déterminer la forme que doit avoir le miroir pour que l'image d'un corps donné se présente, après la réflexion, sous une forme donnée.

En effet, supposons toujours l'œil placé au point $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, l'image sous laquelle l'objet doit être vu étant donnée, on enveloppera son contour d'une surface conique ayant son centre au point $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, et dont l'équation sera par conséquent $\Phi\left(\frac{z'-Z}{x'-X}, \frac{z'-Z}{y'-Y}\right) = 0$, Φ étant une fonction donnée.

Or si on combine cette équation avec $R = 0$, on obtiendra en $x'y'z'$, la valeur de $\frac{p}{r}$ et celle de $\frac{q}{r}$ qu'on substituera dans $pdx' + qdy' + rdz' = 0$, et l'intégrale de cette dernière sera l'équation cherchée du miroir $Fx'y'z' = 0$.

Nous avons supposé jusqu'à présent, que R et R' étant du même côté du miroir, la distance Δ' [14.] de l'image du point lumineux au point $x'y'z'$ était $\frac{R+R'}{2}$: nous observerons ici qu'on n'a $\Delta' = \frac{R+R'}{2}$ que lorsque $R - R'$ est une très-petite quantité par rapport à $D + R'$, condition qui est d'ailleurs nécessaire pour que l'image soit distincte; en effet, nous verrons, en traitant de la dioptrique, que le terme qui exprime la netteté de l'image est de la forme $\frac{[\mu(D+R')+\sqrt{(R-R')}]^2}{(R-R')^2}$, en sorte que plus $R - R'$ est petit, plus ce terme approche de l'infini, et plus la vision est près d'être parfaitement distincte, ce qui est en général le cas qu'il importe le plus de considérer. Nous déterminerons cependant par la suite la valeur exacte de Δ'; mais comme ce calcul exige des considérations qui dépendent de la structure de l'œil et de la théorie des réfractions, nous l'avons remis à la seconde partie de ce Mémoire.

Après avoir exposé la théorie de la dioptrique, nous appliquerons les résultats de notre analyse à la construction des instrumens d'optique.

ESSAI

Sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré.

Par M. DUPIN, Officier du Génie maritime, ancien Élève de l'École polytechnique.

AVERTISSEMENT.

M. *Dupin* se trouvait chargé d'un service militaire très-pénible, ajouté aux autres devoirs de son état, lorsqu'il composa cet essai; il n'a pu le corriger ensuite qu'au milieu d'un voyage de quatre cents lieues. On ne doit donc chercher, dans son Mémoire, ni cet ordre de choses qui fait naître l'intérêt, ni la correction et la clarté qu'on est en droit d'exiger des écrits de ce genre : les géomètres jugeront si les pensées en elles-mêmes méritent l'indulgence ou l'oubli. *(Anvers, ventôse an 13.)*

LE cercle et la sphère sont les plus faciles à décrire des lignes et des surfaces courbes, aussi sont-ils dans les arts d'un usage plus étendu que toutes les autres, et cela doit être en effet; car, en général, ce qui rend fréquent l'usage d'une ligne ou d'une surface, c'est la facilité de sa description; cela est vrai, sur-tout lorsque, comme il arrive le plus souvent, on n'a d'autre loi à suivre que celle de continuité; toutes les formes sont alors à-peu-près indifférentes pourvu qu'elles soient régulières; et le cercle, la sphère, dont la courbure est par-tout uniforme, dont la description est, comme nous venons de le dire, extrêmement simple, se trouvent ainsi réunir tous les avantages qui ont dû les faire préférer.

Les lignes et les surfaces les plus faciles à produire après celles-là, sont ensuite, et par cette raison, les plus fréquemment employées : telles sont toutes les courbes du second degré, et quelques-unes des surfaces du même ordre, celles comme les surfaces de révolution, pour lesquelles on possède des moyens de description; si ces moyens s'étendaient à toutes les surfaces du second degré, elles deviendraient toutes de la même utilité, elles offriraient un plus grand nombre de

formes aux produits des arts, qui par-là plus variés, pourraient être aussi plus appropriés aux usages particuliers auxquels ils sont destinés, sans rien ôter pour cela à l'élégance et à la simplicité de leurs formes.

Il nous a semblé que toutes les lignes et les surfaces du second degré devaient être produites par un même mode de génération, qui, analogue à celui de la sphère, réunît une partie de ses avantages; nous avons cru qu'il pouvait être utile d'attirer l'attention sur cette méthode, et sa simplicité nous a déterminé à l'exposer.

La méthode de décrire les sections coniques au moyen des foyers et des rayons vecteurs ne peut s'appliquer à la configuration des surfaces du second degré que dans quelques cas fort rares, comme dans la description de la sphère et de la surface de révolution; dans tous les autres, elle devient illusoire et ne peut être employée, les foyers variant alors de position à-la-fois avec la grandeur des axes et des rayons vecteurs de chaque courbe du second ordre que l'on considère sur la surface qu'on veut décrire.

Il en est une autre qui, convenablement modifiée, peut également servir dans tous les cas; elle semble réunir la simplicité à la facilité de la description; elle a même sur la première cet avantage, que les lignes génératrices ne varient pas de longueur comme le font les rayons vecteurs dans la précédente : nous allons d'abord l'exposer pour les lignes du second ordre, le plus brièvement qu'il nous sera possible, nous l'appliquerons ensuite aux surfaces du même genre.

On sait que si on conçoit une droite mobile, dont les extrémités soient toujours placées sur les axes d'une section conique, et qui ait pour longueur celle du grand axe, et qu'à partir d'une de ces extrémités, on prenne sur elle une distance égale au petit axe, le point qui termine cette distance, décrira la section conique dans le mouvement de la droite qui le contient.

(Fig. I.re) Ainsi, si $da = CA$, $db = CB$, le point d parcourra la section conique AdB quand les point a, b parcourront les axes CB, CA.

Maintenant si on mène du point d la ligne $db' = db$, da' sera toujours égal à da; da' sera donc constamment égal au grand, et $b'd$ au petit axe.

Ainsi une même section conique pourra toujours être décrite de deux manières différentes par un point placé sur une droite mobile, qui, constante de grandeur, ait ses extrémités toujours sur les axes de cette ligne du second degré, et *distantes entre elles de la somme des axes ou de leur différence, et distantes du point générateur de quantités égales au grand et au petit axe.*

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'éclaircir une difficulté assez singulière.

Puisque la méthode que nous exposons ici est générale, elle doit convenir à toutes les courbes du deuxième ordre; une méthode n'est jamais vraie pour une espèce de courbe, sans l'être aussi (plus ou moins modifiée) pour les autres espèces du genre dont elle fait partie; cependant la méthode que nous venons de donner n'est applicable qu'à l'ellipse, elle n'est déjà plus exécutable pour la parabole, elle semble impossible pour l'hyperbole.

Cette difficulté tient à la théorie des quantités imaginaires; d'après cette théorie, on va voir que la méthode a lieu encore, mais qu'elle a cessé d'être graphique par la complication des quantités qui sont devenues imaginaires.

(Fig. I.re) Soient $\begin{cases} x = CP \\ y = Pd \end{cases}$ les coordonnées de la courbe parcourue par le point générateur.

$\begin{cases} a = da \\ b = db \end{cases}$ les arcs de cette courbe.

Cette courbe devant être une hyperbole dans le cas que nous nous proposons d'examiner, l'un des axes est nécessairement imaginaire.

Donc..... $\begin{cases} a = \ldots . da \\ b\sqrt{-1} = db \end{cases}$ sont les axes de cette hyperbole,

et on aura, parce que Pdb, Qda $\begin{cases} \text{sont rectangles,} \\ \text{sont semblables,} \end{cases}$ $\begin{cases} Qa^2 = ad^2 - Qd^2 = a^2 - x^2, \\ Pd^2 = \dfrac{db^2}{da^2} \cdot Qa^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2). \end{cases}$

Ainsi l'hyperbole est encore décrite par le même procédé que l'ellipse; mais le point générateur réel étant sur une droite imaginaire, le procédé, ainsi que nous l'avons déjà dit, cesse d'être graphique, sans pour cela cesser d'exister.

On fera sans doute quelque difficulté de voir prendre à-la-fois sur une même droite, des lignes et des points réels et imaginaires. Essayons d'éclaircir cette espèce de paradoxe.

L'équation de la droite bda est $Y - Ca = -\frac{Ca}{Cb} X$, XY étant les coordonnées courantes de la droite.

Or $\begin{cases} Ca = \frac{a+b\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} \cdot y \\ Cb = \frac{a+b\sqrt{-1}}{a} \cdot x \end{cases}$ Donc $Y - \frac{a+b\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} y = -\frac{a}{b\sqrt{-1}} \cdot \frac{y}{x} \cdot X$ est aussi l'équation de bda,

en faisant $\begin{cases} X = 0 \ldots Y = \frac{a+b\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} \cdot y = Ca \\ Y = 0, \ldots X = \frac{a+b\sqrt{-1}}{a} x = Cb \end{cases}$, ce qui doit être.

En faisant $X = x$, $Y = y$, l'équation devient identique et se satisfait d'elle-même.

On en doit maintenant voir clairement la raison; X et Y sont, comme toutes les autres quantités imaginaires, de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. En faisant $X = x$, $Y = y$, β devient nul, et x, y restant par conséquent réels, quoique coordonnées d'un point placé sur une droite dont les autres points sont imaginaires (c'est-à-dire, ont leurs coordonnées imaginaires).

La méthode que nous venons d'exposer peut être beaucoup généralisée. Premièrement il n'est pas nécessaire que les axes soient rectangulaires entre eux; ils peuvent former un angle quelconque : alors la courbe changera de forme et de position, mais sans cesser pour cela d'être du second ordre; elle aura toujours son centre à l'intersection des droites directrices.

(Fig. II.)

(Fig. II.) Soit une ligne invariable ab, dont les extrémités parcourent les droites CA, CB, qui forment entre elles un angle quelconque, mais constant, aCb, et proposons-nous de découvrir la nature de la courbe que parcourent chacun de ses points d; il est évident que les droites XCX_0, YCY_0, étant symétriques par rapport au point C, la courbe demandée le sera aussi : donc cette courbe a un centre en C.

A chaque point a de l'une des directrices CY, par exemple, il correspondra évidemment deux positions de la droite mobile ab, ae, également inclinées sur l'autre directrice CX, et la distance du point générateur d à cette droite sera la même dans chacune de ces positions.

Donc en menant $am\varepsilon$ perpendiculaire à CX, cette droite le sera également à $d\delta$, et am, $m\varepsilon$ seront entre eux dans le rapport de ad à ab. Or ad et bd sont constantes : donc am et $m\varepsilon$ seront toujours dans le même rapport; donc tous les points m, m'..., milieu des cordes de la courbe cherchée, parallèles à l'un des axes, sont en ligne droite avec le centre C.

Donc chaque directrice CX, CY est un diamètre de cette courbe; or elle a un centre en C; donc elle a deux systèmes de diamètres conjugués, et composés chacun d'une des directrices CX... et de la droite Cmm' qui lui correspond. On trouvera cette droite en menant du point a une perpendiculaire à CY.

μ étant alors la position du point générateur, μ_0 sera ce diamètre.

Au lieu de supposer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, abd mobile, et Ca, Cb fixes dans l'espace, rendons, au contraire, abd fixe, et Ca, Cb mobiles, mais toujours conservant entre elles le même angle aCb.

(Fig. III.) Dans cette hypothèse, le point C décrira la circonférence d'un cercle $ABCC'$ capable de l'angle ACB, dont ce point est le sommet.

Si, pour chaque position du sommet C sur la circonférence $ABC'C$, nous menions les droites CA, CB, CD aux points A, B et au point générateur D, on aurait évidemment la courbe décrite par ce point dans le premier cas (de ab mobile), en menant Cd telle que

l'angle $XCd = ACD$, et en formant les distances CA, CB, CD sur les droites CX, CY, cd.

(Fig. V.) Donc si on trace $\left\{\begin{matrix} Cd \\ C\delta \end{matrix}\right\}$ telles que $\left\{\begin{matrix} ACD = XCd, & CD = Cd, \\ A\gamma D = XC\delta, & \gamma D = C\delta. \end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix} Cd \\ C\delta \end{matrix}\right\}$ seront $\left\{\begin{matrix} \text{la plus grande} \\ \text{la plus petite} \end{matrix}\right\}$ des lignes menées du point C à la courbe cherchée, et par conséquent normales à cette même courbe; et ces normales seront rectangulaires entre elles.

Si on les prolonge par leur extrémité C de quantités Cd_0, $C\delta_0$ qui soient égales,

Les lignes Cd, $C\delta$ seront pareillement normales à la courbe cherchée, puisque C est le centre de cette courbe.

Poursuivons, et menons deux droites quelconques $\gamma' DC'$, $\gamma'' DC''$, qui fassent le même angle avec le diamètre γDC; les arcs $\gamma'\gamma$, $\gamma''\gamma$ seront égaux, et les angles $AC''\gamma''$, $AC\gamma$, $AC'\gamma'$ seront par conséquent équi-différens, puisque leurs mesures $\frac{A\gamma+\gamma\gamma''}{2}$, $\frac{A\gamma}{2}$, $\frac{A\gamma-\gamma\gamma'}{2}$ le sont.

Pour revenir maintenant de l'hypothèse d'après laquelle nous raisonnons au premier état de la question, menons les droites cd', cd'', égales à $C'D$, $C''D$, telles que $AC'D = XCd'$, $AC''D = XCd''$, les points d', d'' appartiendront à la courbe cherchée; mais $CD = Cd$, $ACD = XCd$: donc aussi XCd', XCd, XCd'' sont équi-différens; donc la courbe est symétrique par rapport à chacune des droites cd, $c\delta$...; donc la courbe demandée a pour axes celles des normales qui passent par son centre; donc les axes de cette courbe se croisent à angles droits.

(Fig. VI.) Nous venons de dire que, pour tracer la courbe engendrée par le point D, il faut *(fig. III.)* mener par le point D toutes les cordes possibles $C'D\gamma'$, $C''D\gamma''$, &c., et sur les droites $C\gamma'$, $C\gamma''$, menées du point C aux extrémités de ces cordes, prendre les parties Cd', Cd'', égales à $C'D$, $C''D$; les points d', d''... seront ceux de la courbe cherchée, rapportés sur la *fig. III.*

(Fig. III.) Les droites AB, AC, BC ont disparu dans cette description; le point D seul est resté. Si donc un autre angle $\alpha C\beta$ et une autre corde $\alpha\beta$ eussent été proposés, le triangle $\alpha C\beta$ restant toujours inscrit au même cercle ABC, la courbe parcourue par le point D de la droite mobile $\alpha\beta$, dont les extrémités restent sur $C\alpha$, $C\beta$, aurait été la même que dans le cas précédent.

Si AB devenait $CD\gamma$, l'angle $\alpha C\beta$ deviendrait droit, et la courbe parcourue n'aurait pas encore changé; mais nous avons vu qu'elle est alors une ligne du second ordre : donc dans chacune des générations que nous venons d'indiquer, la courbe parcourue est du second degré.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, nous n'avons assigné sur la droite mobile aucune position particulière au point générateur D, et il est facile de voir que tous les raisonnemens dont nous nous sommes servis s'appliquent également aux deux cas où le point se trouve entre les deux points A, B, ou sur le prolongement de la droite qui les joint; seulement le diamètre qui passe par ce point est la somme ou la différence des deux axes, suivant qu'on raisonne d'après le premier ou le second de ces cas.

En résumant les diverses propriétés que nous venons d'exposer, on parvient à ce théorème général.

Si, à partir du centre d'une section conique quelconque, on porte sur le grand axe une droite égale à la somme des deux axes, et qu'on conçoive le cercle dont cette droite est le diamètre, chacune des cordes menées par le sommet de la courbe placée sur ce diamètre, et les droites menées de l'extrémité de cette corde au centre de la courbe, on pourra regarder ces dernières *comme* directrices, la corde *comme* droite mobile, et le point commun à toutes ces cordes *comme* point générateur : on formera ainsi une infinité de systèmes de génération qui, tous ensemble, donneront la même section conique, celle qui a servi à produire chacun d'eux dans tous ces systèmes de génération où le point descripteur est entre les points directeurs.

Si, à partir du centre d'une section conique quelconque, on porte sur le petit axe une droite égale à la différence des deux axes, qu'on la regarde comme le diamètre d'un cercle, chacune des sécantes menées de l'extrémité du petit axe le plus loin du cercle, pourra être regardée *comme* droite mobile; le point qui leur est commun à toutes *comme* point générateur; les droites menées du centre aux extrémités de cette droite *comme* directrices; et on formera encore une infinité de systèmes de génération très-différens des premiers, et dont chacun donnera cependant encore la même courbe du second ordre que les premiers. Dans les seconds systèmes de génération, le point descripteur est en dehors des points directeurs.

Nous avons vu que chaque directrice fournissait à la courbe à laquelle elle appartient un système de diamètres conjugués; les courbes du second ordre ont donc *une infinité* de systèmes de diamètres conjugués, puisqu'on peut, pour une même courbe, déterminer *une infinité* de systèmes.

Et comme il n'est aucune droite menée par le centre de la courbe qui ne puisse être considérée comme une de ses directrices, il n'est pareillement aucune de ces droites qu'on ne puisse regarder comme un des diamètres de la courbe appartenant à un système de diamètres conjugués.

Il sera fort facile de trouver ce dernier diamètre, si, dans la *fig. III*, on mène le diamètre AOC''' par le point A, et qu'on mène BC''', DC''': DC''' sera le diamètre conjugué à BC''', car ABC''' sera droit; condition suffisante, comme nous l'avons prouvé.

$$\text{Or}\ldots BC'''^2 + (BD + AD)^2 = AC'''^2 = (DC + D\gamma''')^2 = C\gamma^2,$$
$$\text{Ou}\ldots BC'''^2 + BD^2 + AD^2 + 2BD.AD = DC^2 + D\gamma^2 + 2DC.D\gamma;$$
$$\text{Mais}\ldots BC'''^2 + BD^2 = DC'''^2 \qquad BD.AD = DC.D\gamma.$$
$$\text{Donc}.\ DC'''^2 + AD^2 = DC^2 + D\gamma^2.$$

Donc la *somme* des quarrés de deux diamètres conjugués d'une section conique est égale à la *somme* des quarrés de ses axes.

Il est évident que pour toutes les cordes $CD\gamma$, ADB, parties du

point D; $DA.DB = DC.D\gamma$; donc le produit des directrices DA, DB du même système est égal au produit des deux axes DC, $D\gamma$.

De plus, $DB = DC'''$ × sinus $DC'''B$; mais $DC'''B =$ l'angle que forment les diamètres DC''', BC''' et $AD \times DC'''$ sin. $DC'''B = DC \times D\gamma$; c'est-à-dire, que le *produit* des axes d'une section conique est égal au *produit* de deux quelconques de ses diamètres conjugués multiplié par le sinus de l'angle qu'ils forment entre eux.

On pourrait, en poursuivant ces considérations, démontrer successivement toutes les propriétés connues des sections coniques, en partant toujours, comme nous venons de le faire, de la génération qui fait le sujet de cet essai; mais ce travail, qui présente plus de longueurs que de difficultés, deviendrait fastidieux à exposer ici dans tous ses détails : nous sortirions d'ailleurs de la route que nous nous sommes tracée; car notre but a bien plus été de donner un moyen général de description pour les lignes et les surfaces du second degré, et d'indiquer combien est simple et naturelle la conséquence des méthodes qui en résultent, aux diverses propriétés de ces lignes et de ces surfaces, que de le prouver en démontrant successivement toutes ces propriétés.

Jusqu'ici nous avons supposé que les directrices étaient placées dans un même plan; mais cette condition n'est pas nécessaire, la position de cette droite dans l'espace peut être quelconque; les courbes décrites par chacun des points de la droite mobile qui s'appuie sur les directrices, ne cesseront pas d'être planes et du second ordre.

En effet, lorsqu'une droite de grandeur constante se meut dans l'espace de manière à s'appuyer par ses extrémités sur deux droites quelconques qui ne se coupent pas dans le mouvement de cette ligne, chacun de ses points reste toujours à la même distance d'un plan quelconque parallèle à-la-fois aux deux autres lignes; donc la courbe que chacun d'eux parcourt est dans un plan parallèle à celui-ci.

Tous les points de la droite mobile projetés sur ce plan, conservent sans cesse entre eux la même distance, et la conserveront aussi par rapport aux extrémités de cette droite, qui, par conséquent, sera

Il serait facile, d'après tout ce que nous avons dit, de donner la démonstration de ce théorème; mais cela nous rejetterait trop loin, et pourrait peut-être devenir ennuyeux par trop de longueur.

Jetons maintenant un coup d'œil rapide sur la marche que nous avons suivie jusqu'ici, en partant d'un moyen particulier de description; nous en avons successivement varié tous les élémens, et nous sommes ainsi parvenus au résultat le plus général.

Dans un même plan, deux droites directrices indéfinies, se coupent à angles droits; une troisième droite mobile, terminée, s'appuie sur les premières par ses extrémités : elle se meut, et chacun de ses points décrit une courbe du second ordre. L'angle des directrices est supposé droit; mais cet angle peut être quelconque. Ces droites se coupent; leur position peut être arbitraire. Le point générateur est sur la droite mobile: il peut n'y pas être; et dans tous ces cas, la courbe tracée par le point générateur est toujours plane et du second ordre : elle a toujours son centre sur la droite, à-la-fois perpendiculaire aux deux directrices, &c. Il est difficile de connaître la nature de cette courbe, formée par une droite mobile et deux fixes; la droite mobile devient fixe avec le point générateur; les directrices deviennent mobiles avec le centre de la courbe; et ce seul artifice donne, avec leur mode de génération, toute la théorie des lignes du second ordre. Voilà la méthode de la géométrie descriptive.

Mais sans nous borner à ces premières considérations, poursuivons et cherchons à les étendre aux surfaces du second degré; il suffit pour cela de rendre mobile une des deux directrices, jusqu'ici supposées fixes.

Lorsqu'une droite mobile s'appuie par ses extrémités sur deux droites directrices qui se coupent, nous avons prouvé que chacun de ses points décrit une courbe du second ordre, dont le centre est à l'intersection des directrices.

Si on suppose qu'une de ces directrices se meuve de manière à rencontrer toujours l'autre au même point, et à parcourir un plan déterminé quelconque, à chaque position de la première directrice correspondra une

une courbe du second ordre, parcourue par un même point de la droite mobile.

Toutes ces courbes seront concentriques, puisque l'intersection des directrices est toujours restée la même : leur système forme évidemment une surface; donc cette surface a *un centre :* c'est le centre commun à toutes les courbes qui la composent, et par conséquent l'intersection du plan parcouru par la directrice mobile avec l'autre directrice (plan que, pour plus d'abréviation, nous nommerons *plan directeur*).

Le système de toutes les droites possibles qui, dans un même plan, coupent une droite qui n'est pas sur ce plan, est évidemment symétrique par rapport au plan de projection de cette droite sur le premier plan.

Donc le système des directrices mobiles, et par conséquent aussi le système des courbes que chacune d'elles produit, c'est-à-dire, les surfaces engendrées par chaque point de la droite mobile, sont symétriques par rapport au plan qui projette la directrice fixe sur le plan directeur.

Mais lorsqu'une surface est symétrique par rapport à un plan, les normales de leur courbe d'intersection sont aussi normales à la surface.

Or nous avons vu que cette trace, qui est ici du second ordre, a pour axes deux de ses normales qui se croisent à son centre à angle droit.

Donc, premièrement, la surface que nous considérons a deux de ses normales qui passent par son centre en se croisant à angle droit dans le plan qui projette la directrice fixe sur le plan directeur.

Si à ce premier plan qui projette la directrice sur le second, nous menons par le centre une perpendiculaire, elle sera dans le plan directeur, en la regardant comme une des positions de la droite mobile; le point de la surface où se trouvera alors le point générateur, sera de tous le plus distant du premier plan : cela est évident.

Donc la droite mobile qui mesure cette distance, est normale à-la-fois à ce plan et à la surface.

Or une droite perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan.

Donc la droite que nous venons de démontrer être normale à la

surface, est perpendiculaire aux deux premières normales à cette surface, puisque nous avons prouvé qu'elles étaient dans le plan qui projette la directrice mobile sur le plan directeur, et qu'elles passent par le centre comme la troisième.

Donc enfin la surface que nous examinons jouit de cette propriété, que trois de ses normales viennent se couper à *angles droits* à son centre.

Elles sont évidemment telles que le plan tangent à la surface, mené par l'extrémité de l'une d'elles, est parallèle au plan des deux autres.

Nous prouverons bientôt, par d'autres considérations, que la surface qui nous occupe a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, et que ce qui caractérise chacun d'eux, c'est que le plan tangent à la surface, à l'extrémité de l'une d'elles, est parallèle au plan des deux autres.

On peut donc déjà prévoir que cette surface a toujours un système de diamètres conjugués, rectangulaires entre eux, c'est-à-dire, qu'elle a trois axes principaux, rectangulaires entre eux, et que la surface est symétrique par rapport à chacune de ces normales; mais le plan et la droite directrice ne sont symétriques qu'à la troisième normale qui est dans l'un, et perpendiculaire à l'autre. Donc il existe un autre système de génération, symétriquement placé avec le premier, par rapport aux deux premiers axes; système qu'on déterminera évidemment en plaçant la génératrice et le plan directeur dans les angles des normales *où ils ne sont pas*, sans changer d'ailleurs leur inclinaison sur ces normales.

Nous savons, sans tracer une courbe du second ordre, déterminer ses axes par la seule connaissance de ses directrices et de la droite mobile qui l'engendre; nous déterminerons donc facilement les axes de la courbe qui est dans le plan perpendiculaire au plan directeur, et qui passe par la directrice fixe, et par conséquent aussi les trois axes de la surface qui fait l'objet de cette discussion.

Pour découvrir la nature de la surface que décrit chaque point d'une droite mobile dont les extrémités s'appuient sur une droite directrice et au plan donné, nous avons d'abord considéré tous les points du plan comme formant une infinité de lignes droites (soumises à une certaine

loi); en regardant ces droites comme autant de secondes directrices, chacune d'elles, avec la première, a produit sur la surface une courbe du second ordre, et la comparaison de toutes ces courbes nous a donné plusieurs propriétés de la surface qu'elles forment entre elles. Nous allons suivre maintenant une marche inverse, mais analogue; et cessant de regarder le plan *directeur* comme le système d'une infinité de droites qui en comprennent tous les points, nous le regarderons comme une surface unique, et nous décomposerons, au contraire, la droite directrice fixe en l'infinité de points qui la composent; chacun d'eux va, avec le point et la droite mobile, fournir une nouvelle courbe sur la surface; et la comparaison de ces courbes jettera encore un nouveau jour sur la nature de la surface que nous cherchons à analyser.

Lorsqu'une droite de grandeur constante est fixée par une de ses extrémités à un point quelconque, l'autre devant être sans cesse dans un même plan directeur, chaque point de cette droite mobile décrit un cercle dans un plan parallèle au plan directeur.

Tous ces cercles ont leur centre sur une perpendiculaire au plan directeur; partie de l'extrémité fixe de la droite mobile et les parties de cette perpendiculaire interceptées par le cercle, sont proportionnelles aux parties de la droite mobile interceptée par le point générateur.

Si donc on suppose que l'extrémité fixe de la droite mobile se meuve en ligne droite (directrice), le cercle décrit par le même point générateur variera alors de grandeur et de position; mais son plan et la perpendiculaire qui contient son centre, resteront toujours parallèles à eux-mêmes: la perpendiculaire décrira le plan qui projette la directrice sur le plan directeur, et le centre, toujours placé sur cette perpendiculaire à des hauteurs proportionnelles, décrira une ligne droite dans le plan des perpendiculaires.

Ainsi la surface que nous considérons jouit de cette propriété remarquable, que toutes les sections parallèles au plan directeur sont des cercles dont la suite des centres forme une ligne droite.

Cette ligne droite étant dans le plan qui projette la directrice sur

le plan directeur, est par conséquent dans le plan des normales *axes* de la surface qui sont hors du plan directeur, puisque ces normales sont aussi dans le plan de projection de la *directrice;* quand la droite mobile est perpendiculaire au plan directeur, le cercle décrit par le point directeur devient alors un point, et il se confond avec son centre, ce qui, comme on voit, donne un moyen bien simple de mener la droite des centres des cercles, cette droite passant d'ailleurs par le centre.

Nous avons dit qu'il existait deux systèmes de génération symétriques chacun aux normales qui se croisent au centre à angles droits; donc aussi il existe deux systèmes de lignes circulaires sur la surface que nous examinons, symétriquement placés relativement à ces normales, et qui jouissent chacun des propriétés que nous venons d'exposer.

Changeons maintenant de données, et cherchons par des considérations plus générales, des relations aussi plus étendues qui puissent compléter l'examen de notre surface.

Supposons qu'une droite se meuve dans l'espace, de manière que trois de ses points s'appuient sans cesse sur trois plans *directeurs* donnés, et proposons-nous, dans cette hypothèse, de déterminer la surface parcourue par chacun des points de cette droite.

Pour cela, considérons la droite mobile dans une quelconque de ses positions, et menons, par les points où elle rencontre deux des plans directeurs, deux droites directrices, qui, dans ces mêmes plans, soient parallèles au troisième.

Si aux deux premiers plans on substitue ces deux droites, le point générateur ne cessera pas de se mouvoir sur la même surface que dans le premier état de la question.

Mais ce point décrit alors une courbe du second ordre, dont le plan est parallèle à ces directrices, et par conséquent au troisième plan directeur, dont le centre est sur la plus courte distance des directrices et du troisième plan, et toutes les parties de cette plus courte distance comprise par le centre et chacun des plans *directeurs*, seront proportionnelles

aux parties analogues interceptées sur la droite mobile par le point *générateur* et ces mêmes plans : cela est évident.

Or ces dernières sont constantes; donc les premières le seront pareillement dans leurs rapports.

Donc les extrémités de la plus courte distance des directrices, le centre de la courbe placé sur elle, et même le point où cette droite rencontre le troisième plan directeur, seront entre eux à des distances constamment proportionnelles, de quelque manière qu'on change de directrices.

Si on suppose que la droite mobile cesse d'être sur ces directrices, et prenne une autre position quelconque, on formera de même un autre système de directrices parallèles aux premières, et par conséquent la courbe parcourue dans ce cas sera semblable à la première et semblablement placée dans l'espace; le centre de cette courbe, les points de la plus courte distance du système placés sur les trois plans directeurs, seront en ligne droite avec l'intersection des trois *plans* directeurs et les points analogues du premier système de directrice.

Donc, dans la surface que nous considérons, toutes les sections faites par des plans parallèles à l'un des plans directeurs, sont des courbes du second ordre semblables entre elles, dont les axes sont parallèles, et les centres en ligne droite (cette droite est un diamètre de la surface).

On trouvera facilement ce diamètre en menant la droite mobile perpendiculaire au troisième plan directeur; elle passera, dans ce cas, par le centre de la courbe du point générateur; le diamètre passe d'ailleurs évidemment par le point d'intersection des plans directeurs, puisque c'est le centre de la surface que nous discutons.

Nous pourrions déjà conclure de ces seules propriétés, qu'à chaque diamètre, lieu des centres donnés par un même plan directeur, correspond dans ce plan une infinité de droites, qui, prises deux à deux, forment avec ce diamètre autant de systèmes de diamètres conjugués de la surface; mais comme nous allons parvenir à ce résultat par des

moyens plus simples, et qu'il nous est d'ailleurs nécessaire d'employer, nous nous contentons seulement de l'indiquer ici.

Quand la droite mobile se trouve dans l'un des plans directeurs, ceux de ses points qui doivent parcourir les deux autres plans, sont évidemment sur l'intersection de ces plans avec le troisième, chacune de ces droites d'intersection faisant alors fonction de *directrice*.

Mais nous savons qu'il existe une infinité de systèmes de directrices différentes qui donnent la même ligne du second ordre; que toutes ces directrices se coupent au même point; qu'il n'est aucune droite menée par ce point qu'on ne puisse prendre pour une de ces directrices, &c., &c.

On peut donc ici changer la trace des deux premiers plans directeurs sur le troisième, d'une infinité de manières différentes, sans que pour cela la trace de la surface sur le troisième plan directeur cesse d'être la même, et il n'est aucune droite menée sur ce plan par le centre de la surface, qui ne puisse être prise pour la trace d'un des deux premiers plans; et les sections formées dans ces surfaces, par des plans parallèles au troisième plan directeur, seront toujours semblables, puisqu'elles n'auront pas cessé de l'être à leur trace sur ce plan, qui, par hypothèse, est restée la même.

Si nous supposons de plus que ces plans, en changeant de trace sur le troisième, soient demeurés tels que la position de la droite mobile, lorsqu'elle est perpendiculaire à ce troisième, n'ait pas changé, ainsi que la distance du point générateur au troisième plan, c'est-à-dire, la *troisième directrice*, ce point sera alors *commun* à l'ancienne et à la nouvelle surface, et la droite des centres sera la même pour les deux surfaces.

A chaque inclinaison donnée de la droite mobile sur le troisième plan directeur, correspond sur chaque surface une courbe qui, comme nous venons de le prouver, a son centre sur une droite commune aux deux surfaces, et est dans un plan parallèle au troisième plan directeur, semblable à la trace de la surface sur ce troisième plan; et le rapport des dimensions analogues de cette trace et de ces courbes est celui des parties de la droite mobile à leur projection.

Or, ici, celle des parties de la droite mobile comprise par le point générateur et le troisième plan, et par conséquent aussi sa projection sur ce plan, sont les mêmes pour les deux courbes ; donc ces courbes sont égales; donc elles sont identiques et se confondent, puisqu'elles sont dans le même plan ; donc enfin la nouvelle surface est la même que la première.

Ainsi, un des plans directeurs restant le même, on peut, en changeant convenablement la grandeur de la droite mobile, assigner aux deux plans directeurs une infinité de positions différentes, qui toutes donnent la même surface.

Mais le troisième plan lui-même, combiné avec l'un des deux premiers, pourra varier de même, par rapport à celui-là, dans chacune de ses positions, comme ceux-ci par rapport à lui, sans que pour cela la surface ait encore varié.

En passant ainsi d'un système à l'autre, il n'est aucun des plans menés par le centre de la surface qui ne puisse être regardé comme un des plans *directeurs* de cette surface, et les parties de la droite mobile pourront prendre successivement toutes les valeurs possibles (entre certaines limites).

Quand deux parties de la droite mobile deviendront égales, les points qui devaient parcourir les deux plans auxquels appartiennent ces distances, se confondront en un seul qui se trouvera sur l'intersection de ces plans, tandis que l'extrémité de la troisième partie parcourra le troisième plan directeur.

Donc les surfaces décrites par le point d'une droite mobile qui s'appuie par deux de ses points sur un plan et une droite, ou par trois de ses points sur trois plans donnés, sont les mêmes, et les propriétés de chacune d'elles appartiennent par conséquent à toutes.

Et comme les plans parallèles à chacun de ceux-ci coupent la surface dans des courbes du second ordre, semblables entre elles, semblablement placées dans l'espace, et dont les centres sont en ligne droite, cette

propriété a lieu, quelle que soit, dans l'espace, la direction de ces plans. *Donc cette surface est une surface du second ordre* (*Voyez* la note II).

Donc si trois diamètres sont tels que le plan qui touche la surface à l'extrémité de l'un soit parallèle au plan des deux autres, ils formeront entre eux un système de diamètres conjugués à la surface.

Donc toute surface du second degré a une infinité de systèmes de diamètres conjugués entre eux.

Donc la surface a un système de diamètres conjugués rectangulaires entre eux, c'est-à-dire, trois axes qui se coupent à angles droits.

Le produit des directrices d'un système quelconque est, pour une courbe du second degré, égal au produit de ses axes; de même le produit des *trois directrices*, c'est-à-dire, des diamètres, intersection des trois plans directeurs d'un même système; le produit, dis-je, est constant: donc aussi le volume d'un parallélipipède oblique quelconque, circonscrit à une surface du second degré, est constant, et a pour volume le produit des trois axes de la surface (*Voyez* les notes II et III).

Toutes les sections par des plans parallèles à deux des diamètres d'un de ces systèmes ont leur centre sur le troisième, et toutes ces sections sont semblables entre elles.

Donc la suite des plans tangens à la surface, dans toute l'étendue de l'une de ces sections, forme, par leurs intersections successives, un cône du second ordre, dont le sommet est sur le troisième diamètre.

D'où il suit qu'un cône dont le sommet est placé à un point quelconque, et qui touche, par chacune de ses arêtes, une surface du second ordre, a pour courbe de contact sur cette surface une ligne plane, et est par conséquent du second ordre, ainsi que cette courbe.

Quand cette courbe a pour centre celui de la surface, ce cône devient un cylindre dont les arêtes sont parallèles au diamètre conjugué au plan de cette courbe.

Et nous pourrions déduire ici toutes les propriétés des surfaces du second ordre, relativement à leurs plans tangens et aux surfaces qui les enveloppent, car elles découlent toutes de celles que nous venons d'exposer.

La

La méthode qui nous a servi jusqu'ici ne décrivant les lignes et les surfaces du second ordre que par points, on pourrait douter qu'elle pût s'appliquer avec une égale facilité aux questions relatives aux contacts de ces lignes et de ces surfaces, qu'à celles que nous avons déjà traitées, et qui n'étaient le plus souvent relatives qu'à des *intersections* ou à des déterminations de points ou de lignes remarquables qui leur appartiennent.

Si les limites que je me suis prescrites et que le temps me force de resserrer encore ne m'obligeaient de terminer cet Essai, déjà trop long, j'essaierais d'étendre la méthode qui nous a donné la solution des dernières questions à l'analyse des autres, et ce travail offrirait quelques développemens qui peut-être ne seraient pas sans intérêt. Je ne puis néanmoins m'empêcher d'en indiquer les principaux résultats, mais rapidement et sans m'arrêter sur aucune démonstration.

On sait que toutes les coûrbes pour lesquelles à des abscisses égales correspondent des ordonnées proportionnelles, ont pour la même abscisse la même *sous-tangente* sur l'axe des abscisses.

On sait de plus que toutes les courbes du second degré qui ont le même axe des x, jouissent de cette propriété, que le cercle est celle de ces courbes où le diamètre des y $=$ celui des x, et que la sous-tangente du cercle est le carré de cet axe, divisé par l'abscisse.

D'où résulte ce moyen de déterminer la sous-tangente qui correspond à chaque point d'une courbe quelconque du second ordre.

Si on conçoit la droite mobile et la droite parallèle à l'axe des x qui passe par ce point, la partie de cette parallèle comprise par ce point et une perpendiculaire à la droite mobile menée par le point où celle-ci coupe l'axe des y, sera la *sous-tangente*.

Toutes les courbes qui ne diffèrent que par l'inclinaison des ordonnées sur les abscisses et non par la grandeur de ces lignes, ont la même *sous-tangente* pour les mêmes coordonnées.

(Fig. VIII.) Pour déterminer la sous-tangente qui correspond au point d d'une courbe du second ordre quelconque, rapportée à tel de ses

systèmes de directrices OX, OY qu'on voudra, il faudra, par le point d, mener la droite mobile adb et la parallèle $d\gamma s$ à l'axe OX, et la droite as, par le point a, où la droite mobile coupe la directrice OY, telles que les angles $d\gamma a$ et das soient égaux, ds sera la sous-tangente. En effet, elle sera $= \frac{a^2}{x}$.

Si maintenant on veut mener un plan tangent à une surface du second ordre, rapportée à l'un quelconque de ses systèmes de plans directeurs, comme plans coordonnés par un de ses points, il faudra concevoir la droite mobile et le plan parallèle à celui des xy menés par le point et la projection de cette droite sur ce plan.

Si, en regardant cette projection comme droite mobile, et les traces de ce plan sur ceux des xz et des yz comme directrices, on détermine la sous-tangente et on mène la tangente à la courbe par le point donné, par la méthode que nous venons d'indiquer, cette droite sera, dans le plan tangent, parallèle à la trace sur le plan des xy. Il est inutile de dire qu'on trouvera de la même manière les autres droites qui passent par le point donné dans le plan tangent parallèle à ses traces sur le plan des xz et des yz; nous savons d'ailleurs que, connaissant un système de diamètres conjugués, nous pouvons facilement trouver non pas un, mais une infinité de systèmes de plans directeurs.

On doit voir par là que cette solution est fort générale; elle me semble d'ailleurs très-simple, sur-tout comme procédé graphique.

Nous avons donné les moyens d'obtenir les axes des lignes et des surfaces du second degré en connaissant un de ces systèmes de directrices, ou, ce qui revient au même, un de ces systèmes de diamètres conjugués (note V); on peut de même obtenir les axes d'une surface du second ordre, rapportée à l'un quelconque de ses plans directeurs. Pour cela, on concevra toutes les courbes sur cette surface, parallèles à l'un quelconque des trois plans directeurs, et toutes les normales à ces courbes qui passent en même temps par le centre de la surface : elles seront les arêtes d'un même cône du second degré; et en répétant cette construction

pour chacun des trois plans directeurs, on obtiendra trois cônes, et les droites d'intersection de ces cônes pris deux à deux, seront les axes de la surface.

Il sera facile de déterminer ces cônes ainsi produits par chaque plan directeur, et il n'est pas nécessaire de les construire tous trois; car deux d'entre eux se coupant suivant deux des axes de la surface, on aura le troisième axe en menant par le centre de la surface une perpendiculaire aux deux autres.

En observant que les axes de la trace de la surface sur un des plans directeurs et le diamètre de la surface conjuguée à ce plan, sont les normales de la plus grande et de la plus petite des sections de la surface, par des plans parallèles au plan directeur qu'on considère, nous verrons qu'on connaîtra toujours immédiatement trois arêtes de chacun des cônes, lieux des axes de la surface. Observons encore que la perpendiculaire menée par une des extrémités de ce diamètre parallèlement au plan directeur, est tangente à la courbe d'intersection du cône et de la surface, et le plan diamétral mené par cette perpendiculaire sera tangent au cône dans toute l'étendue du diamètre.

Pour avoir la normale qui correspond à une section quelconque, il faut projeter cette courbe sur le plan directeur auquel le plan qui la contient est parallèle, et chercher alors la normale à cette projection qui passe par le centre de la surface; le point de contact sera la projection du point par lequel la normale à sa section même doit passer.

Si de cette manière on détermine une seule normale quelconque pour un même cône, jointe aux trois qu'on connaît déjà, elles détermineront entièrement la surface du cône auquel elles appartiennent, puisque ce cône est toujours du second degré, et que nous connaissons un de ses plans tangens.

(Fig. X.) Pour résoudre ce problème, on concevra un parallélogramme dont les angles aient leurs sommets chacun sur une des arêtes du cône que nous venons de déterminer; le plan de ce parallélogramme *abcd* coupera le cône en une courbe du second ordre *abcd*, circonscrite

à ce parallélogramme, et coupera le plan tangent au cône, suivant une de ses arêtes TaT', tangente à la courbe au sommet a du parallélogramme placé sur la même arête.

Soient m, m', M, M' les milieux des côtés du parallélogramme, en menant mm, MM', le point O, intersection de ces droites, sera le centre de la courbe; traçons de plus le diamètre XOX' parallèle à TaT', et par conséquent conjugué au diamètre aOc.

Menons $T'bt$, cette droite sera tangente à la courbe en b; et si bx, by sont parallèles à Oa, OX, en nommant le diamètre en $Ox\alpha$, on aura $\frac{\alpha^2}{bx} = Ot$, c'est-à-dire, α, moyenne proportionnelle entre bx et Ot. On connaît d'ailleurs l'autre diamètre Oa; donc la courbe sera connue, et par conséquent le cône qui s'appuie sur elle, en ayant son sommet au centre de la surface.

Ce moyen de déterminer la surface des cônes, lieux des axes de la surface, est assez simple; mais il est long, et on peut en donner un autre plus élégant. Il consiste à déterminer pour chaque cône trois arêtes quelconques, et les plans tangens suivant ces arêtes au cône unique auquel elles appartiennent. Nous connaissons déjà trois arêtes, savoir, les deux axes de la trace de la surface sur le plan directeur et le diamètre conjugué à ce plan, et le plan tangent au cône, dans toute l'étendue de ce diamètre. Nous n'avons donc plus qu'à déterminer les plans tangens au cône sur chacune des deux autres droites (les deux axes) (*Voyez* la note VI). Si, après avoir déterminé les trois plans tangens au cône et les arêtes appartenant à ces plans, on mène un plan quelconque, parallèle à l'une des intersections de ces plans, le quatrième plan coupera les trois arêtes en trois points, les trois plans en trois droites, et le cône en une courbe qui passera par les trois points tangentiellement aux trois droites : deux de ces tangentes seront parallèles; d'où il suit qu'on connaîtra le centre de la courbe, la grandeur d'un de ses diamètres, la direction de son conjugué, et un des points de la courbe avec sa tangente en ce point. Il faudra la déterminer. Nous venons de résoudre ce problème. Ainsi on

peut, par deux procédés graphiques également généraux, lorsqu'on connaît un quelconque des systèmes de diamètres conjugués ou de plans directeurs d'une surface du second ordre, déterminer les trois axes de cette surface.

Passons aux contacts du second ordre; on sait que les lignes de courbure se projettent sur chacun des plans principaux d'une surface du second ordre, suivant les lignes du second ordre, dont les axes sont sur ceux de la surface. Or, quand une courbe quelconque peut être tracée sur deux surfaces du second ordre concentriques, et dont les axes ont la même direction, elle peut aussi l'être sur une infinité de surfaces qui jouissent de la même propriété; et par chacune de ces surfaces quand la droite mobile décrira la courbe qui leur est commune, elle tracera en même temps sur les trois plans principaux trois courbes du second ordre, dont les axes sont sur ceux de la surface.

Donc ici les lignes de courbure se trouvant évidemment sur les trois cylindres du second ordre qui les projettent, et dont la direction des axes est la même que celle des axes de la surface, elles jouissent de cette propriété, que quand le point générateur de la droite mobile les décrit, cette droite trace sur chacun des plans coordonnés des courbes du second ordre (*Voyez* la note VII).

Les axes de ces courbes jouissent de cette propriété remarquable, que leur rapport aux axes mêmement dirigés des projections des lignes de courbure, est constant.

Je regrette de ne pouvoir développer ici ces diverses méthodes, la dernière sur-tout, qui serait, ce me semble, assez utile dans la coupe des pierres; elle donnerait un moyen bien facile de déterminer les lignes de courbure, au moyen de trois règles dont deux arbitraires seraient constantes pour une même ligne de courbure, et varieraient dans le passage d'une courbe à l'autre suivant une loi déterminée proportionnellement aux axes de projection des lignes de courbure sur les plans principaux que ces droites mobiles parcourent : ces règles s'appuieraient sur les axes de la surface, et resteraient chacune dans un

des trois plans principaux ; le point générateur, sur chacune d'elles, traînerait sur celui de ces plans qui la contient, la courbe du second ordre que doit suivre la troisième droite mobile, pour tracer la ligne de courbure avec son point générateur.

Sur la détermination des Rayons de courbure et des Tangentes aux lignes de courbure.

En appliquant aux contacts du second ordre le mode de génération que nous avons adopté pour les surfaces du second degré, nous avons donné un moyen de décrire, par un mouvement continu, les lignes de courbure de ces surfaces, et réduit ainsi à un simple mécanisme une opération auparavant assez compliquée. On déterminera par-là, pour chaque point de la surface, et la direction des deux lignes de courbure dont il est l'intersection, et ces lignes elles-mêmes, dans toute leur étendue. Mais comme cette méthode, avantageuse quand on veut obtenir la *ligne de courbure* entière, peut être assez longue encore quand on ne demande que la direction de cette *ligne* en un de ses points, nous allons pour cela donner une méthode immédiate et plus expéditive.

Enfin, pour compléter ce que nous avons dit sur la courbure des surfaces du second degré, nous présenterons un moyen de déterminer les rayons de courbure pour chacun de leurs points, et par-là, toutes les questions relatives à la tangence et à l'osculation des surfaces qui nous occupent, seront ramenées aux considérations de la géométrie ordinaire; puisque, comme on sait, la tangence et les *contacts* des surfaces n'ont pour élémens que les normales, les rayons et les lignes de courbure que nous avons déterminés.

Soit un point p de la surface du second degré pour lequel on veuille déterminer la direction des deux lignes de courbure dont il est l'intersection, et la courbure de ces mêmes lignes en ce point, c'est-à-dire, les espèces de courbure de la surface.

Menons le plan tangent à la surface en p, et par le centre un plan qui lui soit parallèle; déterminons les axes de la section faite sur la surface par ce plan parallèle, c'est-à-dire, *les directrices orthogonales de cette section.*

La droite menée par le point p *parallèlement* à la *plus grande directrice*, sera *tangente* à la *ligne de plus grande courbure.*

La droite menée par le point p *parallèlement* à la *plus petite directrice*, sera tangente à la *ligne de plus petite courbure.*

Passons maintenant à la détermination des rayons de courbure de la surface en p, et pour cela, concevons la *troisième directrice* conjuguée aux *deux premières.* Nous avons démontré qu'elle est égale à la distance du point p au plan de ces deux directrices; ainsi elle sera immédiatement donnée par la distance du centre au plan tangent en p à la surface qui lui est évidemment égale. Cela posé,

Le carré de la *plus grande des deux premières directrices*, divisé par la *troisième directrice*, est égal au *plus grand rayon de courbure;*

Le carré de la *plus petite des deux premières directrices*, divisé par la *troisième directrice*, est égal au *plus petit rayon de courbure.*

Ces valeurs paraîtront peut-être de quelque simplicité, si on considère la complication de l'expression du rayon de courbure qui s'obtiendrait par la formule générale $R = \frac{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''}$, immédiatement appliquée à l'équation générale des surfaces du second degré.

Voyons actuellement quelle sera l'expression des rayons de courbure, tirée de l'équation générale au moyen de leurs valeurs que nous venons de déterminer. Soit $b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$, l'équation de la surface du second degré; soient D', D'' les deux premières directrices, et Δ la troisième; soit S le rapport de la distance du centre au plan tangent en p avec la distance du centre à ce point, on aura, en nommant D cette distance, $D = \Delta S$, qui fera connaître D.

D'après ce que nous avons démontré dans la note II, et parce que

D, D', D'', forment évidemment un système de diamètres conjugués, on aura pour équation du système des *directrices conjuguées*,

$$\Delta D'D'' = abc = \varphi;$$

Pour équation du système de *diamètres conjugués*,

$$\Delta^2 + D'^2 + D''^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \mathcal{A}^2;$$

Et ces équations donneront immédiatement

$$D', D'' = \frac{\mathcal{A}^2 - D^2}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\mathcal{A}^2 - D^2}{2}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{\Delta^2}\right]};$$

Et pour les rayons de courbure,

$$R' = \frac{D'^2}{\Delta}, R' = \frac{D''^2}{\Delta}; R', R'' = \frac{\mathcal{A}^2 - D^2}{2\Delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\mathcal{A}^2 - D^2}{2\Delta}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{\Delta^4}\right]};$$

expression, comme on voit, simple et facile à construire, et dont, pour cette raison, nous ne donnerons pas la construction, d'ailleurs évidente.

Tout ce qui est relatif à la théorie des contacts du *premier* ordre se réduit à des considérations de surfaces du *premier ordre*, le *plan;* tout ce qui est relatif à la théorie des contacts du *second ordre* des surfaces, se réduit à des considérations de surfaces du *second ordre*, et ainsi de suite. En envisageant les surfaces sous ce point de vue, l'examen de celles qui nous ont occupé dans ce Mémoire, devient d'un plus grand intérêt encore que celles qu'elles peuvent offrir, par la simplicité de leurs formes et par l'étendue de leurs propriétés. Elles ne sont plus seulement une des espèces particulières du système entier des surfaces; elles sont l'élément de toutes les formes des surfaces, quelle que soit une surface en chacun de ses points. Sa direction et sa courbure se confondent avec celles d'une des surfaces du second degré, et toutes les propriétés qui dépendent de la tangence et de l'osculation en ce point, appartiennent également aux premières et aux secondes; et celles-ci, plus simples, plus faciles à considérer, et sur-tout mieux connues, sont par-là plus propres à nous faire découvrir, pour chacun des points des surfaces, les propriétés générales de leur courbure. Depuis les nouveaux progrès

progrès des mathématiques, on peut dire que cette manière d'envisager les surfaces et les courbes des différens ordres, est la seule qui doive être adoptée, et toutes les autres ne devront être suivies qu'autant qu'elles pourront conduire à celles-là. En comparant ainsi sans cesse les formes particulières de l'étendue à des formes plus générales, on s'élevera successivement à toutes les considérations de la géométrie et des nouveaux calculs; c'est qu'on aura suivi la marche dont on ne devrait jamais s'écarter dans la recherche de la vérité, celle qui a conduit les inventeurs à leurs découvertes, la théorie analytique.

NOTE I.re

POUR cette raison et parce que ces droites sont les intersections des plans *directeurs*, nous les nommerons *directrices*. On voit par-là qu'il y aura toujours trois *directrices* pour un même système de *plans directeurs*. Nous dirons encore indifféremment *système de directrices*, ou *système de plans directeurs*, l'un d'eux étant déterminé par l'autre.

NOTE II.

NOUS avons dit que chaque surface du second ordre avait un système de diamètres conjugués, rectangulaires entre eux; les plans diamétraux de ce système jouissent évidemment de la même propriété, ce qui exige qu'ils se confondent avec les plans directeurs, et que les parties de la droite mobile comprise par le point générateur et ces mêmes plans, soient égales aux axes de la surface; propriété remarquable des surfaces du second ordre, et qui peut servir à leur description.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des surfaces du second ordre en général. Il n'est aucune d'elles à qui chacune des propriétés que nous venons de donner n'appartienne. Il nous serait facile de voir quelles modifications la forme de ces surfaces apporte dans ces propriétés.

Nous prouverions, par exemple, qu'en supposant la distance du centre à un des plans, nulle ou infinie, la surface devient un cône ou un paraboloïde;

Et qu'en faisant imaginaire la distance d'un ou de deux des plans directeurs au point générateur, elle devient hyperboloïde à une ou deux nappes; que toutes les sections parallèles à ces plans sont des hyperboles qui sont semblables et qui comprennent le système de deux droites différentes, parallèles, asymptotes de ces courbes: d'où il suit que ces surfaces peuvent être décrites, par une ligne droite, de deux manières différentes, &c.

D'où il suit encore qu'une droite qui se meut en s'appuyant sans cesse sur trois autres, décrit un hyperboloïde.

Enfin nous déduirions successivement toutes les propriétés connues des surfaces du second ordre.

NOTE III.

(Fig. IX.) Ce moyen peut se simplifier de cette manière : OX, OY étant les directrices, $OB =$ à la droite mobile, et D le point générateur, OmB le cercle tangent à OY, mené par O et B, C étant le centre du cercle.

$dcm =$ le grand axe, $dm' =$ le petit axe, Omd, $Om'd$ sont les angles que ces axes forment avec OY. Si au lieu des directrices OY, OX, on n'avait que les diamètres conjugués OX', OY', on menerait la droite mobile adb, perpendiculaire à OX; OY serait la seconde directrice, et le problème se résoudrait alors comme nous venons de le faire.

NOTE IV.

Nous avons vu, en parlant des directrices des courbes du second degré, que leur position relative n'était pas arbitraire ; qu'une d'elles étant donnée, la seconde, conjuguée à celle-là, qui appartient, avec la première, au même système de génération; cette autre directrice, dis-je, était entièrement déterminée : nous avons assigné les relations qui lient entre elles les positions des directrices du même système. La position des directrices de chaque système de génération des surfaces du second degré est pareillement soumise à une loi qui rend chacune d'elles dépendante de la détermination des deux autres. Voyons quelle peut être cette loi.

Supposons d'abord que deux des directrices doivent, en variant de position, rester toujours sur le même *plan directeur fixe ;* nous savons quelle peut être la loi de cette variation, puisque ces droites sont les directrices d'une seule et même courbe du second degré, la trace du plan directeur sur la surface (note I.re). Cherchons donc ce que devient la troisième directrice dans la mutation des deux premières. Si on conçoit le plan tangent à la surface, parallèle au plan directeur *fixe*, la distance de ces deux plans est égale à la troisième directrice; c'est ce que nous avons prouvé dans le cours de cet Essai : mais ces deux plans sont fixes, puisque l'un d'eux l'est; c'est l'hypothèse. Si donc on suppose qu'une droite, toujours égale à leur distance, ayant de plus une de ses extrémités fixée au centre de la surface, s'appuie sur la surface elle-même par son autre extrémité, cette droite, dans chacune de ses positions, sera la troisième directrice correspondante à chacun des systèmes des deux autres directrices placées sur le plan directeur fixe.

Quand deux directrices sont assujetties à rester dans un même plan, la troisième

est donc d'une grandeur constante ; elle décrit dans l'espace un cône du second degré qui coupe la surface, et une *sphère* qui lui est concentrique, suivant la même courbe. Ces *cônes*, dont les axes sont sur ceux de la surface, sont très-remarquables par rapport à cette surface; ils donnent immédiatement la forme, la position de ses lignes de courbure, et la grandeur des rayons de courbure : mais ce n'est pas ici le lieu d'exposer ces propriétés des surfaces du second degré.

Les deux premières directrices appartenant toujours au même système de génération de la *trace* de la surface sur le plan *directeur fixe*, leur produit est constant; la somme des carrés des diamètres *conjugués* de cette *trace* ne change pas; le diamètre qui leur est *conjugué* sur la surface reste le même ; la somme des carrés des diamètres conjugués de chacun de ces systèmes est constante. Nous venons de dire que le produit des deux premières directrices de chaque système est constant; la troisième est constante : *donc aussi le produit des trois directrices est constant.* Si on conçoit tous les parallélogrammes circonscrits à la *trace* sur le plan directeur fixe, leur surface est constante; elle égale le produit des deux premières directrices. Si par chaque côté d'un de ces parallélogrammes on mène un plan tangent à la surface avec les plans tangens à la surface, parallèles au plan directeur fixe, ils formeront un prisme quadrangulaire dont le *volume* sera évidemment mesuré par le produit des trois directrices. Il est inutile de dire que ce prisme, par chacune de ses faces, touche la surface à l'extrémité des diamètres conjugués d'un même système.

Si après avoir supposé constante la troisième directrice, je la suppose variable, l'une des deux premières, au contraire, devenant constante, je parviendrai encore aux mêmes résultats, et je parcourrai ainsi successivement tous les systèmes possibles de directrices. Je puis donc généralement conclure, 1.° que la somme des carrés de trois diamètres conjugués entre eux est constante pour tous les systèmes possibles de diamètres conjugués, et égale à la somme des carrés des axes ; 2.° que le produit des trois directrices d'un même système de génération est le même dans tous les systèmes de génération possibles, et égale le produit des trois axes ; 3.° que le volume de tous les prismes quadrangulaires circonscrits à la même surface du second degré, est constant et mesuré par le produit des trois directrices de chaque système, ou par le produit des trois axes de la surface.

Si je supposais fixe une suite des trois directrices, la position des deux autres directrices et des trois plans directeurs étant arbitraire, le plan de ces dernières directrices devant toujours être distant du plan qui lui est parallèle et qui touche à la surface, d'une quantité égale à la première directrice, cette distance se trouverait constante, et alors tous les plans trouvés ainsi, couperaient les surfaces suivant des courbes dont les

directrices de même système formeraient avec la première autant de systèmes de directrices de la surface même. Tous ces plans directeurs, donnés par une directrice constante, enveloppent un cône du second degré : donc les axes sont sur ceux de la surface.

Nous terminerons cette note, déjà trop longue, par deux propriétés d'un autre genre que celles que nous venons d'exposer ; elles achèvent de marquer la relation qu'ont entre eux les directrices de chaque système de génération et les diamètres conjugués de chaque système aussi entre eux.

Les plans tangens à chaque extrémité des directrices du même système se coupent trois à trois en un point ; tous les points, ainsi obtenus, forment une surface unique du second degré, concentrique à la première, et avec ses axes sur ceux de cette surface.

Si on joint trois à trois, par un plan, les extrémités des directrices de chaque système, tous les plans qu'on obtient ainsi, enveloppent une surface qui, comme la précédente, est du second degré, et concentrique à la première avec ses axes mêmement dirigés.

Si les constructions analogues étaient effectuées pour les diamètres conjugués de chaque système, on obtiendrait deux nouvelles surfaces qui, comme celles dont nous venons de parler, seraient du second degré, concentriques à la première avec leurs axes sur ceux de cette surface ; elles seraient semblables à la première, dont le volume serait six fois plus grand que le volume d'une de celles-ci, et six fois plus petit que le volume de l'autre surface.

NOTE V.

A ce sujet, nous exposerons ici quelques propriétés relatives à la cubature des surfaces du second degré ; elles peuvent être utiles dans plusieurs circonstances : les propriétés analogues relatives à la quadrature des courbes du second degré s'en déduisent immédiatement, comme des cas particuliers de théorèmes plus généraux ; pour cette raison, nous nous contenterons d'exposer les premières sans parler des autres.

Si on conçoit tous les prismes quadrangulaires circonscrits à une surface du second degré, le volume de ces prismes sera constant ; il aura pour mesure le produit des trois axes de la surface, ou celui des directrices d'un système quelconque de plans directeurs (note III).

Si on conçoit tous les cylindres circonscrits à la même surface, et dont les bases soient aussi tangentes à cette surface, le volume de tous ces cylindres sera encore constant.

Pour toutes les surfaces du second degré possibles, le rapport de leur volume au volume des cylindres et à celui des prismes quadrangulaires qui les circonscrivent ;

ce rapport, dis-je, est constant, c'est celui du volume de la sphère aux volumes du cylindre et du cube qui la circonscrivent.

Enfin, si on conçoit tous les cônes circonscrits à la surface, de manière à la toucher par le milieu de chacune de leurs *arètes*, le rapport des volumes de la surface, des cylindres et de ces cônes qui la circonscrivent, est celui de 4, 6, 9.

On voit qu'on aura le volume de la surface du second degré en multipliant le *produit* de ses trois axes ou de ses trois directrices d'un même système, par le rapport de la circonférence au diamètre.

Pour avoir le volume du *segment* d'une surface du second degré, on déterminera la section diamétrale parallèle à la base du *segment*, on mènera le diamètre conjugué à cette section ; l'extrémité du diamètre sur le *segment*, sera le *sommet* du *segment*, et la partie du diamètre comprise par le sommet du segment et le centre de sa base sera la *flèche* du segment : coupons une sphère d'un volume égal à celui qu'entoure la surface, de manière que le segment qui en résulte soit égal en volume au segment du second degré ; les flèches des deux segmens seront entre elles comme les diamètres des sphères relatives aux surfaces sur lesquelles se trouvent ces flèches, et les surfaces des bases des segmens de la surface et de la sphère seront entre elles comme les surfaces des sections diamétrales parallèles à ces bases.

Ces propriétés donnent immédiatement le volume d'un segment et celui d'un secteur de surface du second degré, lorsqu'on connaîtra la base de ces solides, la *flèche* et la section diamétrale parallèle à cette base : cela est évident.

Si on trace les cônes circonscrits à la surface et à la sphère que nous venons de considérer dans toute l'étendue des bases des segmens égaux de ces surfaces, ces deux cônes seront égaux en volume, et il en sera de même des deux secteurs de ces surfaces qui s'appuient sur la base commune.

Supposons maintenant qu'on demande tous les plans qui, sur une surface du second degré, interceptent des segmens égaux ; tous les secteurs qui correspondront à ces segmens seront pareillement égaux.

Tous ces plans seront tangens à une surface unique, qui sera du second degré, concentrique et semblable à la primitive avec ses axes mêmement dirigés.

Si les courbes des bases des segmens, c'est-à-dire, les intersections de ces plans et de la surface primitive, sont regardées comme *courbes* de *contact* de cônes circonscrits à cette surface, les sommets de ces cônes formeront une surface encore du second degré, concentrique et semblable aux deux premières, avec les axes mêmement dirigés.

Si les cônes sont terminés à leurs courbes de contact sur la surface primitive, c'est-à-dire, terminés aux bases des segmens, ils seront tous égaux en volume.

S'ils sont terminés aux plans tangens à la surface, parallèles aux bases des seg-

mens, tous les cônes qui comprendront la surface primitive entre leur sommet et leur base, seront égaux en volume, et tous les autres seront aussi équivalens.

Les bases des cônes qui comprennent la surface entre leur sommet et leur base, jouissent de cette propriété, que chacune de ces courbes, des bases, est coupée par toutes les autres de manière à former par conséquent une seule surface, quoiqu'elles soient de nature à couvrir de leurs points une infinité de surfaces différentes.

Il en est de même des bases des autres cônes; elles forment une surface unique, différente de la première, et ces deux surfaces sont encore concentriques aux trois premières avec leurs axes mêmement dirigés que ceux de ces surfaces.

Nous ne pensons pas devoir pousser plus loin ces considérations; nous en donnerons les démonstrations géométriques, si on croit que cela puisse être utile; elles sont simples, et on pourra juger en les voyant, avec quelle facilité la géométrie descriptive conduit à des résultats compliqués en apparence.

Lorsqu'un corps flotte sur un fluide, le volume de sa partie immergée est égal au volume du fluide dont le poids est celui du corps flottant, et ce volume est constant quelque position que prenne le corps flottant; le plan de la surface du fluide sépare donc toujours du corps un même volume; tous ces plans enveloppent une surface remarquable dont les centres de courbure sont pour la position d'équilibre, ce que M. *Bouguer* a nommé *métacentre*, et dont les lignes de courbure qui se croisent sur la normale qui contient ces centres, sont les lignes de plus *grande* et de *moindre* stabilité de la surface.

On voit par-là que la théorie des corps flottans terminés par des surfaces du second degré, n'est qu'une conséquence facile des propriétés que nous venons d'exposer, et de la recherche des centres de courbure.

NOTE VI.

POUR déterminer le plan tangent au cône suivant les axes de la trace de la surface sur le plan directeur, il nous suffira de trouver la droite tangente de l'intersection du cône et de la surface à l'extrémité de ces axes; le plan qui passera par elle et par le centre sera le plan cherché.

Si on prend pour plan de projection le plan directeur, et pour axes des coordonnées les axes $OA = a$, $OB = b$ de la trace ABA_0B_0 de la surface sur ce plan, toutes les sections aa_0bb_0 par les plans qui lui sont parallèles, seront semblables à une trace; donc pour chacune d'elles le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ ne cessera pas d'être le même.

(Fig. XI.) Menons par le centre O, $OSID$ normale à la section aba_0b_0; de ce que la sous-tangente des courbes du second degré égale $\frac{a^2}{x}$, on conclura immédiatement que le rapport de la sous-normale Io à l'abscisse moins la sous-normale $= Ip$, est $\frac{a^2-b^2}{a^2}$; quantité constante, d'après ce que nous venons de dire, pour toutes les sections aba_0b_0. Donc on aura aussi toujours $\frac{oS}{pD+oS} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, quantité constante.

Supposons que la section aba_0b_0 s'approche de plus en plus de la trace ABA_0B_0 de la surface sur le plan directeur, la ligne AD, menée par le sommet A de cette trace et le point D de la normale $OSID$, approchera de plus en plus de la tangente à la courbe, lieu des points D.

De plus, le rapport $\frac{oS}{pD+oS}$ s'approchera de plus en plus du rapport $\frac{oS}{PD}$ des projections des parties de la tangente au point A à la courbe des normales et du diamètre oO, comprises par le plan directeur et un quelconque des plans des sections aba_0b_0: c'est ce dont il est aisé de s'assurer. Ceci nous donne un moyen facile de déterminer la tangente cherchée At. Si, pour cela, nous menons Ad parallèle au diamètre Oo, cette droite Ad sera, dans le plan tangent en A, à la surface; et si nous menons Om par le centre O, perpendiculairement à A_0B, qui joint les sommets A_0, B de la trace ABA_0B_0, on aura $\frac{A_0m-mB}{A_0B} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$; et prenant sur Ad un point d, tel que $\varphi d = A_0m - mB$, puis $\varphi t = A_0B$, At sera la tangente cherchée, et nous pourrons par conséquent déterminer le cône touché par cette droite, ainsi que nous l'avons dit.

Pour trouver l'intersection de ces cônes deux à deux, on pourrait construire leur trace sur un même plan, et les points d'intersection appartiendront aux arêtes, axes cherchés de la surface.

Mais en prenant un plan tel qu'il coupe les deux cônes dont on veut obtenir l'intersection en des courbes dont les axes soient parallèles et proportionnels, on aurait immédiatement l'intersection des traces sur le plan, sans qu'il fût besoin pour cela de construire ces courbes, ou bien encore en choisissant le plan coupant de manière que les diamètres conjugués pour chaque intersection des deux cônes au diamètre commun aux deux intersections soient parallèles, ou enfin en choisissant le plan coupant de manière qu'une des courbes d'intersection fût un cercle.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de construire les trois cônes; car deux d'entre eux se coupent suivant les trois axes de la surface.

NOTE VII.

NOUS allons chercher à démontrer généralement, 1.° que lorsqu'une courbe se trouve à-la-fois sur deux surfaces du second ordre, dont les axes ont la même direction, on peut faire passer par cette même courbe une infinité d'autres surfaces du même ordre; 2.° que la droite mobile appartenant aux trois points principaux pris pour plans directeurs, quand le point générateur parcourra la courbe commune à toutes ces surfaces, décrira toujours sur chacun de ces plans une courbe du second ordre, quelle que soit la grandeur des parties de cette droite mobile données par les surfaces qui se croisent sur la courbe primitive.

Pour plus d'abréviation, nous nommerons *points directeurs* les *points* de la droite mobile qui doivent toujours être sur les *plans directeurs*. D'après cette définition, la distance du point générateur à chacun des points directeurs est constante et égale à l'une des directrices.

Nous prendrons les trois plans directeurs d'un même système pour plans directeurs; par cette hypothèse, les coordonnées de chaque point directeur, et les coordonnées correspondantes du point générateur seront toujours entre elles dans un même rapport, celui des parties de la droite mobile que comprennent ces mêmes points; cela est évident, puisque tous ces points sont en ligne droite, et placés, à l'exception d'un seul, sur les trois plans coordonnés.

Si le point générateur, au lieu de décrire toute la surface du second degré, n'en doit parcourir que l'intersection avec un cylindre du même degré, et dont l'axe soit parallèle à l'une des directrices, la trace de ce cylindre sur le plan directeur où n'est pas cette directrice, sera une courbe du second degré, ce sera la projection même de la courbe d'intersection. Or, les coordonnées d'une courbe qui sont égales aux coordonnées correspondantes de la projection pour les coordonnées du point *directeur* qui est sur le plan de cette projection, sont toujours dans le même rapport avec les coordonnées correspondantes d'une courbe du *second* degré; donc elles sont elles-mêmes les coordonnées d'une courbe du second degré.

Si la courbe parcourue par le point générateur, sur la surface du second degré, est en outre sur un cylindre du second degré dont l'axe est parallèle à une seconde directrice, elle se trouvera nécessairement sur un troisième cylindre du second degré dont l'axe est parallèle à la troisième *directrice* : ce que nous venons de démontrer pour un seul cylindre aura lieu également pour tous les trois, c'est-à-dire, qu'en considérant un des systèmes des plans directeurs comme plans coordonnés, si le point générateur parcourt sur la surface une courbe dont les *projections* soient des courbes du second

second degré, les points *directeurs*, ou les traces de la droite mobile sur les plans directeurs, formeront sur ces plans des courbes du second degré.

J'observe qu'une courbe ne peut se projeter suivant une courbe du second degré, sur trois plans directeurs d'un même système, sans que ces plans soient les plans principaux de la surface. Ainsi le théorème que nous venons d'exposer, n'est applicable qu'au système des plans directeurs qui se coupent à angles droits.

On conclurait facilement de cette propriété, que l'intersection de deux surfaces du second ordre qui ont les mêmes plans principaux, se projette sur ces plans suivant des courbes du second degré, et symétriques aux mêmes axes, &c.

L'application de ces propriétés à celles des lignes de courbure est évidente.

Traitons maintenant les mêmes questions par l'analyse.

Soient $\left\{\begin{array}{l}\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \ (1), \\ \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 = \delta' \ (2),\end{array}\right\}$ les équations de deux surfaces du second degré dont les axes sont placés sur les lignes des coordonnées.

φ étant une constante arbitraire quelconque, on aura pour équation générale des surfaces du second ordre qui passent par la même courbe que les deux premières,

$$(\alpha - \varphi\alpha')x^2 + (\beta - \varphi\beta')y^2 + (\gamma - \varphi\gamma')z^2 = \delta - \varphi\delta' \ (3).$$

Il est évident qu'on peut mener par cette courbe une infinité de surfaces du second ordre qui aient mêmes plans principaux que les deux premières, puisqu'à chaque valeur de φ correspond une surface différente, donnée par cette équation générale (3).

Soient de plus $\left\{\begin{array}{lll} x', & x'', & 0, \\ y', & 0, & y''', \\ 0, & z'', & z'''\end{array}\right\}$ les coordonnées de la droite mobile des surfaces (3), quand cette droite rencontre les plans des xy, des xz, yz.

Les axes de la surface représentée par l'équation (3), les parties de la droite mobile comprises par le point générateur x, y, z de la surface, et les plans des xy, xz, yz seront égaux à X, Y, Z. Donc on aura les proportions suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll} x - x' & : x - x'' & : x \\ y - y' & : y & : y - y''' \\ z & : z - z'' & : z - z'''\end{array}\right\} :: X : Y : Z;$$ proportions qui donnent

$$\frac{x - x'}{x} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{x - x''}{x} = \frac{Y}{Z},$$

$$\frac{y - y'}{y} = \frac{X}{Y}, \quad \frac{y - y'''}{y} = \frac{Z}{Y},$$

d'où l'on tire : $\frac{z-z''}{z} = \frac{Y}{X}$, $\frac{z-z'''}{z} = \frac{Z}{X}$

$$x = x' \cdot \frac{Z}{Z-X}, \quad x = x'' \cdot \frac{Z}{Z-Y}$$

(4). $y = y' \cdot \frac{Y}{Y-X}$, $y = y''' \cdot \frac{Y}{Y-Z}$, si l'on fait successivement

$$z = z'' \cdot \frac{X}{X-Y}, \quad z = z''' \cdot \frac{X}{X-Z},$$

$\varphi = \lambda$ $\left\{\begin{array}{l} \varphi' = \frac{\gamma}{\gamma'} \\ \varphi'' = \frac{\beta}{\beta'} \\ \varphi''' = \frac{\alpha}{\alpha'''} \end{array}\right.$ l'équation (3) deviendra (5) $\left\{\begin{array}{l} (\alpha - \varphi'\alpha')x^2 + (\beta - \varphi'\beta')y^2 = \delta - \varphi'\delta' \ldots (\alpha - \varphi'\alpha')\left(\frac{Z}{Z-X}\right)^2 x'^2 \\ \quad + (\beta - \varphi'\beta')\left(\frac{Y}{Y-X}\right)^2 y'^2 = \delta - \varphi'\delta', \\ (\alpha - \varphi''\alpha')x^2 + (\gamma - \varphi''\gamma')z^2 = \delta'' - \varphi''\delta'' \ldots (\alpha - \varphi''\alpha')\left(\frac{X}{X-Y}\right)^2 x''^2 \\ \quad + (\gamma - \varphi''\gamma')\left(\frac{X}{X-Y}\right)^2 z''^2 = \delta - \varphi''\delta', \\ (\beta - \varphi'''\beta')y^2 + (\gamma - \varphi'''\gamma')z^2 = \delta - \varphi'''\delta' \ldots (\beta - \varphi'''\beta')\left(\frac{Y}{Y-Z}\right)^2 y'''^2 \\ \quad + (\gamma - \varphi'''\gamma')\left(\frac{X}{X-Z}\right)^2 z'''^2 = \delta - \varphi'''\delta'. \end{array}\right.$

Or ces équations, qui sont du second degré, sont celles de la trace de la droite mobile sur chacun des plans principaux. Donc, &c. Poursuivons.

Les équations d'une surface du second ordre et celles de ses lignes de courbure étant

$$\left.\begin{array}{l} b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2, \\ n^2x^2 + m^2y^2 = m^2n^2, \\ n'^2x^2 + m'^2y^2 = m'^2n'^2, \end{array}\right\}$$ n.° 23, feuilles d'analyse appliquée à la génération des surfaces courbes (*Monge*),

on aura $\left\{\begin{array}{llll} " & " & \alpha = n^2, & \alpha' = n'^2, \\ X = a, & \beta = m^2, & \beta' = 0, & \\ Y = b, & \gamma = 0, & \gamma' = m'^2 & \\ Z = c, & \delta = m^2n^2, & \delta' = m'^2n'^2, & \end{array}\right.$

et les équations (5) deviendront $\left\{\begin{array}{l} n^2\left(\frac{c}{c-a}\right)^2 x'^2 + m^2\left(\frac{b'}{b-a}\right)^2 y'^2 = m^2n^2, \\ n'^2\left(\frac{c}{c-b}\right)^2 x''^2 + m'^2\left(\frac{a}{a-b}\right)^2 z''^2 = m'^2n'^2. \end{array}\right.$

Ces équations sont celles de la trace que laissera la droite mobile sur les plans directeurs des xy et des yz.

Elles ont pour axes $m\frac{c-a}{c}$, $n\frac{b-a}{b}$, $m'\frac{c-b}{c}$, $n'\frac{a-b}{b}$, quantités évidemment dans un rapport constant aux axes m, n, m', n' des projections.

Appelons N, M, N', M' ces nouveaux axes : puisqu'on a entre les deux premiers la relation $m^2 \pm An^2 = B$, on aura $M^2\frac{c}{c-a} \pm AN^2\frac{b}{b-a} = B$. Cette équation est celle d'une section conique ; et en regardant m, n comme variables, si l'on construit cette section conique, celles de ses coordonnées correspondantes à un même point seront les axes de la courbe parcourue par la droite mobile sur le plan des xy, quand son point générateur décrit une des lignes de courbure de la surface. On ferait le même raisonnement relativement au plan des yz.

Si maintenant, dans le plan des xz, on conçoit une droite mobile sur laquelle le point générateur soit distant de l'axe des x d'une quantité égale à n, de l'axe des y d'une quantité égale à m; qu'on conçoive de même la droite analogue dans le plan des yz pour le point $m'n'$, distant du premier de $b + cx$, z et des yz.

En fixant la droite mobile qui décrit la surface sur les deux points générateurs qu'on obtiendra aussi, et en faisant ensuite mouvoir les trois droites d'une manière quelconque, le point générateur de la droite mobile qui décrit la surface ne décrira plus qu'une des lignes de courbure de la surface, et décrira successivement toutes ces lignes, en supposant que les deux premières droites prennent successivement toutes leurs dimensions possibles.

Suite du *MÉMOIRE de M. MALUS, sur l'OPTIQUE* (*).

DIOPTRIQUE.

[21.] LA Dioptrique a pour objet la recherche et la combinaison des phénomènes produits par la lumière réfractée.

Lorsque des rayons lumineux sont réfractés sur la surface plane ou courbe qui sépare deux milieux de densité différente, les lignes d'incidence et celles de réfraction font avec les normales, aux points d'incidence, des angles dont les sinus sont dans un rapport constant. Le plan qui passe par le rayon incident et par la normale, passe aussi par le rayon réfracté. C'est de ces principes, donnés par l'analyse et vérifiés par l'expérience, que se déduit toute la théorie de la Dioptrique.

Soient X, Y, Z, les coordonnées rectangulaires d'un point lumineux; les équations des projections d'un rayon de lumière seront

$$a(z - Z) = c(x - X) \qquad b(z - Z) = c(y - Y) \ldots\ldots (a).$$

Si ce rayon frappe en un point $x'y'z'$, une surface

$$F(x'y'z') = 0 \qquad p\,dx' + q\,dy' + r\,dz' = 0 \ldots\ldots (F),$$

il se réfractera suivant une ligne droite dont nous représenterons les équations par

$$m(z - z') = o(x - x') \qquad n(z - z') = o(y - y') \ldots\ldots (A).$$

Ces deux lignes forment avec la normale à la surface, au point $x'y'z'$, deux angles dont les sinus sont dans un rapport constant l; et l'on exprimera cette condition par l'équation

$$\frac{(cq - br)^2 + (ar - cp)^2 + (bp - aq)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)} = l^2 \frac{(oq - nr)^2 + (mr - op)^2 + (np - mq)^2}{(m^2 + n^2 + o^2)} \ldots (b).$$

En second lieu, le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface étant dans un même plan, on a

$$m(cq - br) + n(ar - cp) + o(bp - aq) = 0 \ldots\ldots (c).$$

(*) *Voyez* pages 1-44.

Les deux équations *(b) (c)* renferment les conditions qui doivent déterminer $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$, et l'on en tire

$$\frac{m}{o} = \frac{pr l^2 (a^2+b^2+c^2) + (cq-br)(bp-aq) \pm (ar-cp)[(p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)(l^2-1) + (ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2 r^2 (a^2+b^2+c^2) - (cq-br)^2 - (ar-cp)^2}$$

$$\frac{n}{o} = \frac{qr l^2 (a^2+b^2+c^2) + (ar-cp)(bp-aq) \pm (br-cq)[(p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)(l^2-1) + (ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2 r^2 (a^2+b^2+c^2) - (cq-br)^2 - (ar-cp)^2}$$

Le signe supérieur appartient au rayon réfracté, et le signe inférieur à une ligne qui fait un angle égal avec la normale, mais qui est située du côté opposé. On a donc

$$m = \lambda [pr l^2 (a^2+b^2+c^2) + (cq-br)(bp-aq) + (ar-cp)[(p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)(l^2-1) + (ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}]$$

$$n = \lambda [qr l^2 (a^2+b^2+c^2) + (ar-cp)(bp-aq) + (br-cq)[(p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)(l^2-1) + (ap+bq+cr)^2]^{\frac{1}{2}}]$$

$$o = \lambda [r^2 l^2 (a^2+b^2+c^2) - (cq-br)^2 - (ar-cp)^2];$$

λ étant un coëfficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Enfin, comme le point $x'y'z'$ est commun à la surface et au rayon incident, on a

$$a(z'-Z) = c(x'-X) \qquad b(z'-Z) = c(y'-Y),$$

et par conséquent

$$a = \lambda'(x'-X) \qquad b = \lambda'(y'-Y) \qquad c = \lambda'(z'-Z),$$

λ' étant un second coëfficient indéterminé qui s'évanouit du calcul.

Substituant les valeurs de a, b, c, dans les expressions de m, n, o, on aura ces dernières quantités en fonctions des coordonnées XYZ du point lumineux, et de celles $x'y'z'$ de la surface rencontrée par le rayon incident.

J'observe que si l'on considère la réfraction comme nulle; c'est-à-dire, si l'on fait $l = 1$, et si l'on prend le signe inférieur dans les expressions de $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$, on aura les valeurs de ces quantités pour le rayon réfléchi, telles qu'elles ont été déterminées précédemment (6).

[22.] D'après les résultats du paragraphe [2], le système des rayons

réfractés *(A)* peut être considéré comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables *(SS) (S'S')* qui coupent la surface réfringente *(F)*, suivant les deux séries de courbes *(ss) (s's')* [3]; et les points de rencontre de tous ces rayons se trouvent sur deux surfaces courbes *(Σ) (Σ')*, que nous nommerons, comme dans la Catoptrique, *surfaces caustiques*. Nous désignerons de même par *(CC) (C'C')* les systèmes de surfaces coniques formées par la suite des rayons incidens, qui, après leur réfraction, forment les surfaces développables *(SS) (S'S')*.

Si l'on substitue dans l'expression de cos. τ [4] les valeurs de m, n, o, on trouve qu'elles satisfont à l'équation de condition *(H)*, en sorte que les surfaces développables *(SS) (S'S')* se coupent toutes à angle droit, d'où l'on peut conclure que les surfaces *(CC) (C'C')* se coupent sous des angles variables.

Considérons actuellement un faisceau de lumière compris entre quatre des surfaces coniques *(CC) (C'C')* infiniment proches l'une de l'autre. Ce faisceau aura la forme d'une pyramide quadrangulaire obliquangle, comprenant entre ses arêtes deux petits angles i, i', et entre ses faces deux angles θ, $180 - \theta$. Lorsque ces rayons seront réfractés, ils seront compris dans une surface quadrangulaire rectangle, comprenant entre ses arêtes deux nouveaux angles $k\,k'$.

Soit Δ la distance $[(x' - X)^2 + (y' - Y)^2 + (z' - Z)^2]^{\frac{1}{2}}$ du point lumineux $X\,Y\,Z$ au point $x'y'z'$ de la surface;

D, la distance du point $x'y'z'$ à l'œil situé dans le prolongement du rayon réfracté.

La lumière qui parvient à l'œil après la réfraction, a parcouru depuis le point lumineux un espace exprimé par $D + \Delta$; et à cette distance, le faisceau de rayons parti du point lumineux aurait pour section perpendiculaire à son axe un quadrilatère obliquangle $(D+\Delta)^2\, ii' \sin.\, \theta$: mais ce faisceau, au point où se trouve l'œil, a pour section perpendiculaire à son axe, le quadrilatère rectangle $(D + R)\,k\,(D + R')\,k'$.

Or, comme l'intensité de la lumière est en raison inverse des surfaces sur lesquelles la même quantité de rayons est dispersée, elle se trouvera au lieu où est situé l'œil après la réfraction, relativement à ce qu'elle eût été à la distance $D + \Delta$, en partant directement du point lumineux dans le rapport de $(D + \Delta)^2\, ii' \sin.\theta$ à $(D \pm R)(D \pm R')\, kk'$. On pourra donc exprimer l'intensité de la clarté du point $x = X$ $y = Y$ $z = Z$, vu sur le point $x'y'z'$ de la surface, par

$$T = e\frac{(D+\Delta)^2\, ii' \sin.\theta}{(D \pm R)(D \pm R')\, kk'},$$

e étant un coëfficient constant qui dépend de la clarté absolue du point lumineux. Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du rapport $\frac{ii' \sin.\theta}{kk'}$.

Or, nous avons vu [8] que

$$\frac{f^2}{k^2} = \frac{(m^2+n^2+o^2)^2\,(ndx-mdy)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2\,(mdx-ndm)^2}\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(adx+bdy+cdz)^2}{(m^2+n^2+o^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(mdx+ndy+odz)^2}\right],$$

et par conséquent,

$$= \frac{RR'(m^2+n^2+o^2)}{\Delta^2(a^2+b^2+c^2)}\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(M^2+N^2+O^2)-(aM+bN+cO)^2}{(m^2+n^2+o^2)(M^2+N^2+O^2)-(mM+nN+oO)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(M'^2+N'^2+O'^2)-(aM'+bN'+cO')^2}{(m^2+n^2+o^2)(M'^2+N'^2+O'^2)-(mM'+nN'+oO')^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Quant à l'angle θ que forment entre elles les deux faces de la pyramide quadrangulaire comprise entre les quatre surfaces coniques $CCCC'$, j'observe que le plan tangent à la surface conique C, suivant le rayon incident (a), passe aussi par la ligne (D) [2] tangente à la courbe de réfraction (s), et que par conséquent son équation est

$$(bO-cN)(x-x')+(cM-aO)(y-y')+(aN-bM)(z-z')=0\ldots(aD).$$

Le plan tangent à la surface conique C', suivant le même rayon (a), a, par la même raison, pour équation

$$(bO-cN')(x-x')+(cM'-aO')(y-y')+(aN'-bM')(z-z')=0\ldots(aD'),$$

et ces deux plans comprennent entre eux l'angle θ dont le sinus est

$$\sin.\theta = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}\,[a(N'O-NO')+b(MO'-M'O)+c(M'N-MN')]}{[(a^2+b^2+c^2)(M^2+N^2+O^2)-(aM+bN+cO)^2]^{\frac{1}{2}}\,[(a^2+b^2+c^2)(M'^2+N'^2+O'^2)-(aM'+bN'+cO')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

En sorte que

$$T = e\,\frac{(D+\Delta)^2\,ii'\sin.\theta}{(D\pm R)\,(D\pm R')\,kk'} =$$

$$= e\,\frac{(D+\Delta)^2\,RR'\,(m^2+n^2+o^2)\,[a(N'O-NO')+b(MO'-M'O)+c(M'N-MN')]}{(D\pm R)(D\pm R')\Delta^2(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}[(m^2+n^2+o^2)(M^2+N^2+O^2)-(mM+nN+oO)^2]^{\frac{1}{2}}[(m^2+n^2+o^2)(M'^2+N'^2+O'^2)-(mM'+nN'+oO')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

On voit qu'abstraction faite du coëfficient de $e\,\frac{(D+\Delta)^2}{(D\pm R)\,(D\pm R')}$, l'intensité T de la lumière réfractée sera d'autant plus forte que $(D\pm R)$; $(D\pm R')$, seront plus petits, en sorte que le *maximum* d'intensité de lumière aura lieu pour les points où $D\pm R = 0$, $D\pm R' = 0$. Or, $D\pm R = 0$ est l'équation de la surface caustique (Σ); $D\pm R' = 0$ est l'équation de la surface caustique (Σ'); c'est donc à l'intersection de ces surfaces que se trouve le *maximum* de lumière réfractée : quand le lieu de cette intersection se réduit à un ou plusieurs points particuliers, on les nomme *foyers des rayons réfractés*.

Il y a une certaine famille de surfaces courbes pour lesquelles $\sin.\theta = 1$, et on a leur équation différentielle en égalant à l'unité la valeur de $\sin.\theta$; ce qui donne

$$(a^2+b^2+c^2)(MM'+NN'+OO')-(aM+bN+cO)(aM'+bN'+cO') = 0,$$

ou

$$\left[o\left(\frac{dn}{dx'}\right)-n\left(\frac{do}{dx'}\right)\right]\underset{[(a^2+b^2)pqq+cr(aq+bp)-abr^2]}{[a^2(q^2+r^2)+(bq+cr)^2]}+\left[o\left(\frac{dm}{dx'}\right)+n\left(\frac{do}{dy'}\right)-m\left(\frac{do}{dx'}\right)-o\left(\frac{dn}{dy'}\right)\right]\Bigg\}$$

$$+\left[m\left(\frac{do}{dy'}\right)-o\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right]\underset{[(a^2+c^2)pr+bq(ar+cp)-acq^2]}{[b^2(p^2+r^2)+(ap+cr)^2]}+\left[m\left(\frac{dn}{dx'}\right)+n\left(\frac{do}{dz'}\right)-n\left(\frac{dm}{dx'}\right)-o\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right]\Bigg\}=0,$$

$$+\left[n\left(\frac{dm}{dz'}\right)-m\left(\frac{dn}{dz'}\right)\right]\underset{[(b^2+c^2)qr+ap(br+cq)-bcp^2]}{[c^2(p^2+q^2)+(ap+bq)^2]}+\left[m\left(\frac{dn}{dy'}\right)+o\left(\frac{dm}{dz'}\right)-m\left(\frac{do}{dz'}\right)-n\left(\frac{dm}{dy'}\right)\right]\Bigg\}$$

équation aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale est

est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(x-X)\alpha+(y-Y)\varphi.\alpha+z-Z+(1+\alpha^2+\varphi^2.\alpha)^{\frac{1}{2}}\downarrow.[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2]\\ [(x-X)+(y-Y)\varphi'.\alpha](1+\alpha^2+\varphi^2.\alpha)^{\frac{1}{2}}+(\alpha+\varphi.\alpha\varphi'.\alpha)\downarrow.[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2]\end{array}\right\}=0\ldots f(K),$$

Φ et $\downarrow$ étant les deux fonctions arbitraires qu'elle comporte. Si l'on imagine une surface de révolution suspendue par un point fixe XYZ de son axe, et que cette surface vienne à osciller d'une manière quelconque autour de ce point, la surface qui enveloppera toutes ses positions sera la surface $f(K)$. En effet, lorsque l'axe de révolution vient à osciller en entraînant le plan d'un cercle générateur de la surface

$$(x-X)\alpha+(y-Y)\Phi\alpha+z-Z+(1+\alpha^2+\Phi\alpha^2)^{\frac{1}{2}}R;$$

la distance R de ce plan au point XYZ ne varie pas, mais seulement α; de même la distance

$$R'^2=(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2$$

des différens points du cercle générateur au point XYZ ne varie pas; donc

$$R=\downarrow R'.$$

Sur cette surface, les lignes de courbure se confondent avec les lignes de réflexion et de réfraction; par conséquent, les normales, les rayons réfléchis et les rayons réfractés sont tangens à une même surface conique qui a son centre au point lumineux XYZ, et qui est à-la-fois surface des centres, surface caustique de réflexion, et surface caustique de réfraction.

Cette équation appartient donc, en général, à toutes les surfaces qui ont pour une de leurs caustiques une surface conique quelconque.

Lorsque le point lumineux est situé à l'infini, les rayons incidens sont parallèles, et abc sont constans; alors l'intégrale de l'équation (K) est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations

$$(x-\alpha)^2c^2+(y-\varphi.\alpha)^2c^2+(a\alpha+b\varphi.\alpha+cz)^2=\downarrow(ax+by+cz)\ldots f(K'),$$
$$(x-\alpha)c^2+(y-\varphi.\alpha)c^2\varphi'.\alpha-(a+b\varphi'.\alpha)(a\alpha+b\varphi.\alpha+cz)=0.$$

Si l'on conçoit une surface de révolution quelconque dont l'axe se

meuve parallèlement à lui-même, en sorte que chacun des cercles générateurs reste dans un même plan, la surface qui enveloppera toutes ses positions sera la surface $f(K')$. Les normales, les rayons réfléchis ou réfractés sont tangens à une même surface cylindrique dont les arêtes sont parallèles aux rayons incidens.

[23.] Supposons d'abord que la surface (F) qui sépare les deux milieux diaphanes de densité différente, soit une surface plane $x' = 0$.

Supposons de plus

$$Y = 0,\ Z = 0,\quad \lambda = -\frac{1}{c}\qquad \lambda' = 1,$$

on aura

$$a = -X,\ b = y',\ c = z' \ldots p = 1,\ q = 0,\ r = 0,$$

et

$$m = [(y'^2 + z'^2)(l^2 - 1) + X^2 l^2]^{\frac{1}{2}}\quad n = y',\ o = z'.$$

Introduisant ces expressions dans les équations (s) (s'), [2] on aura

$$\alpha = 0, \beta = -o\frac{y'(l^2-1)}{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}},\ \gamma = n\frac{z'(l^2-1)}{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta = 0, \varepsilon = -n,\qquad \zeta = \frac{(y'^2-z'^2)(l^2-1)}{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}},\ L = \frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)}{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$M = 0,\ N = y'^2,\ O = y'z',\quad M' = 0,\quad N' = -z'^2,\quad O' = y'z',$$

enfin

$$dx' = 0,\qquad z'dy' - y'dz' = 0 \ldots\ldots\ldots (s),$$

$$dx' = 0,\qquad y'dy' + z'dz' = 0 \ldots\ldots\ldots (s').$$

Les intégrales de ces équations sont, en nommant A et B les constantes arbitraires qui les complètent,

$$x' = 0,\qquad y' = Az' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ss),$$

$$x' = 0,\qquad y'^2 + z'^2 = B^2 \ldots\ldots\ldots (s's').$$

La première série (ss) appartient à une suite de lignes droites tracées

dans le plan $x' = 0$, et passant par l'origine des coordonnées. La seconde série $(s's')$ a une suite de cercles concentriques tracés dans le même plan, et ayant leur centre à l'origine des coordonnées.

Si, entre les équations du rayon incident

$$-Xz' = z'(x - X),\quad y'z = z'y,\quad -Xy = y'(x - X)\ldots(a),$$

et celles des lignes (ss), on élimine $x'y'z'$, le résultat de l'élimination sera l'équation de la série de surfaces coniques (CC).

$$y = Az\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(CC).$$

Ces surfaces se réduisent à une suite de plans qui passent par l'axe des x.

Si, entre les mêmes équations (a) et celles des courbes $(s's')$, on élimine les mêmes quantités, le résultat sera l'équation des surfaces $(C'C')$.

$$B(x - X) = -X(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots(C'C'),$$

équation qui appartient à une suite de surfaces coniques circulaires concentriques.

Si, entre les équations du rayon réfracté

$$[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}(z-z')=z'x,\ y'z=z'y,\ [(y'^2+z'^2)(l^2-1)+(X^2l^2)]^{\frac{1}{2}}(y-y')=y'x\ldots(A),$$

et celles des lignes (ss), on élimine $x'y'z'$, on aura l'équation des surfaces développables (SS),

$$y = Az\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(SS);$$

et si, entre les mêmes équations (A) et celles des courbes $(s's')$, on élimine $x'y'z'$, on aura l'équation des surfaces développables $(S'S')$,

$$Bx = [B^2(l^2 - 1) + X^2l^2]^{\frac{1}{2}}[(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - B]\ldots(S'S'),$$

équation qui appartient à une suite de surfaces coniques circulaires, dont le centre est véritable, et dont l'axe est celui des x.

Pour déterminer les arêtes de rebroussement (σ) (σ') de ces surfaces développables et les surfaces caustiques (Σ) (Σ'), qui sont le lieu des points de rencontre de tous les rayons, il faut commencer par

substituer dans les équations *(G) (G')* [3], les valeurs de *MNO*, *M'N'O'*; ce qui donne

$$A = -\frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2}{X^2l^2}, \qquad A' = -1,$$

$$x = -\frac{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}{X^2l^2}\ y-y' = -y'\frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2}{X^2l^2}\ z-z' = -z'\frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2}{X^2l^2}\ldots(\text{G})$$

$$R = -(X^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}\frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2}{X^2l} = -\Delta\frac{(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2}{X^2l}\ldots(\text{R}),$$

$$x = -[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}, \quad y-y' = -y', \quad z-z' = -z'\ldots(\text{G}'),$$

$$R' = -l(X^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}} = -l\Delta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{R}').$$

Si, entre les équations *(ss)* et *(G)*, on élimine $x'y'z'$, on aura celles des arêtes de rebroussement *(σσ)* des surfaces développables *(SS)*.

$$x = -[z^{\frac{3}{2}}(1+A^2)^{\frac{3}{2}}(l^2-1)^{\frac{1}{2}}+X^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}},\ y = Az,\ x = -[y^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{2}}(l^2-1)^{\frac{1}{2}}+X^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}\ldots(\sigma\sigma).$$

Et si, entre ces dernières équations, on élimine la constante arbitraire *A*, on aura l'équation de la surface caustique *(Σ)*, qui est le lieu de toutes les arêtes de rebroussement.

$$x = -[(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(l^2-1)^{\frac{1}{3}}+X^{\frac{2}{3}}l^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Sigma).$$

Si, entre les équations *(s's')* et *(G')*, on élimine $x'y'z'$, on aura celles des arêtes de rebroussement *(σ'σ')* de la seconde série de surfaces développables *(S'S')*

$$x = -[B^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}, \quad y = 0, \quad z = 0\ldots\ldots\ldots(\sigma'\sigma'),$$

qui se réduisent à une suite de points situés sur l'axe des x, et dont le lieu est la seconde caustique *(Σ')*.

$$y = 0, \qquad z = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Sigma').$$

Nous répéterons ici, relativement au lieu apparent du point lumineux, l'observation que nous avons faite dans la Catoptrique; c'est-à-dire que ce point paraîtra au lieu où les rayons réfractés se rencontrent,

et que sa distance apparente se composera des deux distances de l'œil aux points où le rayon réfracté touche les deux caustiques (Σ) (Σ').

Or, si le point lumineux est dans le milieu le moins dense, et l'œil dans le milieu le plus dense, on aura $l > 1$; les moindres valeurs de R et R' seront celles qui ont lieu pour le cas où $y'^2 + z'^2 = 0$, et seront $-R = -R' = l\Delta > \Delta$; donc on aura toujours R et $R' > \Delta$. Ainsi le point lumineux ou le corps éclairé paraîtront toujours plus éloignés de la surface réfringente qu'ils ne le sont en effet.

Au contraire, si l'œil est placé dans le milieu le moins dense, et le point lumineux dans le milieu le plus dense, on aura $l < 1$; $l^2 - 1$ sera une quantité négative, et les plus grandes valeurs de R et R' auront lieu lorsque $y'^2 + z'^2 = 0$, et seront $-R = -R' = l\Delta < \Delta$; donc on aura toujours R et $R' < \Delta$. Ainsi le point lumineux ou le corps éclairé paraîtront toujours plus proches de la surface qu'ils ne le sont en effet.

Si $(y'^2 + z'^2)(l^2 - 1) + X^2 l^2 = 0$, on a $R = 0$, $R' = (y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$, et dans les équations (G) (G') $x = 0$. Passé ce terme, les valeurs de R et de x sont imaginaires ; d'où l'on doit conclure qu'alors les rayons ne sont plus réfractés. Ainsi, lorsque la tangente de l'angle d'incidence $\frac{(y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}{X}$ sera plus grande que $\frac{l}{(1 - l^2)^{\frac{1}{2}}}$, les rayons cesseront d'être réfractés : et en effet, l'expérience confirme que, passé cette inclinaison, les rayons sont tous réfléchis.

La surface réfringente proposée est évidemment une solution particulière de l'équation (K) [22].

Quant au terme qui exprime l'intensité de la clarté du point lumineux, on a

$$T = e\,\frac{(D+\Delta)^2}{(D-R)(D-R')}\cdot\frac{ii'\sin.\theta}{kk'} = e\,\frac{(D+\Delta)^2 l^2 X[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2 l^2]^{\frac{1}{2}}}{[lX^2 D+\Delta[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+l^2X^2]](D+l\Delta)}.$$

Supposons toujours le point lumineux dans le milieu le plus dense, en sorte qu'on ait $l < 1$.

Si $D = 0$, on aura

$$T = e\frac{lX}{[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}} > e;$$

et si $D = \infty$,

$$T = e\frac{l[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}{X} < e.$$

Toutes les valeurs de T sont comprises entre ces deux limites, et l'on conçoit que pour une certaine valeur de D, on aura $T = e$. Cette valeur est la racine positive de l'équation

$$\frac{(D+\Delta)^2(l^2X)[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}{[lX^2D+\Delta[(y'^2+z'^2)(l^2-1)+X^2l^2]](D+l\Delta)} = 1.$$

[24.] Supposons actuellement que la surface qui sépare les deux milieux de densité différente, soit une surface de révolution; nous placerons, comme dans le cas précédent, le point lumineux dans l'axe des x, et nous supposerons que cet axe soit celui de la surface. On aura donc

$$Y=0,\ Z=0,\ a=x'-X,\ b=y',\ c=z',\ \Delta^2=(x'-X)^2+y'^2+z'^2.$$

L'équation $F(x'y'z') = 0$ de la surface réfringente sera

$$y'^2+z'^2=\Phi(x'),\quad 2y'dy'+2z'dz'=\Phi'(x').dx'.$$

$\Phi(x')$ ou Φ étant une fonction arbitraire de x', on en déduit $p=\Phi'$, $q=-2y'$, $r=-2.z$. Substituant dans les expressions générales de mno [21], et faisant $\lambda = \frac{1}{z'[4l^2\Delta^2-(\varphi'+2a)^2]}$;

$$m=-\frac{2\varphi'l^2\Delta^2+(\varphi'+2a)[(\varphi'^2+4\varphi)\Delta^2(l^2-1)+(a\varphi'-2\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}{4l^2\Delta^2-(\varphi'+2a)^2}=\psi(x'),\ n=y',\ o=z';$$

introduisant ces expressions dans les équations (s) (s') [2], on aura

$$M=2y'\varphi,\quad N=y'^2\varphi',\quad O=y'z'\varphi',\qquad M'=0,\quad N'=-z'^2\varphi',\quad O'=y'z'\varphi',$$
$$2\varphi dz'=z'\varphi'dx',\qquad y'dz'=z'dy'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(s),$$
$$dx'=0,\qquad y'dy'+z'dz'=0\ldots\ldots\ldots\ldots(s').$$

Les intégrales de ces équations sont, en nommant AB les constantes arbitraires qui les complètent,

$$z'^2(1+B^2)=\Phi(x'), \qquad y'=Bz'.....(ss),$$
$$x'=A, \qquad y'^2+z'^2=\Phi(A)....(s's').$$

La première série de courbes (ss) appartient à la suite des méridiens de la surface, et la seconde série de courbes $(s's')$ à la suite des cercles compris dans les plans perpendiculaires à l'axe des révolutions.

Si, entre les équations du rayon incident

$$(x'-X)z=z'(x-X), \quad y'z=z'y, \quad (x'-X)y=y'(x-X)...(a),$$

et celles des courbes (ss), on élimine $x'y'z'$, le résultat sera la série des surfaces coniques (CC),

$$y=Bz.....(cc),$$

qui se réduisent à une suite de plans qui passent par l'axe de révolution.

Si, entre les mêmes équations (a) et celles des courbes $(s's')$, on élimine les mêmes quantités, on a l'équation des surfaces coniques $(C'C')$,

$$(A-X)^2(y^2+z^2)=(x-X)^2\Phi(A).....(c'c').$$

Ces surfaces sont une suite de cônes à base circulaire, dont l'axe est celui de révolution, et qui ont leur centre placé au point $x=X'$, $y=0$, $z=0$.

Si, entre les équations du rayon réfracté,

$$\downarrow(x')(z-z')=z'(x-x'), \quad y'z=z'y, \quad y'(x-x')=\downarrow(x')(y-y')...(A),$$

et celles des courbes (ss), on élimine $x'y'z'$, on a la série de surfaces développables (SS).

$$y=Bz.....(SS).$$

Si, entre les mêmes équations et celles des courbes $(s's')$, on élimine $x'y'z'$, on a l'équation des surfaces développables $(S'S')$

$$\downarrow^2(A)(y^2+z^2)=\Phi(A)[x-A+\downarrow(A)]^2.....(S'S').$$

Ces surfaces sont une suite de cônes à base circulaire, qui ont p
axe celui de révolution, et dont le centre varie pour chaque val
de la constante arbitraire *(A)*.

Pour déterminer les arêtes de rebroussement $(\sigma\sigma)$ $(\sigma'\sigma')$ de surfaces développables, et les surfaces caustiques (Σ) (Σ'), qui s le lieu des points de rencontre de tous les rayons, il faut comm cer par substituer dans les équations *(G)* *(G')* [3] les valeurs de MN $M'N'O'$; ce qui donne

$$\Lambda = -\frac{\downarrow\varphi' - 2\varphi}{\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow'}, \qquad \Lambda' = -1,$$

$$x - x' = -\downarrow\frac{\downarrow\varphi' - 2\varphi}{\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow'}, \quad y - y' = -y'\frac{\downarrow\varphi' - 2\varphi}{\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow'}, \quad z - z' = -z'\frac{\downarrow\varphi' - 2\varphi}{\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow'} \ldots\ldots(1$$

$$R = (m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\Lambda = -(\downarrow^2 + \varphi)^{\frac{1}{2}}\frac{\downarrow\varphi' - 2\varphi}{\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow'} \ldots\ldots(1$$

$$x - x' = -\downarrow, \qquad y - y' = -y', \qquad z - z' = -z' \ldots\ldots(1$$

$$R' = (m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}\Lambda' = -(\downarrow^2 + \varphi)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, entre les équations *(ss)* *(G)*, on élimine $x'y'z'$, on aura, com dans le paragraphe [9], un résultat de la forme

$$\ldots\ldots z^2(1 + B^2) = \chi x, \qquad y = Bz \ldots\ldots\ldots(6$$

Et si, entre ces deux équations, on élimine la constante arbitraire on aura l'équation de la surface caustique (Σ),

$$y^2 + z^2 = \chi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1$$

Si, entre les équations $(s's')$ (G'), on élimine $x'y'z'$, on aura c des arêtes de rebroussement $(\sigma'\sigma')$,

$$x = A - \downarrow(A), \qquad y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots(\sigma'$$

qui se réduisent à une suite de points situés sur l'axe des x, et le lieu est la seconde caustique (Σ'),

$$y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1$$

Les points où les caustiques (Σ) (Σ') se rencontrent, et qui

do

donnés par l'équation $\chi(x) = 0$, sont [22] ceux où le *maximum* de lumière est réuni, et se nomment *foyers des rayons réfractés.*

Si l'on veut déterminer sur la surface $y'^2 + z'^2 = \Phi(x')$ les courbes (s) (s') [5], qui sont le lieu des points particuliers des lignes de réfraction (ss) $(s's')$, pour lesquels deux rayons consécutifs cessent de se rencontrer dans le même sens, il faudra substituer dans les équations (s) (s') les valeurs de MNO, $M'N'O'$; on aura alors

$$\downarrow\Phi' - 2\Phi\downarrow' = 0, \qquad y'^2 + z'^2 = \Phi(x') \ldots\ldots (s),$$

équations d'un cercle qui, en réfractant les rayons, forme une surface conique (Σ) asymptote à deux nappes de la surface caustique (Σ). On aura en outre,

$$y'z' = 0, \quad y'^2 + z'^2 = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \ldots (s').$$

Ces équations appartiennent au point de la surface rencontrée par l'axe de révolution. Il faut cependant observer que, comme ces équations donnent $\frac{n}{m} = 0$, $\frac{o}{m} = 0$, on pourra y satisfaire en faisant $m = \pm\infty$, ou

$$4l^2\Delta^2 - (\Phi' + 2a)^2 = 0, \qquad y'^2 + z'^2 = \Phi(x') \ldots (s'),$$

équation d'un cercle qui réfractera tous les rayons parallèlement à l'axe de révolution.

Quant au nombre T qui exprime l'intensité de clarté de l'image du point lumineux, on aura

$$T = e\,\frac{(D+\Delta)^2(\downarrow^2+\varphi)^{\frac{3}{2}}(\downarrow\varphi' - 2\varphi)\,[2\varphi - (x'-X)\varphi']}{[D(\downarrow\varphi' - 2\varphi\downarrow') \mp (\downarrow^2+\varphi)^{\frac{1}{2}}(\downarrow\varphi' - 2\varphi)][D \mp (\downarrow^2+\varphi)^{\frac{1}{2}}]\Delta^3[(\downarrow^2+\varphi)(4\varphi+\varphi'^2) - \varphi(2\downarrow+\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

[25.] Proposons-nous de déterminer la surface de révolution pour laquelle les rayons partant du point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, se réfracteront tous parallèlement à l'axe, ou celle pour laquelle les rayons parallèles à l'axe se réfracteront tous vers un même foyer situé au point

$x = X$, $y = 0$, $z = 0$. On y parviendra dans l'un et l'autre cas en faisant $\frac{n}{m} = 0$ $\frac{o}{m} = 0$, ou

$$4l^2\Delta^2 - (\varphi' + 2a)^2 = 0.$$

Si l'on substitue dans cette expression pour φ' sa valeur $\frac{2y'dy' + 2z'dz'}{dx'}$, elle devient

$$dx'\{(x' - X) - l[(x' - X)^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}\} + y'dy' + z'dz' = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$y'^2 + z'^2 + (x' - X)^2 - [l(x' - X) + a]^2 = 0,$$

et qui appartient à tous les ellipsoïdes de révolution dont le foyer est au point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$. Le grand axe étant celui de révolution, et égal à $\frac{a}{1 - l^2}$, et le petit axe égal à $\frac{a}{(1 - l^2)^{\frac{1}{2}}}$, les coordonnées du centre étant $x = X + \frac{al}{1 - l^2}$, $y = 0$, $z = 0$, a est la constante arbitraire qui particularise chacun de ces ellipsoïdes.

Déterminons actuellement la surface de révolution telle que tous les rayons partis du point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$, se réfractent vers un foyer commun $x = X'$, $y = 0$, $z = 0$.

Les équations des rayons réfractés étant

$$m(z - z') = o(x - x'), \qquad m(y - y') = n(x - x'),$$

on exprimera que ces rayons passent par le point $x = X'$, $y = 0$, $z = 0$, par la condition

$$-mz' = o(X' - x'), \qquad -my' = n(X' - x');$$

équations identiques, qui deviennent, en substituant pour mno, leurs valeurs

$$2\varphi' l^2\Delta^2 + (\varphi' + 2a)\{(\varphi'^2 + 4\varphi)\Delta^2(l^2 - 1) + [(x' - X)\varphi' + 2\varphi]^2\}^{\frac{1}{2}} + \{4l^2\Delta^2 - [\varphi' + 2(x' - X)]^2\}(x' - X') = 0.$$

Or, si l'on substitue pour φ' sa valeur $\frac{2y'dy' + 2z'dz'}{dx'}$, cette expression devient

$$dx'\{(x' - X)[(x' - X')^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}} + (x' - X')[(x' - X)^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}.l\} +$$
$$(y'dy' + z'dz')\{[(x' - X')^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}} + [(x' - X)^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}.l\} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$[(x'-X)^2+y'^2+\zeta'^2]^{\frac{1}{2}}+[(x'-X')^2+y'^2+\zeta'^2]^{\frac{1}{2}}.l=\beta,$$

β étant la constante arbitraire qui la complète.

[26.] Soit la surface de révolution proposée, une sphère d'un rayon ρ ayant son centre à l'origine des coordonnées. L'équation *(F)* de la surface réfringente sera

$$x'^2+y'^2+\zeta'^2=\rho^2,$$

d'où l'on tire

$$\varphi(x')=\rho^2-x'^2,\ \varphi'(x')=-2x',\ \Delta^2=(x'-X)^2+y'^2+\zeta'^2=\rho^2-2x'X+X^2;$$

substituant dans les expressions de mno [24], on a

$$m=\frac{x'l^2(\rho^2-2x'X+X^2)+X[\rho^2l^2(\rho^2-2x'X+X^2)+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}}{l^2(\rho^2-2x'X)+X^2(l^2-1)}=\psi(x'),\ n=y',\ o=\zeta',$$

$$\zeta'^2(1+B^2)+x'^2=\rho^2,\qquad y'=B\zeta'.....(ss),$$

$$y'^2+\zeta'^2+A^2=\rho^2,\qquad x'=A.....(s's'),$$

$$y=B\zeta.....(CC),$$

$$(A-X)^2(y^2+\zeta^2)=(x-X)^2(\rho^2-A^2).....(C'C'),$$

$$y=B\zeta.....(SS),$$

$$[A^2(\rho^2-2AX+X^2)+X[\rho^2l^2(\rho^2-2AX+X^2)+X^2(A^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}]^2(y^2+\zeta^2)=$$

$$[\rho^2-A^2][(x-A)[l^2(\rho^2-2AX)+X^2(l^2-1)]+A[\rho^2-2AX+X^2)+X[\rho^2l^2(\rho^2-2AX+X^2)+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}]^2.....(S'S'),$$

$$\psi(x')=\frac{X^2(l^2\Delta^2-X^2)(x'X+l^2\rho^2)+2l^2x'^2X^4+[l^2\Delta^2(l^2\Delta^2-X^2)+2l^2x'X^3][\rho^2l^2\Delta^2+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}}{(l^2\Delta^2-X^2)^2[\rho^2l^2\Delta^2+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$A=-\frac{x'l^2\Delta^2+x'X[\rho^2l^2\Delta^2+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}+(\rho^2-x'^2)(l^2\Delta^2-X^2)}{x'l^2\Delta^2+x'X[\rho^2l^2\Delta^2+X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}+(\rho^2-x'^2)(l^2\Delta^2-X^2)\psi'},\qquad A'=-1,$$

$$x=x'+A\psi,\qquad y=y'(1+A),\qquad \zeta=\zeta'(1+A).....(G),$$

$$R=(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}A=(\psi^2+\varphi)^{\frac{1}{2}}A=\frac{l\Delta[x'X+[\rho^2l^2\Delta^2+X^2(x'^2-\rho'^2)]^{\frac{1}{2}}]}{l^2\Delta^2-X^2}A...(R),$$

$$x=x'-\psi,\qquad y=0,\qquad \zeta=0.....(G'),$$

$$R'=(m^2+n^2+o^2)^{\frac{1}{2}}A'=-(\psi^2+\varphi)^{\frac{1}{2}}=-\frac{l\Delta[x'X+[\rho^2l^2\Delta^2-X^2(\rho^2-x'^2)]^{\frac{1}{2}}]}{l^2\Delta^2-X^2}.....(R'),$$

Si entre les équations (ss) et (G) on élimine $x'y'z'$, on aura les équations des arêtes de rebroussement $(\sigma\sigma)$; et si entre les mêmes équations (G) et l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2$, on élimine les mêmes quantités, on aura l'équation de la surface caustique (Σ). Mais, sans avoir recours à cette élimination, nous pouvons considérer simplement les cercles générateurs de cette surface qui sont formés par les intersections consécutives des surfaces $(S'S')$. On aura donc l'équation de ces cercles en éliminant $x'y'z'$ entre les équations $(s's')$ et (G); ce qui donne, en représentant par $\downarrow$ et Λ ce que deviennent ces quantités, en y substituant A pour x',

$$x = A + \downarrow.\Lambda, \qquad y^2 + z^2 = (\rho^2 - A^2)(1 + \Lambda)^2 \ldots (\Sigma s's').$$

Si on élimine la constante arbitraire A entre ces deux équations, le résultat sera la surface caustique.....(Σ).

Si entre les équations $(s's')$ et (G') on élimine $x'y'z'$, on aura

$$x = -X\frac{AX + [\rho^2 l^2(\rho^2 - 2AX + X^2) - X^2(\rho^2 - A^2)]^{\frac{1}{2}}}{l^2(\rho^2 - 2AX + X^2) - X^2}, \quad y = 0, \quad z = 0 \ldots (\sigma'\sigma'),$$

pour équations des arêtes de rebroussement des surfaces développables $(S'S')$. Ces courbes se réduisent à une série de points situés sur l'axe des x. L'équation de la caustique (Σ'), qui est le lieu de toutes ces arêtes, est

$$y = 0, \qquad z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Sigma').$$

En substituant les valeurs de $\Phi\,\Phi'\downarrow\downarrow'$, on aura pareillement les équations des courbes (s) (s'), et l'expression du nombre T qui représente l'intensité de lumière.

[27.] Supposons actuellement que le rayon lumineux

$$a(z - Z) = c(x - X), \qquad b(z - Z) = c(y - Y) \ldots\ldots (a),$$

après s'être réfracté au point $x'y'z'$ de la surface $F(x'y'z') = 0$, suivant la ligne

$$m(z - z') = o(x - x'), \qquad n(z - z') = o(y - y') \ldots (A),$$

sorte du milieu qu'il avait pénétré, pour passer dans un troisième milieu terminé par une surface

$$F(x,y,z)=0, \quad p\,dx+q\,dy+r\,dz=0,$$

il sera de nouveau réfracté et dirigé suivant une ligne

$$m(z-z)=o(x-x), \quad n(z-z)=o(y-y)\ldots(A).$$

Le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction étant une nouvelle constante l, on aura, pour déterminer $m\,n\,o$, les deux conditions

$$\frac{(oq-nr)^2+(mr-op)^2+(np-mq)^2}{(m^2+n^2+o^2)}=l^2\,\frac{(oq-nr)^2+(mr-op)^2+(np-mq)^2}{(m^2+n^2+o^2)}\ldots(b),$$

$$m(oq-mr)+n(mr-op)+o(np-mq)=0\ldots\ldots\ldots(c),$$

d'où l'on tire [21]

$$\begin{aligned}
&=\lambda\{pl^2(m^2+n^2+o^2)+(oq-nr)(np-mq)+(mr-op)[(p^2+q^2+r^2)(m^2+n^2+o^2)(l^2-1)+(mp+nq+or)^2\\
&=\lambda\{ql^2(m^2+n^2+o^2)+(mr-op)(np-mq)+(nr-oq)[(p^2+q^2+r^2)(m^2+n^2+o^2)(l^2-1)+(mp+nq+or)^2\\
&=\lambda[l^2r^2(m^2+n^2+o^2)-(oq-nr)^2-(mr-op)^2],
\end{aligned}$$

λ étant un coëfficient indéterminé qui s'évanouit du calcul. Enfin, comme le point x,y,z est sur le rayon (A), on aura

$$m(z-z')=o(x-x'), \quad n(z-z')=o(y-y').$$

Si entre ces deux équations, celles qui expriment [21] les valeurs de $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$ et l'équation $F(x'y'z')=0$, on élimine $x'y'z'$, on aura $\frac{m}{o}$ $\frac{n}{o}$ en fonction de x,y,z; et ces nouvelles valeurs étant substituées dans les expressions précédentes de m,n,o, on aura ces dernières en fonction des coordonnées XYZ du point lumineux, et celles x,y,z du point où se fait la seconde réfraction.

D'après le résultat du paragraphe [2], les nouveaux rayons réfractés (A) peuvent être considérés comme le lieu de l'intersection des deux systèmes de surfaces développables (SS) (SS') qui coupent la surface réfringente (F) suivant les deux séries de courbes (ss) $(s's')$ [3], et les points de rencontre de ces rayons se trouvent sur deux surfaces caustiques (Σ) (Σ').

Enfin, si le même système des rayons *(a)* a traversé un nombre $n+1$ de surfaces séparant un nombre $n+1$ de milieux différens, on aura un résultat analogue au précédent, en changeant $_{,}m\ _{,}n\ _{,}o$ en $_{„}m\ _{„}n\ _{„}o$, et $m\ n\ o$ en $_{„-1}m\ _{„-1}n\ _{„-1}o$, en sorte qu'en sortant du dernier milieu, ces rayons pourront toujours être regardés comme le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables $_{„}(SS)\ _{„}(S'S')$, et leurs points de rencontre seront situés sur deux surfaces caustiques $_{„}(\Sigma)\ _{„}(\Sigma')$. Nous observerons que la dernière des surfaces réfringentes peut toujours être déterminée par la condition que les deux surfaces caustiques $_{„}(\Sigma)\ _{„}(\Sigma')$ se réduisent à un seul point.

Si l'on substitue les valeurs précédentes de $_{,}m\ _{,}n\ _{,}o$ dans l'équation *(H)*, cette équation n'est plus satisfaite, en sorte que le système des surfaces $_{,}(SS)\ _{,}(S'S')$ n'est pas rectangulaire comme celui des surfaces $(SS)\ (S'S')$ formé après la première réfraction. Pour simplifier le calcul de cette démonstration, on observera, comme nous l'avons déjà fait, que, les valeurs de $_{,}m\ _{,}n\ _{,}o$ étant indépendantes de la position des coordonnées, on peut supposer que le rayon réfracté $_{,}(A)$ est dans un des axes des coordonnées, dans l'axe des z, par exemple; ce qui donne $_{,}m = 0$, $_{,}n = 0$. L'équation (H) devient alors

$$_{,}r\left(\frac{d_{,}n}{d_{,}x}\right) - {}_{,}p\left(\frac{d_{,}n}{d_{,}z}\right) + {}_{,}q\left(\frac{d_{,}m}{d_{,}z}\right) - {}_{,}r\left(\frac{d_{,}m}{dy}\right) = 0 \ldots {}_{,}(\mathrm{H}).$$

D'un autre côté, on déduit des conditions $_{,}m = 0$, $_{,}n = 0$,

$$\frac{m_{,}r - o_{,}p}{{}_{,}p} = \frac{n_{,}r - o_{,}q}{{}_{,}q} = -{}_{,}l(m^2 + n^2 + o^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad n_{,}p - m_{,}q = 0,$$

$$_{,}r\left(\frac{d_{,}n}{dm}\right) - {}_{,}p\left(\frac{d_{,}n}{do}\right) + {}_{,}q\left(\frac{d_{,}m}{do}\right) - {}_{,}r\left(\frac{d_{,}m}{dn}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d_{,}m}{d_{,}p}\right) = \left(\frac{d_{,}n}{d_{,}q}\right) = -\frac{{}_{,}r}{{}_{,}p}\left(\frac{d_{,}m}{d_{,}r}\right) = -\frac{{}_{,}r}{{}_{,}q}\left(\frac{d_{,}n}{d_{,}r}\right) \quad \left(\frac{d_{,}m}{d_{,}q}\right) = 0 \quad \left(\frac{d_{,}n}{d_{,}p}\right) = 0,$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d_{,}n}{d_{,}x}\right) = \left(\frac{d_{,}n}{d_{,}q}\right)\left(\frac{d_{,}q}{d_{,}x}\right) + \left(\frac{d_{,}n}{d_{,}r}\right)\left(\frac{d_{,}r}{d_{,}x}\right) + \left(\frac{d_{,}n}{dm}\right)\left(\frac{dm}{d_{,}x}\right) + \left(\frac{d_{,}n}{dn}\right)\left(\frac{dn}{d_{,}x}\right) + \left(\frac{d_{,}n}{do}\right)\left(\frac{do}{d_{,}x}\right)$$

$$\left(\frac{d_{,}m}{d_{,}p}\right)\left[\left(\frac{d_{,}q}{d_{,}x}\right) - \frac{{}_{,}q}{{}_{,}r}\left(\frac{d_{,}r}{d_{,}x}\right)\right] + \left(\frac{d_{,}n}{dm}\right)\left[1 - \left(\frac{dx'}{d_{,}x}\right)\right] - \left(\frac{d_{,}n}{dn}\right)\left(\frac{dy'}{d_{,}x}\right) - \left(\frac{d_{,}n}{do}\right)\left(\frac{dz}{d_{,}}\right.$$

On a pour $\left(\frac{d,n}{d,z}\right)$, $\left(\frac{d,m}{d,z}\right)$, $\left(\frac{d,m}{d,y}\right)$, des valeurs analogues, en sorte que l'équation (H) devient

$$\left[r\left(\frac{d,q}{d,x}\right)-q\left(\frac{d,r}{d,x}\right)+p\left(\frac{d,r}{d,y}\right)-r\left(\frac{d,p}{d,y}\right)+q\left(\frac{d,p}{d,z}\right)-p\left(\frac{d,q}{d,z}\right)\right]\left(\frac{dm}{dp}\right)=$$
$$+\left(\frac{d,m}{dm}\right)\left[q\left(\frac{dx'}{d,z}\right)-r\left(\frac{dx'}{d,y}\right)\right]+\left(\frac{d,n}{dm}\right)\left[r\left(\frac{dx'}{d,x}\right)-p\left(\frac{dx'}{d,z}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{d,m}{dn}\right)\left[q\left(\frac{dy'}{d,z}\right)-r\left(\frac{dy'}{d,y}\right)\right]+\left(\frac{d,n}{dn}\right)\left[r\left(\frac{dy'}{d,x}\right)-p\left(\frac{dy'}{d,z}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{d,m}{do}\right)\left[q\left(\frac{dz'}{d,z}\right)-r\left(\frac{dz'}{dy,}\right)\right]+\left(\frac{d,n}{do}\right)\left[r\left(\frac{dz'}{d,x}\right)-p\left(\frac{dz'}{d,z}\right)\right]$$

Le premier membre de cette équation se réduit à zéro, parce que $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$ est la différentielle de l'équation $F(x\,y\,z) = 0$; mais les autres termes ne se réduisent pas en général, parce que les coëfficiens différentiels partiels $\left(\frac{dx'}{d,x}\right)$, $\left(\frac{dy'}{d,x}\right)$, $\left(\frac{dz'}{d,x}\right)$, &c. dépendent de la forme des surfaces réfringentes. Dans le cas d'une simple réfraction, les coordonnées $x\,y\,z$ sont remplacées par les coordonnées $x'y'z'$, et ces dernières, par les coordonnées $X\,Y\,Z$ du point lumineux; et les quantités $X\,Y\,Z$ étant constantes, tous les termes de l'équation (H) se réduisent d'eux-mêmes, ce qui revient au cas que nous avons considéré [22].

On conclut de ces résultats, que si les rayons émanés d'un point lumineux sont réfractés par un nombre quelconque de surfaces courbes, séparant autant de milieux différens, le système de ces rayons, dans chacun de ces milieux, sera le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables, qui, en général, ne seront rectangulaires qu'après la première réfraction.

Réciproquement, si, en regardant comme un point le foyer des rayons qui pénètrent dans l'œil, on considère le système des rayons qui émanent d'un corps de forme et de grandeur quelconque, et qui sont destinés à parvenir à l'œil après avoir été réfractés par un nombre quelconque de surfaces courbes, tous ces rayons, en s'élançant du

corps lumineux, forment un système de lignes droites qui est le lieu de l'intersection de deux systèmes de surfaces développables. Dans chacun des milieux proposés, les points de rencontre de tous les rayons sont situés sur deux surfaces courbes, et avant la dernière réfraction, le système des surfaces développables étant rectangulaire, les surfaces caustiques sont le lieu des centres de courbure d'une surface particulière.

Après la dernière réfraction, ces rayons sont le lieu d'une infinité de systèmes de surfaces coniques concentriques. Si l'on considère l'enveloppe de ces surfaces, on aura une surface conique particulière tangente à l'image du corps. Enfin, si l'on imagine une sphère concentrique à cette surface, les arcs de grand cercle décrits sur la portion de cette sphère comprise dans le cône mesureront les angles visuels sous lesquels l'image sera aperçue; et le rapport de ces angles à ceux sous lesquels les mêmes parties de l'objet seraient vues dans un milieu homogène, donnera le rapport de la grandeur apparente à la grandeur réelle. Ces résultats sont communs aux rayons réfléchis et aux rayons réfractés, et, en général, à ceux qui auraient éprouvé un certain nombre de réflexions et de réfractions.

[28.] Nous avons vu [24] qu'en supposant le point lumineux dans l'axe d'une surface de révolution $y'^2 + z'^2 = \Phi(x')$, on avait la position du foyer des rayons réfractés, en faisant dans les équations (G) ou (G'), $\Phi(x') = 0$; ce qui donne, en représentant par ξ la valeur de x qui en résulte, et par x' la valeur de x' qui résulte de $\Phi(x') = 0$,

$$\xi = x' + \frac{\varphi' l(x' - X)}{2(x' - X)(l - 1) - \varphi'}, \quad y = 0, \quad z = 0 \ldots (f).$$

Si ces rayons rencontrent une nouvelle surface réfringente $y^2 + z^2 = \Phi(x)$ terminant un troisième milieu, tel que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction soit l, en représentant par ξ la valeur de x qui

qui correspond à la position du foyer, et par $_1x$ la coordonnée du sommet de la surface, on aura pareillement

$$_1\xi = {}_1x + \frac{{}_1\varphi' {}_1l({}_1x - \xi)}{2({}_1x - \xi)({}_1l - 1) - {}_1\varphi'},$$

et enfin, après un nombre $n + 1$ de réfractions à travers un nombre $n + 1$ de surfaces de révolution ayant le même axe, séparant des milieux de différentes densités, et dont les équations seraient

$$y'^2 + z'^2 = \Phi(x'), \quad {}_1y^2 + {}_1z^2 = {}_1\Phi({}_1x) \ldots {}_ny^2 + {}_nz^2 = {}_n\Phi({}_nx),$$

la position $x = {}_n\xi$ du foyer sera

$${}_n\xi = {}_nx + \frac{{}_n\varphi' {}_nl({}_nx - {}_{n-1}\xi)}{2({}_nx - {}_{n-1}\xi)({}_nl - 1) - {}_n\varphi'};$$

Ainsi les diverses positions des foyers pour chacune de ces surfaces sont les différens termes d'une espèce de suite récurrente, dont le terme général est l'expression précédente de $_n\xi$, et qui contient autant de fonctions arbitraires que de termes.

[29.] On appelle *lentille* un solide formé par une substance diaphane comprise entre deux surfaces de révolution qui ont le même axe. Ces surfaces sont convexes ou concaves, selon que leurs rayons de courbure sont tournés vers l'intérieur du solide, ou vers l'extérieur.

Lorsqu'on considère les rayons réfractés par les deux faces d'une lentille, ces rayons, après l'avoir traversée, rentrent dans le milieu où ils étaient avant la première réfraction; en sorte que, si le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est l, lorsque le rayon se réfracte sur la première surface de la lentille, il sera $\frac{1}{l}$ sur la seconde: on aura donc, en représentant les deux surfaces par

$$y'^2 + z'^2 = \Phi(x'), \quad {}_1y^2 + {}_1z^2 = {}_1\Phi({}_1x),$$

le foyer ξ des rayons après la première réfraction

$$\xi = x' + \frac{\varphi' l(x' - X)}{2(x' - X)(l - 1) - \varphi'},$$

et après la seconde, en rentrant dans le premier milieu,

$$,\xi = ,x + \frac{,\varphi'\left[,x - x' - \frac{\varphi' l(x' - X)}{2(x' - X)(l-1) - \varphi'}\right]}{2\left[,x - x' - \frac{\varphi' l(x' - X)}{2(x' - X)(l-1) - \varphi'}\right](1-l) - ,\varphi' l} \quad \ldots\ldots (fl).$$

$x' - ,x$ exprime la portion de l'axe de révolution comprise entre les deux surfaces, c'est-à-dire, l'épaisseur de la lentille; en sorte que, si la lentille est très-mince, on peut négliger ce terme, et l'on a

$$,\xi = x' + \frac{,\varphi'\varphi'(x' - X)}{2(,\varphi' - \varphi')(x' - X)(l-1) - \varphi',\varphi'} \quad \ldots\ldots (flm).$$

Enfin, si $\Phi' = ,\Phi'$, c'est-à-dire, si les deux surfaces sont semblables,

$$,\xi = X.$$

Si les deux surfaces se réduisent à deux plans, on a

$$\Phi' = \infty, \; ,\Phi' = \infty;$$

substituant dans l'équation (fl), elle devient

$$,\xi = X - (x' - ,x)\frac{(l-1)}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (flp),$$

équation qui se réduit à $,\xi'' = X$ quand l'épaisseur $x' - ,x$ est très-petite.

On voit, d'après ce résultat, qu'une lentille plane rapproche l'image du point lumineux d'une quantité $(x' - ,x)\frac{(l-1)}{l}$ qui est d'autant plus grande que l'épaisseur $(x' - ,x)$ et le rapport l sont plus grands.

L'expression (fl) peut servir à déterminer ce foyer après la réfraction des rayons à travers un nombre n de lentilles de différentes formes et de matières différentes; car il est évident, d'après cette expression, que si les rayons sont réfractés par une seconde lentille dont les surfaces sont

$$,,y^2 + ,,z^2 = ,,\Phi(,,x), \qquad ,,,y^2 + ,,,z^2 = ,,,\Phi(,,,x),$$

et pour laquelle le rapport du sinus de réfraction à celui d'incidence est égal à $,l$, la position $_{,}\xi$ du foyer sera

$$_{,}\xi = {}_{,,}x + \frac{{}_{,,}\varphi'\left[{}_{,,}x - {}_{,}x - \frac{{}_{,}\varphi'\,{}_{,}l({}_{,}x - \xi)}{2({}_{,}x - {}_{,}\xi)({}_{,}l - 1) - {}_{,}\varphi'}\right]}{2\left[{}_{,}x - {}_{,}x - \frac{{}_{,}\varphi'\,{}_{,}l({}_{,}x - {}_{,}\xi)}{2({}_{,}x - {}_{,}\xi)(l-1) - {}_{,}\varphi'}\right](1 - {}_{,}l) - {}_{,,}\varphi'\,{}_{,}l},$$

et enfin, en général, n indiquant le nombre des lentilles,

$$\xi = {}_{2n-2}x + \frac{{}_{2n-1}\varphi'\left[{}_{2n-1}x - {}_{2n-2}x - \frac{{}_{2n-2}\varphi'\,{}_{n-1}l({}_{2n-2}x - {}_{n-1}\xi)}{2({}_{2n-2}x - {}_{n-1}\xi)({}_{n-1}l-1) - {}_{2n-2}\varphi'}\right]}{2\left[{}_{2n-1}x - {}_{2n-2}x - \frac{{}_{2n-2}\varphi\,{}_{n-1}l({}_{2n-2}x - {}_{n-1}\xi)}{2({}_{2n-2}x - {}_{n-1}\xi)({}_{2n-2}l-1) - {}_{2n-2}\varphi'}\right](1 - {}_{n-1}l) - {}_{2n-1}\varphi'\,{}_{n-1}l}.$$

[30.] Si la lentille proposée est une sphère $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2$, on aura $\varphi' = -2x' = -2\rho$, $_{,}\varphi' = -2\,{}_{,}x = 2\rho$; substituant dans l'expression *(fl)* du paragraphe précédent, on obtient, pour la coordonnée $_{,}\xi$ du foyer,

$$\xi = \frac{\rho l X}{\rho l - 2X(l-1)}.$$

$$\text{Si } X = \infty \ldots\ldots \xi = -\rho\frac{l}{2(l-1)},$$

$$X = \frac{\rho l}{l-1} \ldots\ldots \xi = -\frac{\rho l}{l-1} = -X,$$

$$X = \frac{\rho l}{2(l-1)} \ldots \xi = \mp\infty,$$

$$X = \rho \ldots\ldots\ldots \xi = \rho\frac{l}{2-l}.$$

Jusqu'ici les rayons incidens sont regardés comme divergens du point dont les coordonnées sont $x' = X$, $y = 0$, $z = 0$. Dans le cas où $X = \rho$, et où, par conséquent, ce point est sur la surface même de la lentille, on peut regarder les rayons comme divergens de ce point ou convergens vers ce point. Mais si $X < \rho$, alors les rayons incidens ne doivent plus être regardés que comme convergens vers le

point $x = X$, $y = 0$, $z = 0$. On a donc, pour les rayons convergens,

$$X = \rho \ldots\ldots \xi = \rho\frac{l}{2-l},$$
$$X = 0 \ldots\ldots \xi = 0,$$
$$X = -\rho \ldots \xi = -\rho\frac{l}{3l-2};$$
$$X = -\infty \ldots \xi = -\rho\frac{l}{2(l-1)};$$

Ainsi les foyers des rayons divergens sont compris entre les limites $-\rho\frac{l}{2(l-1)}$, $-\infty$, $+\infty$, $\rho\frac{l}{2-l}$, et ceux des rayons convergens entre les limites $\rho\frac{l}{2-l}$, 0, $-\rho\frac{l}{2(l-1)}$.

Considérons actuellement le cas d'une lentille terminée par deux surfaces sphériques $(x'-\alpha)^2+y'^2+z'^2=\rho^2$, $(x-\beta)^2+y^2+z^2=\rho^2$; on aura $\Phi'=-2(x'-\alpha)$, $\Phi'=-2(x-\beta)$, comme $x'=\alpha\pm\rho$, $x=\beta\pm\rho$, $\Phi'=-2(\pm\rho)$, $\Phi'=-2(\pm\rho)$, le signe supérieur ayant lieu pour l'une ou l'autre surface lorsqu'elle est convexe du côté du point lumineux, et le signe inférieur lorsqu'elle est concave vers ce point.

Si l'on substitue les valeurs précédentes de Φ', Φ' dans l'expression (fl); et si l'on nomme e l'épaisseur $x'-x$, on aura

$$\xi = x - \frac{\rho[(x'-X)(\rho l-el+e)-\rho e]}{(x'-X)[e(l-1)^2+(\rho-\rho)l(l-1)]+\rho e(l-1)+\rho\rho l};$$

en remarquant que les quantités ρ et ρ comportent les signes $\pm$ dans les cas précités.

Si l'on suppose l'origine des coordonnées sur la seconde face de la lentille, c'est-à-dire, si l'on fait $x=0$, ou $x'=e$, l'expression précédente devient

$$\xi = \frac{\rho[(e-X)(\rho l-el+e)-\rho e]}{(e-X)[e(l-1)^2+(\rho-\rho)l(l-1)]+\rho e(l-1)+\rho\rho l}.$$

Enfin, si l'épaisseur e de la lentille est assez petite par rapport à ρ, ρ

et X pour qu'on puisse la négliger,

$$,\xi = -\frac{\rho\,,\rho X}{X[(,\rho-\rho)(l-1)-\rho\rho']};$$

Si l'on donne à-la-fois à ρ et $,\rho$ le signe positif ou négatif, cette expression désignera le foyer pour la lentille dont les deux faces sont à-la-fois convexes ou concaves du côté du point lumineux; c'est-à-dire, pour la lentille convexe-concave.

Si ρ est positif et $,\rho$ négatif, cette expression appartiendra à la lentille convexe; et si ρ est négatif et $,\rho$ positif, cette expression appartiendra à la lentille concave.

Supposons que la lentille soit convexe, et que les rayons ρ et $,\rho$ soient égaux, on aura $,\rho$ négatif et $= -\rho$.

$$,\xi = -\frac{\rho X}{2X(l-1)-\rho}.$$

Si $X = \infty$ ..... $,\xi = -\rho\frac{l}{2(l-1)}$;

$X = \rho\frac{1}{(l-1)}$ .... $,\xi = -\rho\frac{1}{(l-1)} = -X$,

$X = \rho$ ..... $,\xi = -\rho\frac{1}{2l-3}$,

$X = \rho\frac{1}{2(l-1)}$ ... $,\xi = \mp\infty$,

$X = \frac{\rho}{2}$ ..... $,\xi = \rho\frac{1}{2(2-l)}$;

$X = 0$ ..... $,\xi = 0$,

$X = -\rho$ ..... $,\xi = -\rho\frac{1}{2l-1}$,

$X = \infty$ ..... $,\xi = -\rho\frac{1}{2(l-1)}$;

Ainsi les foyers des rayons divergens seront compris entre $-\rho\frac{1}{2(l-1)}$, $-\infty, +\infty$, 0, et ceux des rayons convergens entre 0 et $-\rho\frac{1}{2(l-1)}$.

On peut faire un calcul semblable pour les lentilles convexes-concaves, et les lentilles concaves, et l'on obtiendra les résultats qui leur sont particuliers.

[31.] Nous avons déterminé le foyer des rayons réfractés dans un système de lentilles quelconque, et ce foyer appartient évidemment aux rayons réfractés les plus rapprochés de l'axe : mais, si nous considérons les rayons incidens qui forment une surface conique circulaire donnée, ayant le même axe que la lentille, on conçoit, d'après les résultats du paragraphe [24], que ces rayons, après leur réfraction, auront sur le même axe un foyer particulier ; en sorte que, si l'on suppose la lentille limitée par un des cercles de révolution d'un rayon E, tous les rayons incidens sur sa surface antérieure auront, après avoir traversé la seconde surface, une suite de foyers situés sur l'axe, et qui occuperont une portion de cette ligne.

Cette portion de ligne dont nous allons déterminer la longueur, est le foyer de tous les rayons émanés du point lumineux après leur réfraction : on l'appelle, dans les lentilles terminées par des surfaces sphériques, *aberration longitudinale de sphéricité;* et nous l'appellerons en général, pour une lentille quelconque, *aberration longitudinale de courbure.*

Soit donc une lentille terminée par deux surfaces de révolution

$$y'^2 + z'^2 = \Phi(x'), \qquad ,y^2 + ,z^2 = ,\Phi(,x),$$

la première étant la surface d'incidence, et la seconde celle d'émergence.

Nous avons vu [24] qu'en considérant x' comme une constante arbitraire, les rayons incidens sur le cercle

$$y'^2 + z'^2 = \Phi(x'),$$

étaient, après la première réfraction, compris dans une surface conique

$$\downarrow^2(x')(y^2 + z^2) = \Phi(x')[x - x' + \downarrow(x')]^2 \ldots\ldots (S'),$$

dont le centre est

$$x = x' - \downarrow(x') = \xi, \qquad y = 0; \qquad z = 0 \ldots\ldots (\sigma').$$

Cette surface conique coupe la seconde surface de révolution suivant

le cercle d'émergence, dont les équations sont, par conséquent,

$$\downarrow^2(x')\,{}_{,}\Phi({}_{,}x) = \Phi(x')[{}_{,}x - x' + \downarrow(x')]^2, \quad {}_{,}y^2 + {}_{,}z^2 = {}_{,}\Phi({}_{,}x)\ldots(ce).$$

La première de ces équations détermine ${}_{,}x$ en fonction de x', ou réciproquement.

Actuellement, si dans l'expression de $\downarrow(x')$ on change x' en ${}_{,}x$, φ en ${}_{,}\Phi$, X en ξ, et l en $\frac{1}{l}$ [27], on aura une expression ${}_{,}\downarrow({}_{,}x)$ telle que la surface conique qui comprend les rayons après la seconde réfraction, sera

$${}_{,}\downarrow^2({}_{,}x)(y^2 + z^2) = {}_{,}\Phi({}_{,}x)\,[x - {}_{,}x + {}_{,}\downarrow({}_{,}x)]^2 \ldots\ldots({}_{,}S').$$

Cette surface aura son centre au point

$$x = {}_{,}x - {}_{,}\downarrow({}_{,}x) = {}_{,}\xi, \quad y = 0, \quad z = 0\ldots\ldots({}_{,}\sigma').$$

Il est évident, d'après les équations (ce), que ${}_{,}\xi$ peut être regardé, soit comme une fonction de x', soit comme une fonction de ${}_{,}x$.

Si le diamètre de la lentille est $2E$, toutes les valeurs de x' seront comprises entre celles qui résultent des équations $\Phi(x') = 0$, $\Phi(x') = E^2$. Représentons les valeurs de ${}_{,}x$ qui y correspondent, par les signes ${}_{o}A\,A$, et celles de ${}_{,}\xi$ qu'on en déduit, par ${}_{o,}\xi\ {}_{,}\xi$; il est évident que toutes les valeurs de ${}_{,}\xi$ pour toute l'étendue de la lentille sont comprises entre ${}_{o,}\xi$ et ${}_{,}\xi$, en sorte que la portion de ligne par laquelle passent tous les rayons et qui représente leur foyer, ou enfin l'aberration longitudinale de courbure, $= {}_{,}\xi - {}_{o,}\xi$.

Lorsque la lentille est très-mince, on a sensiblement $y'^2 + z'^2 = {}_{,}y^2 + {}_{,}z^2$, et, par conséquent, $\Phi(x') = {}_{,}\Phi({}_{,}x)$. D'une autre part, ${}_{o,}\xi$ représentant la valeur de ${}_{,}\xi$ quand $\Phi(x') = E^2 = 0$, on pourra évidemment représenter la valeur de ${}_{,}\xi$ par une série

$${}_{,}\xi = {}_{o,}\xi + CE^2 + C'E^4 + C''E^6 + \&c\ldots$$

ordonnée suivant les puissances de E^2 ; et si la largeur de la lentille est

assez petite par rapport à $,\xi$, pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures de E^2, on aura

$$,\xi - {}_0,\xi = CE^2;$$

ce qui indique que, dans cette hypothèse, les aberrations longitudinales sont proportionnelles au carré des diamètres des lentilles, quelles que soient d'ailleurs leurs formes.

Si l'on conçoit dans le faisceau des rayons réfractés une suite de sections perpendiculaires à l'axe, chacun de ces cercles pourra encore être regardé comme le foyer des rayons réfractés ; et le plus petit de ces cercles, dont nous allons déterminer l'étendue, mesure l'aberration latitudinale de courbure.

Tous les rayons réfractés sont compris dans la surface caustique $(,\Sigma)$ tangente à tous les cônes $(,S')$, et qui se termine au point $x = {}_0,\xi$, et dans celui de ces cônes qui s'appuie sur le plus grand cercle d'émergence, et qui a son centre au point $x = ,\xi$.

C'est donc à l'intersection de ces deux surfaces que se trouve le cercle d'aberration latitudinale.

Or, on déterminera l'équation de la surface caustique $(,\Sigma)$ en éliminant $,x\ ,y\ ,z$ entre les équations analogues aux équations (G) [24]; et celle de la surface $,y^2 + ,z^2 = ,\Phi(,x)$, en observant d'y substituer la valeur de x' en fonction de $,x$: ce qui revient à éliminer x' et $,x$ entre les trois équations

$$\downarrow^2(x')\ ,\Phi(,x) = \Phi(x')\,[,x - x' - \downarrow(x')]^2 \ldots\ldots (ce),$$

$$x = ,x - ,\downarrow(,x)\frac{,\downarrow(,x)\,,\varphi'(,x) - 2,\varphi(,x)}{,\downarrow(,x)\,,\varphi'(,x) - 2,\varphi(,x)\,,\downarrow'(,x)} \ldots\ldots (G),$$

$$,\downarrow^2(,x)(y^2 + z^2) = ,\Phi(,x)\,[x - ,x + ,\downarrow(,x)]^2 \ldots\ldots (,S'),$$

équations qui donneront un résultat de la forme

$$y^2 + z^2 = \chi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (,\Sigma).$$

D'un autre côté, en nommant (A) la valeur de $,x$ qui répond à

$\varphi(x') = E^2$, l'équation de la surface conique qui s'appuie sur le plus grand cercle d'émergence, sera

$$\psi^2(A)(y^2 + z^2) = \varphi(A)[x - A + \psi(A)]^2 \ldots (SA).$$

On pourra donc regarder comme équations du cercle d'aberration latitudinale, les deux équations.

Cercle d'aberration latitudinale de courbure.
$$\begin{cases} \psi^2(A)\chi(x) = \varphi(A)[x - A + \psi(A)]^2, \\ y^2 + z^2 = \chi(x), \end{cases}$$

la première déterminant la valeur de x en fonction du diamètre de la lentille et de ses courbures, et la seconde déterminant le rayon du cercle proposé.

Lorsque la lentille est assez mince et assez peu étendue pour qu'on puisse lui appliquer les simplifications dont nous avons parlé, on détermine directement l'aberration latitudinale en fonction de l'aberration longitudinale. En effet, le cercle d'aberration latitudinale se trouve à l'intersection d'une des surfaces (S') et de la surface (SA); et considéré sous ce rapport, il a pour équations

$$\psi(A)\varphi^{\frac{1}{2}}(x)[x - x + \psi(x)] + \psi(x)\varphi^{\frac{1}{2}}(A)[x - A + \psi(A)] = 0,$$
$$\psi^2(A)(y^2 + z^2) = \varphi(A)[x - A + \psi(A)]^2,$$

équations dans lesquelles il s'agit seulement de déterminer la valeur de x qui satisfait à la condition proposée. Or, en nommant σ la valeur de ξ qui répond à la valeur cherchée de x, et observant qu'on a $\varphi(A) = E^2$, $A - \psi(A) = \xi$, $x - \psi(x) = \sigma$. La première de ces équations donne pour la valeur de x,

$$x = \frac{(A - \xi)\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\sigma + (x - \sigma)E\xi}{(A - \xi)\varphi^{\frac{1}{2}}(x) + (x - \sigma)E};$$

et en négligeant les quantités de l'ordre E^4, et par conséquent de l'ordre φ^2, cette équation se réduit à

$$x = \xi + \frac{\sigma\xi - \sigma}{\varphi(x)}[E\varphi^{\frac{1}{2}}(x) - \varphi(x)].$$

Mais, d'après ce que nous avons vu

$$\frac{{}_{,}\xi - {}_{,}\sigma}{{}_{,}\varphi(x)} = -C = \frac{{}_{,}\xi - {}_{,}\xi}{E^2};$$

donc

$$x = {}_{,}\xi + \frac{{}_{,}\xi - {}_{,}\xi}{E^2}[E\,{}_{,}\Phi^{\frac{1}{2}}(x) - {}_{,}\Phi(x)].$$

Il est évident actuellement que la valeur de x que nous cherchons est la plus grande de celles qui ont lieu pour les différentes valeurs de ${}_{,}\Phi(x)$. Si l'on fait donc $\frac{dx}{d\,{}_{,}\Phi(x)} = 0$, on obtiendra, pour la valeur de Φ qui donne le *maximum*, ${}_{,}\Phi^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{E}{2}$; et après la substitution, la valeur de x correspondante sera

$$x = {}_{,}\xi + \frac{{}_{,}\xi - {}_{,}\xi}{4};$$

d'où l'on voit que le cercle d'aberration latitudinale est éloigné du foyer des rayons extrêmes, du quart de l'aberration longitudinale. Substituant cette valeur de x dans l'équation (SA), on aura, pour le rayon de ce cercle,

$$(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{E}{{}_{,}\xi - A} \cdot \frac{{}_{,}\xi - {}_{,}\xi}{4} = \frac{CE^2}{4(A - {}_{,}\xi)}.$$

Il suffira donc, dans les lentilles très-minces et de peu d'étendue, de déterminer l'aberration longitudinale, et l'on en déduira l'aberration latitudinale. On doit observer que ce résultat est indépendant de la forme des fonctions Φ, ${}_{,}\Phi$, et, par conséquent, de la nature des surfaces qui terminent la lentille.

[32.] Il nous reste à considérer une autre espèce d'aberration qui provient de la différence des réfractions des rayons colorés de différentes espèces.

Soit l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les rayons les moins réfrangibles, et l' le rapport analogue pour les rayons les plus réfrangibles. Nommons A la valeur de ${}_{,}x$ qui résulte

de $\Phi(x') = E^2$ dans l'équation *(ce)*, et A' la valeur de x qui résulte $\varphi(x') = E^2$ dans la même équation lorsque l est changé en l'.

Les rayons émergens les moins réfrangibles seront compris dans la surface conique

$$\downarrow^2(A)(y^2 + z^2) = \varphi(A)[x - A + \downarrow(A)]^2 \ldots (SA),$$

dont le centre est

$$x = A - \downarrow(A) = \xi, \quad y = 0, \quad z = 0 \ldots (\sigma A);$$

et les rayons émergens les plus réfrangibles, dans la surface conique

$$\downarrow^2(A')(y^2 + z^2) = \varphi(A')[x + A' - \downarrow(A')]^2 \ldots (SA)',$$

dont le centre est

$$x = A' - \downarrow(A') = \xi', \quad y = 0, \quad z = 0 \ldots (\sigma A);$$

en observant que dans $\downarrow(A')$ et $\varphi(A')$ on doit mettre l' au lieu de l. Tous les rayons compris entre les moins réfrangibles et les plus réfrangibles auront des foyers $x = \xi$ compris entre ξ' et ξ, en sorte qu'on aura

L'aberration longitudinale de réfrangibilité

$$= \xi' - \xi = A' - A + \downarrow(A) - \downarrow(A'),$$

expression dans laquelle on peut observer que $A' - A$ est une quantité très-petite par rapport à l'épaisseur de la lentille et au terme $\downarrow(A) - \downarrow(A')$.

Quant au cercle d'aberration latitudinale de réfrangibilité, il se trouvera à l'intersection des deux surfaces coniques (SA) et $(SA)'$, et aura, par conséquent, pour équations,

Cercle d'aberration latitudinale de réfrangibilité,

$$x[\downarrow(A).\varphi^{\frac{1}{2}}(A') + \downarrow(A').\varphi^{\frac{1}{2}}(A)] = [A' - \downarrow(A')].\downarrow(A).\varphi^{\frac{1}{2}}(A') + [A - \downarrow(A)].\downarrow(A').\varphi^{\frac{1}{2}}(A),$$
$$\downarrow^2(A)(y^2 + z^2) = \varphi(A)[x - A + \downarrow(A)]^2;$$

la première déterminant la valeur de x en fonction du diamètre de la lentille de ses courbures et des rapports ll', et la seconde déterminant le rayon du cercle cherché.

[33.] Enfin, si l'on considère à-la-fois l'aberration de courbure et celle de réfrangibilité, en nommant $[\xi]$ la valeur de ξ pour les rayons les moins réfrangibles quand $\Phi(x') = 0$, (ξ') la valeur de ξ pour les rayons les plus réfrangibles quand $\Phi(x') = E^2$, on aura

Aberration longitudinale de courbure et de réfrangibilité

$$= (\xi') - [\xi].$$

Quant au cercle d'aberration latitudinale, il sera, à l'intersection des deux surfaces,

$$y^2 + z^2 = \chi(x),$$

$$\downarrow^2(A')(y^2 + z^2) = \Phi(A')[x - A + \downarrow(A')]^2;$$

et, par conséquent, les équations de ce cercle seront

Cercle d'aberration latitudinale de courbure et de réfrangibilité

$$\downarrow^2(A')\chi(x) = \Phi(A')[x - A' + \downarrow(A')]^2,$$

$$y^2 + z^2 = \chi x,$$

la première désignant la position x de ce cercle, et la seconde son rayon.

[34.] Appliquons cette théorie des aberrations aux lentilles terminées par des surfaces sphériques; soient ces deux surfaces

$$(x' - \alpha)^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2, \quad (x - \beta)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2;$$

la première étant la surface d'incidence, et la seconde celle d'émergence, on aura

$$\Phi(x') = \rho^2 - (x' - \alpha)^2, \quad \Phi'(x') = -2(x' - \alpha), \quad \Delta^2 = (x' - X)^2 + \rho^2 - (x' - \alpha)^2,$$

$$\varphi(x) = \rho^2 - (x - \beta)^2, \quad \varphi'(x) = -2(x - \beta), \quad \Delta^2 = (x - \xi)^2 + \rho^2 - (x - \beta)^2,$$

$$\downarrow(x') = \frac{(x' - \alpha)l^2\Delta^2 + (X - \alpha)\{\rho^2\Delta^2(l^2 - 1) + [(x' - \alpha)(X - \alpha) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{l^2\Delta^2 - (X - \alpha)^2},$$

$$\downarrow(x) = \frac{(x - \beta)\Delta^2 + l(\xi - \beta)\{\rho^2\Delta^2(1 - l^2) + l^2[(x - \beta)(\xi - \beta) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{\Delta^2 + l^2(\xi - \beta)^2}.$$

Il faut observer que ce radical comporte le signe $\pm$, parce que la quantité qu'il renferme peut être le carré d'une quantité positive, ou

celui d'une quantité négative; ce qui dépend, dans chaque cas, de la forme et de la position de la lentille.

$$\xi = x' - \downarrow(x') = \frac{\alpha l^2 \Delta^2 - x'(X-\alpha)^2 - (X-\alpha)\{\rho^2\Delta^2(l^2-1) + [(x'-\alpha)(X-\alpha) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{l^2\Delta^2 - (X-\alpha)^2} \quad \ldots(\sigma'),$$

$$= \left.\begin{array}{l} \dfrac{\xi[\rho^2 - (x'-\alpha)^2] + \beta(x'-\xi)^2 + (x'-\xi)\{[\rho^2 - (x'-\alpha)^2 + (x'-\xi)^2]\rho^2 - [\rho^2 - (x'-\alpha)^2](\beta-\xi)^2\}^{\frac{1}{2}}}{\rho^2 - (x'-\alpha)^2 + (x'-\xi)^2} \\ y^2 + z^2 = \rho^2 - (x-\beta)^2 \end{array}\right\} \ldots(\alpha\alpha),$$

$$= x - \downarrow(x) = \frac{\beta\Delta^2 - l^2 x(\xi-\beta)^2 - l(\xi-\beta)\{\rho^2\Delta^2(1-l^2) + l^2[(x-\beta)(\xi-\beta) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{\Delta^2 - l^2(\xi-\beta)^2} \quad \ldots(\sigma).$$

Les valeurs ${}_0A$ et ${}_1A$ de x qui correspondent aux équations

$$\Phi(x') = \rho^2 - (x'-\alpha)^2 = 0, \qquad \Phi(x') = \rho^2 - (x'-\alpha) = E^2,$$

seront

$${}_0A = \beta \pm \rho.$$

Le signe + ayant lieu quand la surface d'émergence est convexe du côté du point lumineux, et le signe — quand elle est concave vers ce point,

$$A = \frac{\xi E^2 + \beta(x'-\xi)^2 + (x'-\xi)\{[E^2 + (x'-\xi)^2]\rho^2 - E^2(\beta-\xi)^2\}^{\frac{1}{2}}}{E^2 + (x'-\xi)^2},$$

expression dans laquelle

$$= \frac{\alpha l^2[(x'-X)^2 + E^2] - x'(X-\alpha)^2 - (X-\alpha)\{\rho^2[(x'-X)^2 + E^2](l^2-1) + [(x'-\alpha)(X-\alpha) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{l^2[(x'-X)^2 + E^2] - (X-\alpha)^2},$$

et $x' = \alpha \pm (\rho^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}$, le signe + ayant lieu quand la surface d'incidence est convexe du côté du point lumineux, et le signe — quand elle est concave vers ce point;

$${}_0\xi = \frac{\beta({}_0A - {}_0\xi) + l\,{}_0A({}_0\xi - \beta)}{{}_0A - {}_0\xi + l({}_0\xi - \beta)},$$

expression dans laquelle

$${}_0\xi = \frac{\alpha l(x'-X) + x'(X-\alpha)}{l(x'-X) + (X-\alpha)},$$

et $x' = \alpha \pm \rho$, à cause de $\Phi(x') = 0$,

$$\frac{A[(A-\xi)^2 + \rho^2 - (A-\beta)^2] - l^2 A(\xi-\beta)^2 - l(\xi-\beta)\{\rho^2[(A-\xi)^2 + \rho^2 - (A-\beta)^2](1-l^2) + l^2[(A-\beta)(\xi-\beta) - \rho^2]^2\}^{\frac{1}{2}}}{(A-\xi)^2 + \rho^2 - (A-\beta)^2 - l^2(\xi-\beta)^2},$$

expression dans laquelle ξ a la valeur que nous lui avons déterminée dans l'expression de A.

Les quantités ${}_0\xi$ et ${}_1\xi$ étant déterminées en fonction de $X\,\alpha.\beta.\rho.{}_1\rho$ et du diamètre $2E$ de la lentille, on en déduit l'expression de l'aberration longitudinale de sphéricité

$$ {}_1\xi - {}_0\xi.$$

Quant à l'aberration latitudinale de sphéricité et aux aberrations de réfrangibilité, on substituera les valeurs précédentes de $\Phi\ {}_1\Phi\ \downarrow\ {}_1\downarrow$ dans les formules des paragraphes [31] et [32], et l'on parviendra toujours, par l'élimination, aux équations dont elles dépendent.

[35.] Commençons par appliquer les calculs des aberrations à une lentille plane, formée par deux plans parallèles $x' = 0\ {}_1x = -e$; on aura

$$\alpha = \infty, \qquad \beta = \infty,$$

$$\rho = \infty, \qquad {}_1\rho = \infty,$$

$$\varphi(x') = \rho^2 - (x' - \alpha)^2 = y'^2 + z'^2 = r'^2, \qquad {}_1\varphi({}_1x) = {}_1\rho^2 - ({}_1x - \beta)^2 = y^2 + z^2 = {}_1r^2,$$

$$\downarrow(x') = -[r'^2(l^2-1) + X^2 l^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad {}_1\downarrow({}_1x) = -\frac{[{}_1r^2(1-l^2) + (e+\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{l},$$

$$\xi = -\downarrow(x') = [r'^2(l^2-1) + X^2 l^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad {}_1\xi = -e + \frac{[{}_1r^2(1-l^2) + (e+\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{l},$$

$$\xi\ {}_1r = r'(e+\xi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ce).$$

Substituant la valeur de ${}_1r$ qui résulte de cette dernière condition dans les expressions de ${}_1\Phi(x)\ {}_1\downarrow(x)\ \xi$, elles deviendront en fonction de r',

$${}_1\varphi({}_1x) = (e+\xi)^2\frac{r'^2}{\xi^2}, \qquad \frac{d\,{}_1\varphi({}_1x)}{dr'} = {}_1\varphi'({}_1x) = \frac{2r'(e+\xi)}{\xi^4}[r'^2\xi(l^2-1) + (e+\xi)X^2l^2]$$

$${}_1\downarrow({}_1x) = -(e+\xi)\frac{X}{\xi}, \qquad \frac{d\,{}_1\downarrow({}_1x)}{dr'} = {}_1\downarrow'({}_1x) = \frac{eXr'(l^2-1)}{\xi^3},$$

$${}_1\xi = X - \frac{\xi - {}_1X}{\xi(1-\quad) - (\quad - 1)} \cdot$$

Si actuellement on considère les valeurs de ξ, ξ à leurs limites correspondantes à $r' = 0$, $r' = E$, E étant le demi-diamètre de la lentille, elles seront

$$r'=0 \ldots {}_0\xi = Xl, \qquad r'=E \ldots \xi = [E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r'=0 \ldots {}_0\xi = X - e\frac{l-1}{l}, \qquad r'=E \ldots \xi = X - e + \frac{eX}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}},$$

et enfin l'aberration longitudinale de courbure sera

$${}_0\xi - \xi = e\left\{\frac{1}{l} - \frac{X}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

On voit que les limites de cette aberration sont 0 quand $E = 0$, et $\frac{e}{l}$ quand $E = \infty$; ainsi elle sera toujours moindre que $\frac{e}{l}$, et d'autant moindre que le diamètre $2E$ de la lentille sera moins grand.

Quant à l'aberration latitudinale de courbure, il faudra commencer par éliminer r' entre les deux équations

$$X^2(y^2+z^2) = r'^2\left\{x + e - X - \frac{eX}{[r'^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2 \ldots (S');$$

$$x = X - e + \frac{eX^3l^2}{[r'^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots\ldots (G);$$

ce qui donnera à l'équation de surface caustique (Σ) tangente à tous les cônes (S'), que nous avons représentée par $y^2 + z^2 = \chi(x)$,

$$y^2 + z^2 = \frac{l^2}{(l^2-1)}\left[\frac{e^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}} - (x+e-X)^{\frac{2}{3}}\right]^3 \ldots\ldots (\Sigma).$$

Enfin l'on déterminera la position du cercle d'aberration latitudinale de courbure par l'équation

$$\frac{X^2l^2}{l^2-1}\left[\frac{e^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}} - (x+e-X)^{\frac{2}{3}}\right]^3 = E^2\left\{x + e - X - \frac{eX}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2;$$

et en substituant cette valeur de x dans l'équation (Σ), on aura la valeur $(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ du rayon du cercle cherché.

Pour déterminer les aberrations de réfrangibilité, on nommera l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les rayons les moins réfrangibles, l' le rapport analogue pour les rayons les plus réfrangibles.

Les rayons émergens les moins réfrangibles seront compris dans une surface conique

$$X^2(y^2+z^2)=E^2\left\{x+e-X-\frac{eX}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2 \quad \ldots(SA)$$

dont le centre est

$$\xi=X-e+\frac{eX}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots(\sigma A)$$

et les rayons émergens les plus réfrangibles, dans une surface conique

$$X^2(y^2+z^2)=E^2\left\{x+e-X-\frac{eX}{[E^2(l'^2-1)+X^2l'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2 \quad \ldots(SA)$$

dont le centre est

$$\xi'=X-e+\frac{eX}{[E^2(l'^2-1)+X^2l'^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots(\sigma'A)$$

On aura, par conséquent, pour l'aberration longitudinale de réfrangibilité,

$$\xi-\xi'=eX\left\{\frac{1}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{[E^2(l'^2-1)+X^2l'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\};$$

le cercle d'aberration longitudinale de réfrangibilité sera à l'intersection des deux surfaces (SA) $(SA)'$; et l'on aura, par conséquent, pour ses équations,

$$x=X-e+\frac{eX}{2}\left\{\frac{1}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{[E^2(l'^2-1)+X^2l'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$y^2+z^2=\frac{E^2e^2}{4}\left\{\frac{1}{[E^2(l^2-1)+X^2l^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{[E^2(l'^2-1)+X^2l'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2=\frac{E^2}{4X^2}(\xi-\xi')^2$$

d'où l'on conclut que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{le diamètre du cercle d'aberration}\\ \text{longitudinale de réfrangibilité}\end{array}\right\}=\frac{E}{X}\times\left\{\begin{array}{l}\text{l'aberration longitudinale de ré}\\ \text{frangibilité.}\end{array}\right.$$

[36.] Considérons, en second lieu, une lentille plane convexe terminé

terminée par les surfaces $x' = 0$, $(x-\beta)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$; et supposons la distance X du point lumineux $= \infty$: on aura $\alpha = \infty$, $\gamma = \infty$, $E^2 = \rho^2 - \beta^2$, ou $\rho^2 - \beta^2$; en substituant ρ à ρ pour simplifier,

$$\varphi(x') = \rho^2 - (x'-\alpha)^2 = y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2, \quad \varphi(x) = \rho^2 - (x-\beta)^2, \quad \varphi'(x) = -2(x-\beta),$$

$$\psi(x') = -\infty, \qquad \psi(x) = -\frac{(x-\beta) - l\,[\rho^2(1-l^2) + l^2(x-\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2-1},$$

$$\xi = \infty, \qquad \xi = x + \frac{(x-\beta) - l[\rho^2(1-l^2) + l^2(x-\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2-1}.$$

Si actuellement on considère les valeurs de ξ aux limites correspondantes à $\rho^2 - (x-\beta)^2 = 0$, ou $x - \beta = -\rho$, $\rho^2 - (x-\beta)^2 = E^2$, $x = x' = 0$, elles seront

$$\rho^2 - (x-\beta)^2 = 0 \ldots, \xi = \beta - \frac{\rho l}{l-1} \ldots \rho^2 - (x-\beta)^2 = E^2 \ldots, \xi = \frac{-\beta - l(\rho^2 - l^2E^2)^{\frac{1}{2}}}{l^2-1},$$

$$\xi - {}_0\xi = \frac{\rho l + l^2(\rho - \beta) - l(\rho^2 - l^2E^2)^{\frac{1}{2}}}{l^2-1}.$$

Si l'on développe le radical, et si la lentille est assez mince pour qu'on puisse négliger le carré et les puissances supérieures de son épaisseur $\rho - \beta$, on aura

$$\xi - {}_0\xi = \frac{l^2(\rho-\beta)}{l-1}, \text{ ou } \frac{l^2E^2}{(l-1)2\rho};$$

d'où l'on voit que, dans les lentilles planes convexes très-minces, l'aberration longitudinale est proportionnelle à leur épaisseur ou au carré de leur diamètre, ce que nous avons démontré pour le cas général [31].

Quant à l'aberration latitudinale, il faudra commencer par déterminer l'équation de la surface caustique (Σ), en éliminant x entre les deux équations;

$$\{x - \beta - l[\rho^2(1-l^2) + l^2(x-\beta)^2]^{\frac{1}{2}}\}^2 (y^2 + z^2) = [\rho^2 - (x-\beta)^2] \ldots$$

$$\{(x-x)(l^2-1) - (x-\beta) + l[\rho^2(1-l^2) + l^2(x'-\beta)^2]^{\frac{1}{2}}\}^2 \ldots\ldots\ldots (S'),$$

$$(x-x)(l^2-1)\rho^2 = \{x-\beta-l[\rho^2(1-l^2)+l^2(x'-\beta)^2]^{\frac{1}{2}}\}[\rho^2(1-l^2)+l^2(x-\beta)^2] \ldots (G),$$

et on combinera l'équation avec la suivante.

$$[\beta + l(\rho^2 - l^2E^2)^{\frac{1}{2}}]^2 (y^2 + z^2) = E^2\{x(l^2-1) + \beta + l[\rho^2 - l^2E^2]^{\frac{1}{2}}\} \ldots (SA),$$

qui est celle de la surface conique qui comprend les rayons extrêmes ; les valeurs de x et $(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ qu'on retirera de ces deux dernières équations, donneront la position et le rayon du cercle d'aberration latitudinale de courbure.

Pour déterminer les aberrations de réfrangibilité, on aura les équations

$$[\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}]^2 (y^2 + z^2) = E^2 [x(l^2 - 1) + \beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \ldots (SA),$$

$$\xi = \frac{-\beta - l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{l^2 - 1},$$

$$[\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}]^2 (y^2 + z^2) = E^2 [x(l'^2 - 1) + \beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \ldots (SA)',$$

$$\xi' = \frac{-\beta - l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{l'^2 - 1},$$

d'où l'on tire

$$\xi' - \xi = - \frac{\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{l'^2 - 1} + \frac{\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}}{l^2 - 1}.$$

Si la lentille est assez mince pour qu'on puisse négliger l'épaisseur $\rho - \beta$, par rapport à ρ, les expressions de ξ et de ξ' deviennent

$$\xi = - \frac{\rho}{(l - 1)}, \quad \xi' = - \frac{\rho}{l' - 1},$$

et, par conséquent,

$$\xi' - \xi = \rho \frac{l' - l}{(l - 1)(l' - 1)};$$

le cercle d'aberration latitudinale de réfrangibilité sera à l'intersection des deux surfaces (SA) $(SA)'$, et l'on aura, par conséquent, pour ses équations,

$$x \{ [\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l'^2 - 1) + [\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l^2 - 1) \} \ldots\ldots$$
$$= - 2 [\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] [\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$$y^2 + z^2 = E^2 \left\{ \frac{[\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l'^2 - 1) - [\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l^2 - 1)}{[\beta + l(\rho^2 - l^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l'^2 - 1) + [\beta + l'(\rho^2 - l'^2 E^2)^{\frac{1}{2}}] (l^2 - 1)} \right\}^2.$$

Si la lentille est assez mince pour qu'on puisse négliger l'épaisseur

$\rho - \beta$ par rapport à ρ, ces équations deviendront

$$x = \frac{-2\rho}{l+l'-2}, \qquad y^2 + z^2 = E^2\left(\frac{l'-l}{l+l'-2}\right).$$

[37.] Soit actuellement une lentille convexe formée par deux sections de sphère

$$(x'-\alpha)^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2, \qquad ({}_1x-\beta)^2 + {}_1y^2 + {}_1z^2 = {}_1\rho^2.$$

Si l'on prend pour diamètre de la lentille celui d'intersection des deux sphères, on aura, pour la position de ce cercle,

$$x' = {}_1x = \frac{\rho^2 - {}_1\rho^2 + \beta^2 - \alpha^2}{2(\beta-\alpha)},$$

et pour son rayon,

$$E^2 = \rho^2 - (x'-\alpha)^2 = \frac{2(\rho^2+{}_1\rho^2)(\beta-\alpha)^2 - (\rho^2-{}_1\rho^2)^2 - (\beta-\alpha)^4}{4(\beta-\alpha)^2},$$

$${}_0A = \beta - {}_1\rho, \qquad A = \frac{\rho^2 - {}_1\rho^2 + \beta^2 - \alpha^2}{2(\beta-\alpha)};$$

si

$$\rho = \rho', \quad E^2 = \rho^2 - \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}, \quad {}_0A = \beta - \rho, \quad A = \frac{\alpha+\beta}{2};$$

enfin, si

$$\alpha = -\beta, \quad E^2 = \rho^2 - \beta^2, \quad {}_0A = \beta - \rho, \quad A = 0,$$

$${}_0\xi = \frac{-\beta l(\rho-\beta-X) + (\rho-\beta)(X+\beta)}{l(\rho-\beta-X) + X + \beta},$$

$${}_1\xi = \frac{\beta(\beta-\rho-{}_0\xi) + l(\beta-\rho)({}_0\xi-\beta)}{(\beta-\rho-{}_0\xi) + l({}_0\xi-\beta)},$$

$$\xi = \frac{-\beta l^2(X^2+\rho^2-\beta^2) - (X+\beta)[\rho^2(X^2+\rho^2-\beta^2)(l^2-1) + (\rho^2-\beta^2-\beta X)^2]^{\frac{1}{2}}}{l^2(X^2+\rho^2-\beta^2) - (X+\beta)^2},$$

$$\xi = \frac{\beta(\xi^2+\rho^2-\beta^2) - l(\xi-\beta)[\rho^2(\xi^2+\rho^2-\beta^2)(1-l^2) + l^2(\rho^2-\beta^2+\beta\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}{\xi^2+\rho^2-\beta^2-l^2(\xi-\beta)^2}.$$

[38.] Nous avons démontré [8], [22], [27], qu'un faisceau de rayons incidens compris dans la petite pyramide quadrangulaire formée par quatre surfaces coniques $CCC'C'$ était, après la réflexion ou la réfraction, compris dans une surface quadrangulaire formée par

quatre surfaces développables $SSS'S'$ infiniment proches : mais la portion des surfaces $SSS'S'$ comprise entre les deux surfaces caustiques Σ, Σ', ne forme plus une surface quadrangulaire, mais une petite pyramide triangulaire P, qui a pour ses quatre faces la portion de chacune des quatre surfaces $SSS'S'$ comprise entre les caustiques $\Sigma\Sigma'$, et pour expression de sa solidité, $P = \frac{(R-R')^3 kk' \sin.\tau}{6}$; τ est [4] l'angle compris entre deux surfaces développables, et on a $\sin.\tau = 1$ dans le cas d'une seule réflexion [8] ou d'une seule réfraction [22]. Cette petite pyramide P qui, dans le cas du miroir plan, se réduit à un point, doit être regardée comme le foyer des rayons compris entre les quatre surfaces $SSS'S'$; et il est évident que plus son volume augmentera, plus le foyer sera dispersé, et moins la vision sera distincte.

Le terme Q qui exprime la dispersion du foyer, sera donc en raison de la quantité $\frac{(R-R')^3 kk' \sin.\tau}{6}$: or, en nommant a l'ouverture de la prunelle, on a $(D+R)\, k\, (D+R')\, k' \sin.\tau = a^2$, ou $kk' \sin.\tau = \frac{a^2}{(D+R)\,(D+R')}$, et, par conséquent, $Q = \frac{(R-R')^3\, a^2}{(D+R)\,(D+R')h^3}$, h étant un coëfficient constant, et a une très-petite quantité. Si $R' > R$, il faudra évidemment substituer $R' - R$ à $R - R'$, afin que le nombre Q soit toujours positif.

Lorsque $R = R'$, on a $Q = 0$; ce qui exprime que la dispersion est nulle, ou que la vision est parfaitement distincte. Si R ou R' sont infinis, on a $Q = \infty$; ce qui indique que l'image est complétement confuse.

Si la netteté N de l'image était simplement en raison inverse de la dispersion du foyer, on aurait $N = \frac{1}{Q} = \frac{(D+R)\,(D+R')h^3}{(R-R')^3\, a^2}$; et ce résultat, dans ses limites, serait conforme à l'expérience : mais il est plus naturel de penser que l'indistinction de l'image est en raison de la dispersion des rayons sur la choroïde ; or, lorsque les rayons qui partent d'un point lumineux vont peindre son image au fond de l'œil, on peut concevoir qu'ils ont un foyer unique, et par conséquent, la sensation qui indique la présence de ce point est parfaitement distincte. Mais si l'on

imagine deux points lumineux situés sur le même rayon visuel, les rayons qui partent de ces points ne pourront pas, après avoir traversé les humeurs de l'œil, avoir un foyer commun ; cependant, comme l'expérience prouve que la forme de l'œil se modifie jusqu'à un certain point suivant la distance des objets, de manière à en rendre la vision distincte, il est évident que, dans ce cas-ci, elle se modifiera de manière que le cercle d'aberration formé par les rayons réfractés des deux points lumineux soit le moindre possible : ainsi, en nommant x le diamètre du moindre cercle d'aberration, a celui de la prunelle, b la distance à la prunelle du foyer du point le plus rapproché, c la distance du foyer du point le plus éloigné, on aura, en regardant l'ouverture de la prunelle comme très-petite,

$$x = a\,\frac{b-c}{b+c};$$

et comme la netteté N de l'image est en raison inverse de la surface du cercle d'aberration,

$$N = \frac{h^2}{x^2} = \frac{h^2\,(b+c)^2}{a^2\,(b-c)^2},$$

h étant un coëfficient dépendant de l'intensité de la lumière. On observe, relativement à ce coëfficient, que la netteté de l'image peut être la même pour différens degrés d'intensité de lumière : mais il faut alors que l'ouverture a de la prunelle soit susceptible de varier; ce qui a lieu effectivement dans la nature pour les clartés moyennes.

Il ne s'agit plus que de substituer, dans l'expression précédente de N, les valeurs de b et c en fonction des quantités $D+R$, $D+R'$; pour cela, nous observerons qu'en supposant donnés sur l'axe visuel la distance $D+R$ d'un point lumineux à la prunelle, celle de son foyer b, le lieu et l'épaisseur e d'une lentille à segmens sphériques, ainsi que le nombre l qui dépend de sa force réfractive, on a [30]

$$b = \frac{-\rho'\,[(e-D-R)(\rho\,l-e\,l+e)-\rho\,e]}{(e-D-R)\,[e\,(l-1)^2+(\rho'-\rho)\,l\,(l-1)]+\rho\,(\rho'\,l+e\,l-e)},$$

expression dans laquelle on peut regarder les rayons ρ et ρ' comme

inconnus, en sorte qu'il y aura une infinité de lentilles qui satisferont aux conditions données : mais si l'on a un second point $D + R'$ et un second foyer c, on en tirera la seconde équation,

$$c = \frac{-\rho'[(e-D-R')(\rho l - el + e) - \rho e]}{(e-D-R')[e(l-1)^2 + (\rho'-\rho)l(l-1)] + \rho(\rho' l + el - e)};$$

or, ces deux équations déterminent les rayons ρ et ρ' des segmens de sphère qui satisfont aux conditions ci-dessus.

Nous pourrons donc toujours supposer, quels que soient $D + R$ et $D + R'$, qu'une lentille formée de segmens sphériques, substituée aux différentes humeurs de l'œil, donnera pour b et c les mêmes valeurs que celles qu'elles ont dans la nature. On observe seulement qu'il y a autant de lentilles différentes que de différentes valeurs de $(D+R)$, $(D+R')$, puisque ρ et ρ' sont fonction de ces quantités.

Considérons donc, pour des valeurs données de $(D+R)$, $(D+R')$, ρ et ρ', quelle sera l'expression x du diamètre du plus petit cercle d'aberration. Pour y parvenir, il n'y aura qu'à substituer, dans l'équation $x = a\frac{b-c}{b+c}$, les valeurs ci-dessus de b et c, et l'on aura un résultat de la forme

$$x = \frac{a(R-R')}{f(D+R, D+R', \rho, \rho')},$$

f désignant une fonction donnée par le calcul; et comme ρ et ρ' sont des fonctions de $D + R$, $D + R'$, b, c, on la changera en celle-ci,

$$x = \frac{a(R-R')}{f(D+R, D+R', b, c)},$$

en observant que la fonction f n'est pas divisible par $(R-R')$. On tire de ce résultat,

$$N = \frac{h^2}{x^2} = \frac{h^2 f^2(D+R, D+R', b, c)}{a^2(R-R')^2};$$

si l'on connaît la force réfractive des différentes humeurs de l'œil et la forme des surfaces qui les séparent, on peut déterminer b en fonction de $D + R$, et c en fonction de $D + R'$, par les méthodes indiquées ci-dessus.

Dans tous les cas, on aura $N = \infty$ quand $R = R'$; ce qui indique la circonstance unique dans laquelle la vision sera parfaitement distincte.

Quoique b et c ne soient pas déterminés, parce qu'ils dépendent d'éléments sur lesquels nous n'avons pas de données assez précises, on peut néanmoins connaître par approximation la valeur de la fonction f, lorsque e est très-petit par rapport à ρ et ρ'; et que $R - R'$ est très-petit par rapport à $D + R$; ce qui se rapporte au cas que nous avons à considérer. En effet, soient

$$m = \rho\rho' l + \rho' e (l - 1),$$
$$n = -\rho' e (l - 1)(\rho - e),$$
$$p = -(l - 1)(\rho' - \rho) l - e (l - 1)^2,$$
$$q = \rho\rho' l + e (l - 1)\{\rho' l - (\rho - e)(l - 1)\},$$

on a [30],

$$b = \frac{m(D + R) + n}{p(D + R) + q}, \qquad c = \frac{m(D + R') + n}{p(D + R') + q},$$

et

$$b - c = \frac{(mq - np)(R - R')}{[p(D + R) + q][p(D + R') + q]} = \frac{bc(mq - np)(R - R')}{[m(D + R) + n][m(D + R') + n]};$$

or, lorsque e est négligeable par rapport à ρ et ρ', on a

$$m = q \qquad n = 0,$$

et

$$b - c = \frac{bc(R - R')}{(D + R)(D + R')},$$

$$x = a\frac{b - c}{b + c} = a\frac{bc}{(b + c)}\frac{(R - R')}{(D + R)(D + R')},$$

$$N = \frac{h^2}{x^2} = \frac{h^2(b + c)^2}{a^2 b^2 c^2}\frac{(D + R)^2(D + R')^2}{(R - R')^2}.$$

Enfin, comme l'hypothèse de e très-petit par rapport à ρ et ρ' suppose que $R - R'$ est très-petit par rapport à $D + R$, et, par conséquent, $b - c$ par rapport à b, on aura, pour dernière valeur de N,

$$N = \frac{4h^2(D + R)^4}{a^2 b^2 (R - R')^2},$$

équation dans laquelle b est une quantité qui varie très-peu, quand $D+R$ et $R-R'$ varient d'une manière sensible; en sorte qu'elle influe beaucoup moins sur les résultats que ces dernières grandeurs.

Lorsque l'image est trop rapprochée ou trop éloignée pour que b soit contenu dans les limites que l'œil peut atteindre en modifiant sa forme, la confusion devient indépendante de l'expression précédente, qui n'est relative qu'aux distances comprises entre ces limites.

Quant à la quantité Δ' [14] qui indique la distance apparente de l'image à la surface réfléchissante ou réfringente, on aura pour le foyer qui y correspond, c'est-à-dire, pour la position d du plus petit cercle d'aberration, et, par conséquent, pour celle que prend la choroïde,

$$d = \frac{2bc}{b+c} = \frac{b+c}{2} - \frac{(b-c)^2}{2(b+c)},$$

valeur qui se réduit à

$$d = \frac{b+c}{2}$$

quand $(b-c)$ est très-petit par rapport à b et c; on aura donc, dans ce cas,

$$d - \frac{m}{p} = -\frac{m^2}{p^2(D+\Delta')} = \frac{b+c}{2} - \frac{m}{p} = -\frac{m^2}{2p^2}\left(\frac{1}{D+R} + \frac{1}{D+R'}\right)$$

d'où l'on tire

$$\Delta' = \frac{R+R'}{2} - \frac{(R-R')^2}{2(D+R)+2(D+R')},$$

quantité qui se réduit à

$$\Delta' = \frac{R+R'}{2}$$

quand $R-R'$ est très-petit par rapport à $D+R$, c'est-à-dire, quand on considère l'image dans les limites où elle est distincte; ce qui est le cas dont nous nous sommes occupés dans la première partie de ce Mémoire.

Nous avons supposé jusqu'ici que la prunelle ne recevait qu'un faisceau infiniment petit de lumière, et que, son diamètre étant a,

surfa

surface était de la dimension $a^2 = (D + R)\, k\, (D + R')k' \sin. \tau$, les angles kk' [8] [22] étant infiniment petits; mais, comme dans la nature a est une quantité finie, il faut considérer les angles kk' dans une certaine étendue. On doit donc, dans les expressions précédentes, au lieu de R et R', substituer la moyenne entre la plus grande et la moindre valeur de ces quantités prises dans l'étendue de la prunelle. Nous désignerons à l'avenir ces valeurs moyennes par $\overline{R}$ et $\overline{R}'$.

Enfin, si l'on considère un système de rayons réfractés, il faudra avoir égard à la différence de réfrangibilité des divers rayons, et prendre, relativement à cette considération, le *maximum* des valeurs de $\overline{R}' - \overline{R}$. Dans les instrumens d'optique composés, les causes de diffusion des images se combinent de diverses manières. Nous aurons occasion de revenir sur ce sujet, et d'entrer dans de plus grands détails sur les applications dont il est susceptible.

EXTRAIT DES LEÇONS

Faites à l'École Polytechnique, sur les Points singuliers des Courbes, dans le Cours d'Analyse de 1803;

Par M. POISSON.

Des Points multiples.

LORSQUE plusieurs branches d'une même courbe viennent se rencontrer en un point, ce point est *multiple;* il est double s'il répond à deux branches, triple s'il répond à trois, &c.

Considérons, pour plus de simplicité, un point double, et soit m ce point *(fig. 1)* (*); représentons l'équation de la courbe délivrée de radicaux, par $V = 0$, V étant une fonction rationnelle de x et de y; et par

$$M dy + N dx = 0, \quad (1);$$

la différentielle de $V = 0$, M et N étant aussi des fonctions rationnelles de x et de y. Il se présente deux cas à examiner; le cas où les deux branches de la courbe se coupent au point m, et celui où elles se touchent en ce point.

1.er Cas. Il est visible que l'équation (1) donnera une valeur unique de $\frac{dy}{dx}$, pour chaque point de la courbe; or, au point m, où deux branches viennent se couper, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ doit être double, puisque chacune des deux branches doit avoir sa tangente distincte de celle de l'autre; il doit donc être impossible de tirer de l'équation (1) la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui répond au point m; en sorte que, si l'on substitue dans cette équation, à la place de x et de y, les coordonnées du

(*) Le lecteur est prié de faire lui-même les figures indiquées dans cette rédaction.

point m, elle devra être satisfaite, indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire que les fonctions M et N deviendront séparément nulles, par l'effet de cette substitution.

2.e *Cas.* Supposons que les deux branches aient au point m *(fig. 2)* un contact de l'ordre quelconque n; alors les n premiers coëfficiens différentiels de y auront chacun une seule valeur, ou des valeurs égales pour les deux branches; mais celui de l'ordre $n+1$ devra avoir deux valeurs différentes. Or, si l'on différencie n fois de suite l'équation (1), on arrivera à une équation de cette forme $M\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+L=0$, dans laquelle M est la même fonction de x et de y que dans l'équation (1), et L est une nouvelle fonction rationnelle de x, y, et des n premiers coëfficiens différentiels de y. Il faudra donc, et on le prouverait comme dans le premier cas, que la fonction M devienne nulle, en y substituant, à la place de x et de y, les coordonnées du point m; donc, en vertu de l'équation (1), la fonction N deviendra aussi nulle par la même substitution.

Il est donc démontré qu'aux points multiples, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ou la fraction $\frac{M}{N}$, se présente toujours sous la forme $\frac{0}{0}$; mais il est important d'observer que l'inverse de cette proposition n'a pas également lieu; c'est-à-dire, que les coordonnées d'un point de la courbe, étant substituées dans M et N, peuvent rendre nulles ces fonctions, sans que pour cela le point soit multiple. Pour le faire voir par un exemple, prenons l'équation

$$y^m-(x-1)^m.x=0,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair ou impair. En différenciant cette équation, il vient

$$my^{m-1}dy-m(x-1)^{m-1}.xdx-(x-1)^m.dx=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m(x-1)^{m-1}.x+(x-1)^m}{my^{m-1}},$$

valeur qui devient $\frac{0}{0}$, au point de la courbe dont les coordonnées sont $x = 1$, et $y = 0$. Or ce point est double ou simple, selon que m est pair ou impair : car, dans le second cas, la courbe n'a qu'une seule branche, et, par conséquent, aucun point multiple; et, dans le premier cas, elle a deux branches qui viennent se couper au point en question. On doit donc énoncer ainsi la règle que le calcul différentiel fournit pour découvrir les points multiples qu'une courbe peut avoir.

L'équation de la courbe délivrée de radicaux, étant $V = 0$, et sa différentielle étant représentée par $Mdy + Ndx = 0$; on posera les deux équations $M = 0$ et $N = 0$, d'où l'on tirera un nombre déterminé de valeurs réelles de x et de y; on substituera ces valeurs dans l'équation $V = 0$; et en ne retenant que celles de ces valeurs qui satisferont à cette équation, on sera sûr d'avoir les coordonnées de tous les points de la courbe qui *peuvent être* des points multiples. On reconnaîtra ensuite si chacun de ces points est effectivement multiple, en considérant le cours de la courbe de part et d'autre de ce point.

Lorsque, pour des valeurs déterminées de x et de y, l'équation (1) devient identique, comme il arrive aux points multiples, il devient impossible d'en tirer la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et il faut alors avoir recours, pour déterminer cette valeur, à la différentielle seconde de l'équation $V = 0$. Cette différentielle est

$$Md^2y + M'dy^2 + (M'' + N')dydx + N''dx^2 = 0,$$

en représentant la différentielle de M, par $M'dy + M''dx$, et celle de N, par $N'dy + N''dx$; et elle se réduit, quand $M = 0$, à

$$M'dy^2 + (M'' + N')dydx + N''dx^2 = 0,$$

équation du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, qui donnera, par conséquent, une valeur double pour cette quantité. Si $\frac{dy}{dx}$ devait avoir

plus de deux valeurs, comme cela a lieu en un point triple, la différentielle seconde de $V = 0$ deviendrait encore insuffisante pour déterminer cette triple valeur, et il faudrait avoir recours à la différentielle troisième, qui donnerait $\frac{dy}{dx}$ par une équation du troisième degré, et ainsi de suite, pour les points d'un plus haut degré de multiplicité.

Des Points conjugués.

Les points conjugués d'une courbe sont des points entièrement séparés des branches de cette courbe, et qu'on regarde comme faisant partie de la courbe, à cause que leurs coordonnées satisfont à son équation.

D'après cela, si m *(fig. 3)* est un point conjugué, et que l'abscisse de ce point soit $x = a$, il faudra que la valeur de l'ordonnée qui répond à $x = a$, soit réelle, et que celle qui répond à $x = a + h$, soit imaginaire, h étant une quantité indéterminée qu'on puisse prendre aussi petite qu'on voudra. Or, cette seconde valeur de l'ordonnée sera donnée par la série convergente,

$$y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \text{&c.}$$

dans laquelle on doit faire $x = a$ après les différenciations; il faudra donc que, dans la suite infinie des coëfficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c., il s'en trouve qui n'aient que des valeurs imaginaires, pour l'abscisse $x = a$; et réciproquement, si cette circonstance a lieu, le point m qui répond à l'abscisse $x = a$, sera un point conjugué.

En partant de cette propriété des points conjugués, on peut aisément prouver qu'en ces points, comme aux points multiples, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, déduite de l'équation de la courbe délivrée de radicaux, doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$; car, en supposant que $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ soit le premier coëfficient différentiel de y, qui devienne imaginaire en un

point conjugué, la valeur de ce coèfficient ne saurait être donnée par l'équation (2) de l'article précédent, vu que, dans cette équation, M et L auraient des valeurs réelles; il faudrait donc que la fonction M, et par suite la fonction N, devinssent séparément nulles; c'est-à-dire que la fraction $\frac{N}{M}$, ou la valeur de $\frac{dy}{dx}$, devra alors se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Les points conjugués seront donc déterminés en même temps que les points multiples, et par la règle énoncée ci-dessus.

Il est bon d'observer qu'en un point conjugué, la courbe peut avoir sa tangente et son cercle osculateur réels et déterminés de grandeur et de position; il est évident qu'il suffit, pour que cela ait lieu, que les coèfficiens différentiels de l'ordonnée ne deviennent imaginaires qu'au-delà du coèfficient du second ordre. Alors la propriété géométrique des contacts ne subsiste plus; car on ne saurait concevoir en un point conjugué, une droite, par exemple, qui approchât plus que toute autre droite de la courbe à laquelle ce point appartient. C'est une occasion de se rappeler que la démonstration que l'on donne de la propriété géométrique des contacts, suppose réels tous les termes de la série de *Taylor;* ce qui n'a pas lieu aux points conjugués.

Des Points où la Tangente à la courbe est parallèle ou perpendiculaire à l'Axe des abscisses.

La tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses aux points où la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est nulle; et cette tangente est perpendiculaire au même axe, aux points où la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie. Réciproquement, lorsque la tangente en un point de la courbe est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des abscisses, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est nulle ou infinie.

L'inspection des courbes fait voir, 1.° que la tangente doit être

parallèle à l'axe des abscisses, aux points où l'ordonnée a une valeur *maximum* ou *minimum* (*fig. 4*); 2.° qu'elle doit être perpendiculaire au même axe, aux points qui sont des limites de la courbe, ou d'une branche de la courbe, dans le sens des abscisses (*fig. 5*); 3.° que si la courbe subit une inflexion en un point où la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des abscisses, la valeur de l'ordonnée en ce point ne sera pas un *maximum* ou un *minimum*, ou bien ce point ne sera pas une limite de la courbe dans le sens des abscisses (*fig. 6* et *fig. 7*).

On déterminera donc les limites d'une courbe dans le sens des ordonnées et dans le sens des abscisses, en posant successivement les équations $\frac{dy}{dx} = 0$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$. Ces équations, combinées avec celle de la courbe, donneront les coordonnées de tous les points qui peuvent être des limites de cette courbe : mais il ne faudra pas conclure de suite que tous les points trouvés répondent effectivement à des limites; et il n'y aura, en général, d'autres moyens pour s'en assurer, que d'examiner le cours de la courbe vers chacun de ces points.

Des cas en défaut du Théorème de Taylor.

Si, dans $f(x+h)$, on donne à x une valeur particulière $x = a$, cette fonction ne dépend plus que de la variable h, et la série de *Taylor* en donne le développement ordonné suivant les puissances entières et positives de h. Or, toutes les fonctions ne sont pas de nature à pouvoir se développer suivant les puissances entières et positives de la variable : celles, par exemple, qui renferment dans leurs expressions des radicaux comme $\sqrt{(h)}$, $\sqrt[3]{(h)}$, $\sqrt[4]{(h)}$, &c. doivent contenir dans leurs développemens, suivant la puissance de h, les puissances fractionnaires $h^{\frac{1}{2}}$, $h^{\frac{1}{3}}$, $h^{\frac{1}{4}}$, &c. Lors donc que, par la supposition $x = a$, $f(x+h)$ deviendra une fonction de h, non susceptible d'être développée suivant les puissances entières et positives de h, son développement, suivant les puissances convenables, ne pourra plus être donné par la série de *Taylor*, et ces cas sont ceux que l'on appelle *les cas en défaut du*

théorème de Taylor. Alors, pour développer la fonction, il faudra avoir recours à des méthodes particulières de développement, ou à la méthode générale que M. *Lagrange* indique, *pages 8* et *130* de la Théorie des Fonctions. Il n'est pas question ici de faire connaître les moyens de développer les fonctions, quand le théorème de *Taylor* devient inapplicable, mais bien de faire voir comment on pourra reconnaître les cas en défaut de ce théorème. Il existe pour cela un autre théorème, dont voici l'énoncé :

Si y est une fonction de x, représentée par fx, et que le développement de $f(x+h)$, pour la valeur particulière $x = a$, doive renfermer une puissance de h, dont l'exposant soit compris entre les nombres entiers n et $n+1$, le coëfficient différentiel $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, et ceux des ordres supérieurs $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}$, $\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}$, &c. deviendront infinis pour la valeur $x = a$; et réciproquement, si, pour cette valeur, les coëfficiens différentiels de la fonction y deviennent infinis à partir de celui de l'ordre $n+1$, le développement de $f(x+h)$ devra contenir un exposant de h, compris entre n et $n+1$.

Pour démontrer ce théorème, représentons le développement de $f(a+h)$, ordonné suivant les puissances convenables de h, par

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots + Nh^n + Ph^\alpha + \text{&c.},$$

α étant un exposant compris entre les nombres entiers n et $n+1$. Il est facile de voir que l'on aura les valeurs des coëfficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. pour $x = a$, en faisant $h = 0$, dans les coëfficiens différentiels $d.\frac{f(a+h)}{dh}.d^2$, $\frac{f(a+h)}{dh^2}$, &c. Or, en différenciant plusieurs fois de suite le développement ci-dessus, et faisant $h = 0$, après les différenciations, on voit que, pour cette valeur, les n premiers coëfficiens différentiels de $f(a+h)$ prennent chacun une valeur finie, tandis que le coëfficient de l'ordre $n+1$ et tous les suivans deviennent infinis, à cause du terme Ph^α dont l'exposant devient négatif après

$n + 1$ différenciations. On peut donc dire qu'un coëfficient différentiel $\frac{d^k y}{dx^k}$, de l'ordre quelconque k, prendra une valeur infinie ou finie, pour $x = a$, selon que le développement de $f(a + h)$ devra ou ne devra pas renfermer d'exposans de h, fractionnaires et plus petits que k; ce qui revient au théorème qu'il fallait démontrer.

Lors donc que le développement de $f(a + h)$ ne devra renfermer que des puissances positives et entières de h, la série de *Taylor* pourra servir à développer en entier cette fonction; et lorsque ce développement devra contenir des exposans fractionnaires, la série de *Taylor* pourra encore donner les premiers termes, c'est-à-dire, ceux qui précèdent les exposans fractionnaires dans le développement ordonné suivant les puissances ascendantes de h. Pour avoir ces premiers termes, il faudra calculer les valeurs des coëfficiens différentiels de la fonction y pour $x = a$, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un coëfficient que cette valeur particulière rende infini : alors on conclura que le développement de $f(a + h)$ ne peut plus se continuer suivant les puissances entières de h; et pour obtenir la suite du développement, il faudra recourir à des méthodes particulières.

Des Points d'inflexion et des Points de rebroussement.

Soit $y = fx$, l'équation d'une courbe résolue par rapport à l'ordonnée, et soient a et A l'abscisse et l'ordonnée d'un point m (*fig. 9*), déterminé sur cette courbe. L'ordonnée qui répond à l'abscisse $x = a + h$, c'est-à-dire, la fonction $f(a + h)$, pourra toujours être développée en une série de cette forme :

$$A + Bh^{\alpha} + Ch^{\beta} + Dh^{\gamma} + Eh^{\delta}, + \text{&c.}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. étant une suite d'exposans positifs et croissans, et le premier terme du développement étant l'ordonnée du point m. Les coëfficiens B, C, D, E, &c. seront tous réels, si, comme nous le supposons ici, le point m que nous considérons, n'est pas un point conjugué.

Si l'exposant α est plus petit que *un*, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ sera infinie

pour $x = a$; par conséquent, la tangente à la courbe au point m sera perpendiculaire à l'axe des abscisses. Si au contraire cet exposant est plus grand que *un*, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ sera nulle au point m, et la tangente à la courbe y sera parallèle à l'axe des abscisses. En supposant donc que l'on ait déterminé d'avance les points de la courbe où la tangente est perpendiculaire ou parallèle à l'axe des abscisses, et qu'il ne s'agisse plus maintenant que des points où la tangente est inclinée sur ce même axe, on aura $\alpha = 1$, et

$$f(a + h) = A + Bh + Ch^{\beta} + Dh^{\gamma} + Eh^{\delta} + \&c.$$

Cela posé, en prenant pour h une très-petite quantité positive ou négative, cette série sera convergente, et elle donnera la valeur de $f(a + h)$ ou celle de $f(a - h)$; or, il se présente deux cas à examiner; celui où aucun des exposans β, γ, δ, &c. n'est une fraction de dénominateur pair, et celui où il se trouve de pareilles fractions parmi ces exposans.

Dans le premier cas, les valeurs de $f(a + h)$ et $f(a - h)$ seront toutes deux réelles, et, par conséquent, la courbe aura des points de part et d'autre du point m. Elle ne présentera rien de particulier en ce point, si l'exposant β est un nombre pair ou une fraction de numérateur pair; elle subira, au contraire, une inflexion au point m, lorsque cet exposant sera un nombre impair ou une fraction de numérateur impair. En effet, si l'on conçoit une tangente à la courbe au point m, la différence entre les ordonnées de cette tangente et de la courbe, qui répondent à l'abscisse $x = a + h$, sera exprimée par la série

$$Ch^{\beta} + Dh^{\gamma} + Eh^{\delta} + \&c.$$

On pourra toujours prendre pour h une quantité positive ou négative, assez petite pour que le signe du premier terme Ch^{β} décide du signe de la série entière; or, ce premier terme changera de signe avec h, quand β sera un nombre impair ou une fraction de numérateur impair; et il restera de même signe, lorsque cet exposant sera un nombre pair

ou une fraction de numérateur pair : donc, 1.° la tangente coupera la courbe au point m, et, par conséquent, la courbe sera infléchie en ce point, dans le cas de β impair; 2.° la tangente sera au-dessus ou au-dessous de la courbe de part et d'autre du point m, dans le cas de β pair, et alors ce point ne présentera rien de remarquable.

Toutes les fois que l'exposant β est différent du nombre 2, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nulle ou infinie pour $x = a$, nulle si β surpasse 2, et infinie si β est < 2; puis donc qu'aux points d'inflexion, β est un nombre impair ou une fraction, il en résulte qu'en ces points la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nécessairement égale à zéro ou à l'infini. Si donc on tire de l'équation de la courbe la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sous la forme d'une fraction $\frac{M}{N}$, il faudra faire successivement $M = 0$, et $N = 0$; et en combinant ces équations avec celle de la courbe, on déterminera les coordonnées de tous les points de cette courbe, qui peuvent être des points d'inflexion; je dis *qui peuvent être*, parce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut avoir une valeur nulle ou infinie, en des points où il n'y ait pas inflexion. Il faudra ensuite discuter le cours de la courbe vers chacun de ces points, pour reconnaître s'ils répondent effectivement à des inflexions de la courbe.

Examinons maintenant le cas où, parmi les exposans β, γ, δ, &c. il se trouve des fractions de dénominateurs pairs.

Il est évident que, dans ce cas, la valeur de l'une des fonctions $f(a+h)$ et $f(a-h)$ est réelle, et que celle de l'autre est imaginaire. La courbe a donc des points d'un côté du point m, et n'en a pas du côté opposé; par conséquent, ce point est, ou un point de rebroussement *(fig. 10)*, ou une simple limite de la courbe dans le sens des abscisses *(fig. 5)*. Mais, en un point de cette dernière espèce, la tangente à la courbe serait perpendiculaire à l'axe des abscisses; ce qui serait

contre la supposition faite au commencement de cet article : le point m est donc un point de rebroussement.

Réciproquement, lorsqu'une courbe doit avoir un rebroussement au point m, dont l'abscisse $x = a$, l'inspection de la *fig. 10* fait voir que l'ordonnée de la courbe doit avoir une valeur unique pour $x = a$, deux valeurs distinctes pour $x = a + h$, et être imaginaire pour $x = a - h$. Il faudra donc que l'équation de la courbe, résolue par rapport à l'ordonnée, et que nous avons représentée plus haut par $y = fx$, renferme un radical pair de $x - a$, qui deviendra nul pour $x = a$, qui aura deux valeurs pour $x = a + h$, et qui sera imaginaire pour $x = a - h$; par conséquent, le développement ci-dessus de $f(a + h)$ contiendra un radical pair de h, et voilà ce qui introduit des fractions de dénominateurs pairs parmi les exposans β, γ, δ, &c.

En prenant dans ce développement le radical pair de h qu'il renferme avec le double signe $\pm$, on aura les valeurs de l'ordonnée qui répondent aux deux branches de courbe réunies au point m; ces valeurs développées suivant les puissances de h, auront donc au moins les deux premiers termes $A + Bh$ communs, en sorte que les deux branches auxquelles ces valeurs appartiennent, auront même tangente au point m. On peut donc dire que quand deux branches d'une même courbe se rencontrent en un point pour y former un rebroussement, ces deux branches ont en ce point une tangente commune. D'après cela, on partage les points de rebroussement en deux espèces : on range dans la première ceux *(fig. 10)* où la tangente passe entre les deux branches de la courbe; et ceux *(fig. 11)* où la tangente laisse les deux branches d'un même côté, constituent la seconde espèce.

Pour reconnaître l'espèce d'un point de rebroussement, il suffit de considérer l'exposant β : si cet exposant est une fraction de dénominateur pair, le point est de la première espèce; si le contraire a lieu, le point est de la seconde espèce. Pour le prouver, concevons au point m *(fig. 10* et *11)* la tangente commune aux deux branches, et

considérons ces différences entre les ordonnées qui répondent à l'abscisse $x = a + h$, d'abord entre l'ordonnée de la tangente et celle de l'une des deux branches, puis entre l'ordonnée de la tangente et celle de l'autre branche; ces différences développées suivant les puissances de h, auront toutes deux le même premier terme, quand β ne sera pas une fraction de dénominateur pair, tandis que le premier terme de l'une sera égal et de signe contraire au premier terme de l'autre, quand β sera une fraction de dénominateur pair; or, on peut toujours prendre la valeur de h assez petite pour que le signe du premier terme décide du signe de la différence entière; donc la tangente au point m passera entre les deux branches réunies en ce point, quand β sera une fraction de dénominateur pair; et dans le cas contraire, elle passera au-dessus ou au-dessous des deux branches.

Il est visible maintenant qu'aux points de rebroussement de la première espèce, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est toujours nulle ou infinie, puisqu'en ces points l'exposant β est toujours fractionnaire. Les points de rebroussement de la première espèce qu'une courbe peut avoir, seront donc déterminés en même temps et par la même règle que les points d'inflexion. Quant aux rebroussemens de la seconde espèce, le calcul différentiel ne peut fournir aucune règle pour les trouver directement: l'analyse précédente en fait voir la raison; car le rang du terme qui doit contenir une puissance fractionnaire de h, dans le développement de $f(a + h)$, n'étant pas déterminé, on ne peut pas dire quel est le premier coëfficient différentiel de l'ordonnée qui doit devenir infini. Au reste, les points de la première et de la seconde espèce peuvent être considérés comme des points multiples, et, comme tels, ils seront déterminés par la règle énoncée plus haut.

On voit par ce qui précède, que le calcul différentiel fournit des règles certaines pour trouver tous les points d'une courbe qui peuvent être des points singuliers, lorsque l'on connaît l'équation de cette courbe; mais, pour reconnaître ensuite si les points de la courbe indiqués

par les règles du calcul différentiel sont effectivement des points sir guliers, et pour déterminer la nature de ces points, il n'y a pas d moyens plus simples, du moins en général, que de discuter le cours d la courbe vers chacun de ces points. La discussion d'une courbe ve un point déterminé n'offre jamais de très-grandes difficultés ; le élèves en trouveront un nombre suffisant d'exemples dans l'ouvrage d M. *Lacroix ;* et ceux qui desireront de plus grands détails sur la théori des points singuliers, pourront consulter l'*Analyse des lignes courbes* CRAMER.

MÉMOIRE

Sur les Oscillations du Pendule dans un milieu résistant, et en ayant égard à l'extensibilité du fil;

Par M. POISSON.

Les astronomes ont porté si loin l'exactitude dans les observations, qu'il est devenu nécessaire d'avoir égard aux circonstances physiques qui peuvent avoir la moindre influence sur les résultats ou sur les conséquences qu'on en veut déduire. Cela est sur-tout indispensable quand il s'agit de déterminer, en différens lieux de la terre, la longueur du pendule qui bat les secondes ; car c'est par la variation de cette longueur que l'on rend sensible et que l'on mesure la variation de la pesanteur, l'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde ; aussi l'on peut voir dans la Figure de la terre, de *Bouguer*, le détail des précautions qu'il a prises pour mesurer cette longueur sous l'équateur et à Paris. Cette même longueur du pendule, à la latitude de Paris, a de nouveau été déterminée avec une précision extrême par *Borda*, afin de fixer irrévocablement son rapport à la longueur du mètre. Il existe de ce géomètre un travail complet sur ce sujet, qui fait partie des travaux de la commission des poids et mesures, dont *Borda* était membre, et qui ne laissera sans doute rien à desirer quand il aura été publié.

Comme les oscillations du pendule se font dans l'air, *Bouguer* observe que le poids de la lentille se trouvant diminué, la longueur du pendule diminue aussi proportionnellement ; il faut donc augmenter la longueur observée, pour avoir celle qui aurait lieu dans le vide. Sans cette précaution de ramener au vide les longueurs du pendule que l'on observe à différentes latitudes et à différentes hauteurs au-dessus du niveau de la mer, ces longueurs ne seraient pas comparables, et l'on n'en pourrait

pas déduire la variation de la pesanteur; car, par exemple, en s'éleva au-dessus du niveau de la mer, l'air devenant plus rare, la lentille perdr moins de son poids, et, par conséquent, la longueur du pendule din nuerait dans un moindre rapport que la pesanteur; de même, en s'a prochant de l'équateur, si l'air ne conserve pas la même densité, diminution du pendule ne sera pas proportionnelle à celle de la p santeur.

Le pendule dont on fait usage étant nécessairement un pendule co posé, d'où l'on déduit, par le calcul, la longueur du pendule simpl on peut se demander si la résistance de l'air ne déplace pas le cen d'oscillations; nous avons donc cherché la position de ce centre da un milieu résistant, et nous avons trouvé qu'elle est la même que da le vide; sur quoi nous devons observer que *Clairaut* est déjà parve au même résultat, par une analyse différente de la nôtre (*voyez* Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1738). Cette propositi prouvée, il reste encore une question à résoudre; c'est de savoir si résistance de l'air, qui diminue l'amplitude des oscillations et qui fi par les anéantir, n'a pas d'influence sur leur durée. *Bouguer* a recon (*page 341* de la Figure de la terre) que cette influence est nulle, et q la durée des oscillations reste toujours la même depuis le commen ment jusqu'à la fin du mouvement; en sorte que l'air, comme flu résistant, ne donne lieu à aucune nouvelle correction de la longu du pendule que l'on observe. Ce résultat m'a paru remarquable; n'en ayant trouvé la démonstration nulle part, j'ai cherché à le prou directement par le calcul.

Pour y parvenir, j'ai calculé séparément le temps de la demi-os lation descendante et de la demi-oscillation ascendante; le temps la première est augmenté par la résistance de l'air, mais celui de seconde est diminué précisément d'une quantité égale : d'où il résu que le temps de l'oscillation entière reste le même que si elle eût eu l dans le vide. Ce théorème suppose qu'il ne s'agit que d'une oscillati très-petite; mais alors le temps de l'oscillation peut être regardé com

indépend

indépendant de la grandeur de l'arc parcouru : le temps de la seconde oscillation sera donc le même que celui de la première, quoique l'arc soit devenu plus petit par l'effet de la résistance de l'air; et ainsi de suite jusqu'à l'extinction du mouvement.

Le calcul montre aussi comment l'amplitude des oscillations diminue successivement, et comment cette diminution est d'autant plus rapide que la résistance est plus grande. Cela explique pourquoi les oscillations d'un pendule cessent bien plutôt au pied d'une haute montagne qu'à son sommet, où l'air est plus rare et moins résistant. Ainsi, *Bouguer* rapporte (*page 332* de la Figure de la terre) qu'au sommet du Pichincha, à 2434 toises au-dessus du niveau de la mer, les oscillations de son pendule se réduisaient de deux pouces à un seul pouce en 22 à 23 minutes, tandis qu'au niveau de la mer la même réduction se faisait en 14 à 15 minutes.

L'extensibilité du fil que l'on emploie pour former le pendule, est encore une circonstance physique qui peut influer sur la durée des oscillations : cependant il ne paraît pas que *Bouguer* y ait eu aucun égard; et, à la vérité, cette influence devient presque nulle, quand on emploie un fil d'une matière très-peu extensible. Quoi qu'il en soit, c'est toujours un problème curieux, de déterminer les oscillations d'un pendule, en supposant le fil extensible; et l'on conçoit que, si l'on en demandait une solution rigoureuse, on aurait à résoudre le problème très-connu du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, qui seraient ici le point de suspension et le centre d'action de la pesanteur: mais, en observant que l'extension du fil est toujours très-petite relativement à sa longueur, on parvient à simplifier les équations du problème et à les intégrer par approximation. Le résultat auquel on est conduit, est que la correction due à l'extensibilité du fil, qu'il faut faire dans la durée de l'oscillation, se confond avec celle qui est due à la grandeur de l'arc parcouru, et qu'elle ne fait qu'en augmenter le coëfficient. *Borda* et M. *Laplace* ont déjà résolu la question du pendule

extensible; mais, leurs solutions n'ayant point été rendues publiques, j'ai cru pouvoir donner ici la mienne.

Du Centre d'oscillation.

SUPPOSONS la lentille fixement attachée à l'extrémité de la verge inflexible, et concevons que, pendant le mouvement, chaque point de cette lentille reste dans le même plan vertical, perpendiculaire à l'axe de suspension. Décomposons le corps oscillant en une infinité de molécules. Soit dm l'une quelconque de ces molécules, dont les distances à l'axe fixe et au plan vertical passant par cet axe, seront représentées par r et x à un instant quelconque du mouvement. Désignons par r' et x' les valeurs de r et x qui se rapportent à la molécule placée au centre de gravité, et soit θ l'angle que r' fait avec la verticale, en sorte qu'on ait $x' = r' \sin.\theta$; enfin soit t le temps écoulé depuis le commencement du mouvement, et g la gravité. La vîtesse angulaire, commune à toutes les molécules, sera $\frac{d\theta}{dt}$; par conséquent, la vîtesse de la molécule dm sera $r\frac{d\theta}{dt}$; et sa force motrice, dirigée suivant la tangente au cercle que cette molécule décrit, sera égale à $r\frac{d^2\theta}{dt^2}.dm$. Or, d'après le principe de *d'Alembert*, il doit y avoir équilibre dans le système entre les forces motrices des différentes molécules qui le composent, prises en sens contraire de leurs directions, et les forces appliquées à ces molécules. Ces dernières forces sont ici la pesanteur et la résistance du milieu; et le système qui doit être en équilibre étant un corps solide attaché à un axe fixe, il suffira que la somme des momens de ces forces, pris par rapport à cet axe, soit égale à la somme des momens des forces motrices, pris par rapport au même axe.

La somme des momens de la pesanteur sera $\int x\,g\,dm$, et la somme des momens des forces motrices sera $\int r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm$, les deux intégrales étant prises dans toute l'étendue de la masse du corps. Pour avoir la somme des momens des forces provenant de la résistance du milieu,

concevons un cylindre tangent à la surface du corps oscillant et perpendiculaire au plan qui passe par l'axe de suspension et par la verge inflexible; la ligne de contact de ce cylindre partagera la surface du corps oscillant en deux portions; et il est évident que, pendant toute la durée d'une même oscillation, la résistance du milieu sera une force appliquée à tous les points de l'une de ces deux portions de surface, et dirigée en sens contraire du mouvement : d'ailleurs, cette résistance sera proportionnelle à l'élément de la surface sur lequel elle agit, multiplié par une fonction de la vîtesse, que nous représenterons par

$$Av^n + Bv^m + \&c.$$

v étant la vîtesse, A, B, C, &c. des coëfficiens constans, et n, m, &c. des exposans positifs quelconques. D'après cela, il est facile de voir que la somme des momens des forces dues à la résistance du milieu, sera égale à

$$A.\int r^{n+1}\frac{d\theta^n}{dt^n}.d\omega + B.\int r^{m+1}\frac{d\theta^m}{dt^m}.d\omega + \&c.$$

$d\omega$ étant l'élément de la surface du corps oscillant, et les intégrales devant être étendues à toute la portion de cette surface qui éprouve la résistance du milieu. On aura donc pour l'équation du mouvement du corps, résultant du principe de *d'Alembert*,

$$\int.xgdm = \mp A\int r^{n+1}\frac{d\theta^n}{dt^n}.d\omega \mp B\int r^{m+1}\frac{d\theta^m}{dt^m}.d\omega + \&c. = \int r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}.dm,$$

le signe supérieur devant être pris pendant toute la durée de la demi-oscillation descendante, et le signe inférieur pendant la durée de la demi-oscillation ascendante; car il est évident que, dans le premier cas, les momens qui proviennent de la résistance du milieu sont de signe contraire à ceux de la pesanteur, tandis qu'ils sont de même signe dans le second cas.

Or, par les formules du centre de gravité, on a $\int x\,g\,dm = x'Mg$, $= \sin.\theta\,.\,r'Mg$, M étant la masse du corps; l'intégrale $\int r^2\,dm$

représente le moment d'inertie de cette masse, pris par rapport à l'axe fixe, moment que nous désignerons par $(r'^2 + K^2)\,M$, K étant une constante qui se détermine par le calcul intégral ; nous aurons donc $\int r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot M\,(K^2 + r'^2)$; faisant de plus $A\int r^{n+1}\,d\omega = A_1$, $B\int r^{m+1}\,d\omega = B_1$, &c. l'équation précédente deviendra

$$\sin.\theta \cdot r' M g \mp A_1 \cdot \frac{d\theta^n}{dt^n} \mp B_1 \cdot \frac{d\theta^m}{dt^m} + \&c. = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot M(K^2 + r'^2).$$

Cela posé, l'équation du mouvement d'un pendule simple, dont la longueur est l, et qui ferait ses oscillations dans le même milieu, serait

$$\sin.\theta \cdot l M' g \mp a \cdot \frac{d\theta^n}{dt^n} \mp b \cdot \frac{d\theta^m}{dt^m} + \&c. = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot M' l^2,$$

M' étant la masse de ce pendule, et a, b, &c. étant des coëfficiens constans ; il faudra donc, pour que ce mouvement coïncide avec celui du pendule composé, que l'on ait

$$l = \frac{r'^2 + K^2}{r'},\ \frac{a}{l^2 M'} = \frac{A_1}{M(r'^2 + K')},\ \frac{b}{l^2 M'} = \frac{B_1}{M(r'^2 + K^2)}\ \&c.$$

La première de ces équations déterminera la longueur l du pendule simple, c'est-à-dire, la distance du centre d'oscillation à l'axe de suspension ; et l'on voit que cette distance est indépendante de la résistance du milieu. Les autres équations détermineront les valeurs de a, b, &c. au moyen de celles de A_1, B_1, &c. ; la masse M' restera indéterminée ; en la faisant égale à M, on aura

$$a = \frac{A_1}{l},\ b = \frac{B_1}{l}\ \&c.$$

Ces coëfficiens a, b, &c. conserveront la même valeur pendant toute la durée d'une même oscillation ; mais d'une oscillation à la suivante, leurs valeurs changeront, si la portion de surface qui éprouve la résistance du milieu pendant la seconde oscillation, n'est pas semblable à celle qui l'éprouvait pendant la première. Maintenant nous allons déterminer le mouvement du centre d'oscillation.

Mouvement du Pendule dans un milieu résistant.

Soient, à un instant quelconque, x l'abscisse verticale du centre d'oscillation, comptée du point le plus bas de l'arc parcouru par ce centre, s l'arc compris entre ce centre et le même point, t le temps écoulé depuis l'origine du mouvement, a la longueur du pendule, g la gravité relative au milieu où se font les oscillations; et enfin prenons pour unité la masse du pendule réunie à son centre d'oscillation. Supposons la résistance de ce milieu proportionnelle au carré de la vîtesse, et représentons-la par $m\frac{ds^2}{dt^2}$, m étant un coëfficient constant donné par l'expérience, et qui dépend de la densité du milieu et de la figure du corps oscillant. L'équation du mouvement du centre d'oscillation sera, pendant la première demi-oscillation,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} + m\frac{ds^2}{dt^2}; \quad (1)$$

en observant que $g\frac{dx}{ds}$ est la gravité décomposée suivant la tangente à l'arc s, et que cette force tend à diminuer l'arc s, tandis que la résistance tend à l'augmenter, puisqu'elle s'exerce toujours en sens contraire du mouvement.

On a $x = a\left(1 - \cos.\frac{s}{a}\right)$, et, par conséquent, $\frac{dx}{ds} = \sin.\frac{s}{a} = \frac{s}{a} - \frac{s^3}{2.3.a^3} + \&c.$; substituant cette valeur dans l'équation (1); et négligeant d'abord les puissances de s et de $\frac{ds}{dt}$ supérieure à la première, cette équation se réduit à $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{a}.s$. Intégrant et déterminant l'une des constantes arbitraires par la condition que la vîtesse soit nulle au point de départ où l'on a $t = 0$, il vient $s = k\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$, k étant la valeur de s qui correspond au point de départ, c'est-à-dire l'amplitude de la première demi-oscillation, amplitude que nous regarderons comme très-petite.

Soit maintenant $s = k\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + s'$. En substituant cette

valeur dans l'équation (1), et négligeant les puissances de k supérieures à la seconde, ainsi que les produits $k s'$, $k \frac{ds'}{dt}$, on a, pour déterminer la correction s', l'équation

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} = -\frac{g}{a} \cdot s' + \frac{m k^2 g}{a} \left[\sin. t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]^2.$$

Cette équation est facile à intégrer, en réduisant d'abord le carré de sin. $t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$ qu'elle renferme, en cosinus d'arc multiples de $t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$, au moyen de la formule $2 \left[\sin. t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]^2 = 1 - \cos. 2 \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$. Intégrant donc et déterminant les constantes arbitraires, en sorte qu'on ait à-la-fois $t = 0$, $s' = 0$, $\frac{ds'}{dt} = 0$, on trouve

$$s' = \frac{m k^2}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos. 2 t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{4}{3} \cdot \cos. t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right];$$

donc

$$s = k \cos. t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \frac{m k^2}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos. 2 t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{4}{3} \cos. t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right].$$

Ainsi, en supposant k assez petit pour qu'on en puisse négliger la troisième puissance, cette formule représentera la valeur de s pendant toute la durée de la première demi-oscillation.

Si l'on désigne par T le temps de cette demi-oscillation, on aura, pour le déterminer, l'équation $s = 0$, ou

$$\cos. T \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \frac{m k}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos. 2 T \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{4}{3} \cos. T \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right] = 0.$$

En négligeant le terme multiplié par k, on tirerait de cette équation $T \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \frac{\pi}{2}$, π étant la demi-circonférence pour le rayon 1; on fera donc $T \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \frac{\pi}{2} + t'$; substituant dans l'équation précédente, et négligeant les puissances de t' supérieures à la première, ainsi que le produit $t' k$, on aura, pour déterminer la correction t',

l'équation $-t' + \frac{mk}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = a$, d'où l'on tire $t' = \frac{mk}{3}$, et

$$T\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \frac{\pi}{2} + \frac{mk}{3}.$$

Ainsi le temps de la première demi-oscillation est augmenté par l'effet de la résistance du milieu.

Pour avoir la vîtesse au point le plus bas, différencions la valeur trouvée pour s, et substituons dans $\frac{ds}{dt}$ la valeur de T; nous aurons, en appelant V cette vîtesse, et en rejetant les puissances de k supérieures à la seconde, $V = -k\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\left(1 - \frac{2mk}{3}\right)$; ou bien, en faisant abstraction du signe qui indique seulement le sens du mouvement,

$$V = k\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\left(1 - \frac{2mk}{3}\right);$$

où l'on voit que la vîtesse acquise au point le plus bas, est diminuée par la résistance du milieu.

Déterminons maintenant le temps de la seconde demi-oscillation. L'équation du mouvement pendant cette demi-oscillation, sera

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} - m\frac{ds^2}{dt^2};$$

car la composante $g\frac{dx}{ds}$ de la gravité tend à diminuer l'arc s compté du point le plus bas, qui est maintenant le point de départ; et la résistance du milieu, s'exerçant toujours en sens contraire du mouvement, tend aussi à diminuer l'arc s. On aura comme ci-dessus, en négligeant d'abord les puissances de s et de $\frac{ds}{dt}$ supérieures à la première, $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{a}s$; d'où l'on tire, en intégrant,

$$s = k\left(1 - \frac{2mk}{3}\right).\ \text{sin.}\ t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)},$$

les constantes arbitraires étant déterminées par la condition qu'au point de départ on ait $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = V = k\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\left(1 - \frac{2mk}{3}\right)$;

faisant donc

$$s = k\left(1 - \frac{2mk}{3}\right)\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + s',$$

et déterminant s' de la même manière que plus haut, on trouve

$$s' = -\frac{k^2 m}{2}\left[1 - \frac{1}{3}.\cos. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{2}{3}.\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right];$$

donc

$$s = k\left(1 - \frac{2mk}{3}\right)\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{k^2 m}{2}\left[1 - \frac{1}{3}.\cos. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{2}{3}.\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right],$$

formule qui représentera, par approximation et en s'arrêtant à la seconde puissance de k, la valeur de s pendant toute la durée de la seconde demi-oscillation.

Soit T' le temps de cette demi-oscillation; on aura, pour le déterminer, l'équation $\frac{ds}{dt} = 0$, ou

$$\left(1 - \frac{2mk}{2}\right)\cos. T'\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{km}{3}\left[\sin. 2T'\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \sin. T'\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right] = 0;$$

faisant $T'\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \frac{\pi}{2} + t'$, et rejetant les puissances de t' supérieures à la première ainsi que le produit $k\,t'$, il vient $t' = -\frac{km}{3}$; donc

$$T'\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \frac{\pi}{2} - \frac{mk}{3};$$

donc le temps de la demi-oscillation ascendante est diminué par l'effet de la résistance du milieu, de la même quantité dont celui de la demi-oscillation descendante est augmenté; d'où il résulte ce théorème, que *le temps de l'oscillation entière est le même que si le mouvement eût eu lieu dans le vide.*

Pour déterminer l'amplitude de la seconde demi-oscillation, il n'y a qu'à faire $t = T'$ dans la valeur de s relative à cette demi-oscillation. En appelant k' cette amplitude, et en ne conservant que les deux premières puissances de k, on trouvera

$$k' = k - \frac{4mk^2}{3}.$$

De même, si l'on désigne par k'', k''', &c. les amplitudes de la troisième, quatrième

quatrième, &c. demi-oscillation, l'on aura

$$k'' = k' - \frac{4mk'^2}{3}, \quad k''' = k'' - \frac{4mk''^2}{3} \text{ &c. ;}$$

ce qui fait voir comment ces amplitudes diminuent successivement, et avec d'autant plus de rapidité que le coefficient m de la résistance est plus grand.

Nous avons supposé la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vîtesse, parce que c'est l'hypothèse qu'on fait le plus généralement; mais, si la fonction qui exprime la résistance renfermait un terme proportionnel à la simple vîtesse, et représenté par $n\frac{ds}{dt}$, il est facile de s'assurer que le temps de l'oscillation entière resterait encore le même que dans le vide, pourvu toutefois que la résistance du milieu fût une force très-petite par rapport au poids de la lentille, et que l'on négligeât dans le calcul le carré de n et le produit de n et de m. En effet, l'équation du mouvement serait alors

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} - n\frac{ds}{dt} \pm m\frac{ds^2}{dt^2},$$

en prenant le signe + pour la première demi-oscillation et le signe — pour la seconde, et en observant que le terme $-n\frac{ds}{dt}$ change de signe de lui-même, à cause du facteur $\frac{ds}{dt}$, en passant d'une demi-oscillation à l'autre; or, si l'on fait $s = s_1 e^{-\frac{nt}{2}}$, que l'on mette à la place de $\frac{dx}{ds}$, sa valeur approche $\frac{s}{a}$, et qu'après les substitutions faites, on supprime les termes multipliés par n^2 ou par mn, l'équation précédente deviendra

$$e^{-\frac{nt}{2}} \cdot \frac{d^2s_1}{dt^2} = -\frac{g}{a} \cdot s_1 e^{-\frac{nt}{2}} \pm m \cdot \frac{ds_1^2}{dt^2} \cdot e^{-nt}.$$

Divisant tous les termes par $e^{-\frac{nt}{2}}$, et remplaçant le facteur $me^{-\frac{nt}{2}}$

par m, ce qui est permis, parce que le temps t ne saurait devenir très-grand pendant la durée d'une seule demi-oscillation, on aura

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -\frac{g}{a} \cdot s_1 \pm m \frac{ds_1^2}{dt^2};$$

équation d'où l'on tirera sans peine les mêmes conséquences que ci-dessus, relativement à la durée de chacune des deux demi-oscillations.

Quelle que soit la loi de la résistance, la supposition que cette résistance est une force très-petite relativement au poids de la lentille, est conforme à ce qui a lieu dans la pratique, où la densité du milieu est très-petite, et où l'on a soin de prendre, pour former la lentille, une matière très-dense; mais on doit observer que cette supposition n'est plus nécessaire quand la résistance est proportionnelle au carré de la vîtesse, en sorte qu'alors cette résistance peut être une force comparable au poids de la lentille. Il suffit, dans ce cas, que l'amplitude de l'oscillation soit très-petite, pour que le temps de cette oscillation ne soit point altéré par cette résistance; car, dans le calcul que nous venons de faire, l'approximation n'a point eu lieu par rapport aux puissances du coèfficient m, mais bien par rapport aux puissances de k.

Mouvement du Pendule dans l'hypothèse d'un fil extensible.

SOIENT, à un instant quelconque, θ l'angle formé par le fil et la verticale; r la longueur variable du pendule, c'est-à-dire, la distance du centre d'oscillation au point de suspension; t le temps écoulé depuis l'origine du mouvement; g la gravité. L'élasticité du fil est une force qu'on peut regarder comme appliquée au centre d'oscillation, qui est dirigée suivant la longueur du fil, et qui ne peut être fonction que de cette longueur; je la désignerai par Φr, et l'on aura pour l'une des équations du mouvement du centre d'oscillation, en prenant pour unité la masse du pendule réunie à ce centre,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = g \cos. \theta - \Phi r.$$

Il faut, dans le cas qui nous occupe, une seconde équation, puisqu'on

à deux variables r et θ à déterminer en fonction de t; je prendrai pour cette seconde équation celle que fournit le principe des aires, savoir,

$$\frac{d.r^2 d\theta}{dt^2} = -gr \sin.\theta,$$

dans laquelle n'entre pas la force φr, parce que cette force est constamment dirigée vers l'origine des rayons vecteurs.

La forme de la fonction φr est inconnue : mais comme r varie peu pendant tout le mouvement, si on appelle a sa valeur à l'origine, et qu'on fasse généralement $r = a - u$, u sera une très-petite quantité, dont nous négligerons les puissances supérieures à la première ; alors nous aurons $\varphi r = A - Bu$, A et B étant des constantes données par l'expérience. Pour les déterminer, soit b la longueur du fil avant qu'il ait subi aucune extension ; supposons qu'après l'avoir ainsi mesuré, on le suspende verticalement, en attachant la lentille à son extrémité inférieure, et soit α (*) l'extension que le fil prend en vertu du poids de ce corps ; de sorte qu'on ait $b + \alpha = a$. Il faudra donc que la force φr soit nulle pour $r = b$, et qu'elle soit égale à la gravité g pour $r = a$; ainsi l'on aura $\varphi b = \varphi(a - \alpha) = A - B\alpha = 0$, et $\varphi a = A = g$; d'où l'on tire $A = g$, $B = \frac{g}{\alpha}$, et généralement

$$\varphi r = g - \frac{g}{\alpha} . u.$$

Cela posé, les équations du mouvement deviennent, en négligeant les puissances de u supérieures à la première,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -g\cos.\theta + g - \frac{g}{\alpha} . u, \qquad (1)$$

$$(a^2 - 2au)\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2a\frac{du}{dt} . \frac{d\theta}{dt} = -ga \sin.+\theta\, gu \sin.\theta. \qquad (2)$$

Pour les intégrer par approximation, négligeons d'abord dans l'équation (2) les termes de seconde dimension par rapport à θ et u; ce qui

(*) L'extension α est beaucoup trop petite pour pouvoir être observée directement sur la longueur du fil même ; on la conclut de l'extension mesurée sur un fil beaucoup plus long et de même matière que celui qu'on emploie.

la réduit à $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{a}\cdot\theta$, dont l'intégrale est $\theta = h \sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$; en supposant que le pendule soit parti de la position verticale, et en désignant par $h\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$ la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ à l'origine. Substituons cette valeur de θ dans l'équation (1), et ne conservons que le carré de h; nous aurons

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{a}\cdot u + \frac{gh^2}{2}\left[\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]^2,$$

dont l'intégrale complète est

$$u = C\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + C'\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \frac{h^2a}{4}\left[1 - \frac{1}{1-\frac{4a}{a}}\cdot\cos. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right], \quad (3)$$

C et C' étant les constantes arbitraires. Nous les déterminerons par la condition qu'on ait à l'origine $u = 0$, $\frac{du}{dt} = 0$, et comme la fraction $\frac{4a}{a}$ doit être négligée, parce que les termes renfermés dans les parenthèses sont déjà multipliés par a, nous aurons

$$u = \frac{h^2a}{4}\left[1 - \cos. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right].$$

Maintenant, si l'on fait $\theta = h \sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \theta'$, que l'on substitue cette valeur et celle de u dans l'équation (2), que l'on néglige les puissances de h supérieures à la troisième, que l'on néglige de même celles de θ' supérieures à la première, et enfin les produits $h^2\theta'$, $h^2\frac{d\theta'}{dt}$, l'on aura, pour déterminer la correction θ', l'équation

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{g}{a}\cdot\theta' + \frac{gh^3}{6a}\cdot\left[\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]^3$$
$$+\frac{gh^3a}{a^2}\cdot\left[\sin. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \frac{1}{4}\cdot\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]\left[1 - \cos. 2t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right],$$

ou bien, en développant les puissances et les produits de sinus et de cosinus que cette équation renferme, afin de faciliter l'intégration,

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{g}{a}\cdot\theta' + \frac{gh^3}{8a}\left[\left(1+\frac{a}{a}\right)\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5a}{a}\right)\sin. 3t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right].$$

En intégrant et en déterminant les constantes arbitraires de manière qu'on ait à-la-fois $t = 0$, $\theta' = 0$, $\frac{d\theta'}{dt} = 0$, on aura la valeur de θ', et par suite celle de θ, savoir :

$$\theta = h \sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} + \frac{h^3}{16}\left(1+\frac{a}{a}\right)\left[\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}.\cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{5a}{a}\right)\left[\sin. 3t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} - 3\sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right].$$

Si l'on demande l'instant où le pendule sera revenu à la position verticale, il faudra égaler à zéro cette valeur de θ pour le déterminer ; or, en négligeant le terme multiplié par h^3, l'équation $\theta = 0$ donnerait $t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \pi$, en appelant π la demi-circonférence pour le rayon 1 ; faisant donc $t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \pi + t'$, substituant dans l'équation $\theta = 0$, et négligeant les puissances de t' supérieures à la première, ainsi que le produit $h^2 t'$, il vient

$$-t' + \frac{h^2}{16}\left(1+\frac{a}{a}\right).\pi\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = 0;$$

d'où il suit

$$t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} = \pi\left[1 + \frac{h^2}{16}\left(1+\frac{a}{a}\right).\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right]. \quad (4)$$

En substituant cette valeur de $t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$ dans celles de u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, il est facile de vérifier que ces valeurs deviennent $u = 0$, $\frac{du}{dt} = o$, $\frac{d\theta}{dt} = -h\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$, en négligeant toutefois les puissances de h supérieures à la troisième, à laquelle nous avons borné notre approximation. Le pendule revenu à la position verticale, se retrouvera donc dans les mêmes circonstances que quand il en est parti, au signe près de la vîtesse $\frac{d\theta}{dt}$; d'où l'on peut conclure qu'il fera, de part et d'autre de la verticale, une suite infinie d'oscillations égales et d'égale durée. Le temps de ces oscillations sera donné par l'équation (4) ; et cette équation servira aussi à déterminer la longueur du pendule qui fait

ses oscillations dans l'unité de temps. On en tire, en y faisant $t = 1$ et en négligeant la quatrième puissance de h,

$$a = \frac{g}{\pi^2}\left[1 - \frac{h^2\pi}{8}\left(1 + \frac{\alpha\pi^2}{g}\right)\right].$$

Cette analyse fait voir que les petites oscillations d'un pendule extensible suivent la même loi que celles d'un pendule non extensible; seulement l'extensibilité du fil donne lieu à une légère correction dans la durée de l'oscillation et dans la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans l'unité de temps, et cette correction se confond avec celle qui est due à la grandeur de l'amplitude dont elle ne fait qu'augmenter le coëfficient. Cependant il est bon d'observer que ce résultat suppose, comme nous l'avons fait voir plus haut, que le pendule part de la position verticale après que le fil a pris toute son extension, et qu'on le dérange de cette position, en lui communiquant une vîtesse horizontale; de manière qu'à l'origine du mouvement, le raccourcissement u et la vîtesse $\frac{du}{dt}$ sont regardés comme nuls. Sans cela, les termes $C \cos. t\sqrt{\left(\frac{g}{\alpha}\right)}$, $C' \sin. t\sqrt{\left(\frac{g}{\alpha}\right)}$ resteraient dans l'équation (3), et les oscillations du pendule extensible dépendraient des deux angles $t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$ et $t\sqrt{\left(\frac{g}{\alpha}\right)}$; en sorte qu'elles suivraient une loi très-compliquée et différente de celle que suivent les oscillations du pendule ordinaire.

MÉMOIRE

Sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des Courbes, de la considération des Paraboles osculatrices, avec des Réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes;

Envoyé à l'Institut en frimaire an 12 [décembre 1803];

Par A. M. AMPÈRE, alors Professeur de mathématiques au Lycée de Lyon, actuellement Répétiteur de mathématiques à l'École polytechnique.

Il y a long-temps qu'on s'est aperçu qu'au lieu des abscisses et des ordonnées qu'on emploie communément à la détermination de la nature de chaque courbe, on pouvait se servir de différentes lignes qui changent de valeur à chaque point d'une courbe, telles que les arcs comptés depuis un point fixe, les tangentes, normales, sous-tangentes, sous-normales, rayons vecteurs, rayons de courbure, &c.; en sorte qu'une équation entre deux quelconques de ces lignes était aussi propre à représenter une courbe, que l'équation entre les coordonnées ordinaires. *Lacroix* observe, à ce sujet, dans le premier volume de son Calcul différentiel et intégral, qu'en choisissant pour coordonnées l'arc de la courbe depuis un point fixe et le rayon de courbure, on a une équation plus propre à caractériser la courbe qu'aucune autre, puisqu'elle ne dépend point, comme l'équation entre les coordonnées ordinaires, de la position et de la direction arbitraire des axes. Il avoue cependant que cette équation contient encore une constante arbitraire, à cause que rien ne détermine la position du point fixe, origine des arcs. Pour avoir une équation vraiment caractéristique d'une courbe, et où il ne restât rien qui pût varier sans que la courbe

changeât de forme, il faudrait employer deux lignes, qui, comme le rayon de courbure, dépendissent uniquement de la forme même que cette courbe affecte à chaque point. Les lignes qui dépendent des courbes osculatrices paraissent les plus propres à remplir ce but ; reste à examiner quelles sont, parmi ces lignes et ces courbes, celles qui présentent le plus d'avantage.

On distinguait autrefois les diverses espèces de contacts qui peuvent exister entre les courbes, par le nombre des points infiniment proches qu'on supposait communs aux deux courbes tangentes; on ne pouvait douter cependant que les contacts de toutes les espèces n'eussent lieu que dans un point indivisible. L'admirable théorie des fonctions dérivées a fait disparaître ces idées inexactes, comme toutes les autres difficultés que présentaient l'analyse transcendante et son application à la théorie des courbes.

Nous considérerons donc uniquement les contacts comme différant entre eux par le nombre des fonctions dérivées de l'ordonnée qui ont les mêmes valeurs dans les deux courbes, pour les mêmes coordonnées.

Ainsi, dans le contact du premier ordre, y' aura la même valeur dans les deux courbes en même temps que x et y; pour le contact du second ordre, ce seront y' et y'', et ainsi de suite.

La possibilité de satisfaire aux conditions du contact dépend, comme on sait, du nombre des constantes indépendantes que contient l'équation de la courbe osculatrice sous la forme la plus générale dont elle soit susceptible. Mais ce ne sont pas ces constantes dont les valeurs sont liées immédiatement aux dimensions de la courbe osculatrice, et sont propres à déterminer la forme de la courbe qu'elle touche ; ce sont les constantes qui, au contraire, se trouvent rester nécessairement dans l'équation de la courbe osculatrice, lorsqu'on la met sous la forme de toutes la moins générale : tels sont le rayon dans le cercle, les deux axes dans l'ellipse ou l'hyperbole, &c.

Il y a des courbes qui ne dépendent que d'une seule constante de cette sorte; d'autres de deux, de trois, &c. Ce qui pourrait servir à

les distribuer en diverses classes selon le nombre de ces constantes, le cercle, la parabole, l'hyperbole équilatère, la cycloïde appartiendraient à la première classe, l'ellipse à la seconde, la conchoïde parabolique à la troisième, &c. L'angle des coordonnées, quand on ne s'astreint pas à le faire droit, doit compter parmi ces constantes; il est clair, par exemple, que l'équation d'une hyperbole quelconque dépend de deux constantes, quoiqu'on puisse la mettre sous la forme $xy = a^2$, où il n'en reste qu'une en évidence, parce que l'autre est l'angle qu'il faut supposer entre les deux lignes qu'on prend alors pour axes.

Pour prévenir l'embarras que nous causeraient ces constantes, pour ainsi dire, sous-entendues, nous n'emploîrons dans ce mémoire que des coordonnées rectangulaires, à l'égard desquelles on ne peut être exposé au même inconvénient. Nous représenterons par t et u les coordonnées entre lesquelles l'équation de la courbe osculatrice existe sous la forme la moins générale, en désignant, pour conserver l'analogie, l'abscisse par la consonne t, qui précède immédiatement la voyelle u, qui représentera l'ordonnée, de même que la consonne x se trouve, dans l'ordre alphabétique, immédiatement avant la voyelle y. En nommant m le cosinus de l'angle formé par l'axe des t et celui des x, on trouvera l'équation la plus générale de la courbe osculatrice, en écrivant dans l'équation, entre t et u, $mx - \sqrt{(1 - m^2)}.y + a$, à la place de t, et $\sqrt{(1 - m^2)}.x + my + b$, à la place de u; cette équation contiendra donc, en général, trois constantes a, b, m, de plus que l'équation entre t et u, et je ne crois pas qu'il puisse y avoir à cette règle générale d'autre exception que celle qui a lieu à l'égard du cercle; la régularité de sa courbure fait que l'angle dont le cosinus $= m$ peut varier sans qu'aucun de ses points soit déplacé, et dès-lors cette constante cesse d'être essentielle à l'équation générale du cercle, et n'y entre plus que combinée avec r, a et b, de manière que ces quatre constantes n'entrent que dans trois des termes de l'équation

$$y^2 + x^2 + 2[am + b\sqrt{(1-m^2)}]x + 2[bm - a\sqrt{(1-m^2)}]y = r^2 - a^2 - b^2,$$

qu'on trouve en substituant à u et à t leurs valeurs dans $u^2 + t^2 = r^2$, en sorte qu'elles n'équivalent réellement qu'à trois constantes arbitraires. On pourra tirer aisément les valeurs de x et de y, en fonction de a, b, m, t, u; car on a

$$m^2 x - m\sqrt{(1-m^2)}y + am = mu, \quad (1-m^2)x + m\sqrt{(1-m^2)}y + b\sqrt{(1-m^2)} = t\sqrt{(1-m^2)},$$

ce qui donne sur-le-champ,

$$x = mu + t\sqrt{(1-m^2)} - am - b\sqrt{(1-m^2)};$$

et en opérant de même à l'égard de y, on trouve

$$y = mt - u\sqrt{(1-m^2)} - bm + a\sqrt{(1-m^2)};$$

au moyen de l'équation entre t et u, on pourra éliminer une de ces deux variables, par exemple u, et on aura x et y en fonction de la variable t, des trois constantes a, b, m, et de celles qui se trouvent dans l'équation entre t et u, que nous désignerons dorénavant sous le nom de *paramètres*. On en conclura aisément les valeurs de y', y'', y''', &c., en fonctions des mêmes quantités, et ce sera en égalant toutes ces fonctions aux valeurs données de x, y, y', y'', y''', &c., dans la courbe qui doit être touchée par l'osculatrice, qu'on aura les équations nécessaires pour déterminer celles dont on a besoin; et il y aura autant de ces équations que de quantités x, y, y', y'', y''', &c. Dans les contacts du premier ordre, on n'aura que trois équations qui ne pourront déterminer que les trois arbitraires a, b, m, en sorte que cette espèce de contact pourra avoir lieu quels que soient la courbe osculatrice et celui de ses points qu'on veut mettre en contact avec la courbe donnée, point qui est déterminé par la valeur de t, qu'on peut, dans ce cas-ci, prendre à volonté, ainsi que celles des paramètres, les valeurs trouvées dans ce cas pour a, b, m, ne déterminant que la position que doit alors avoir la courbe.

Il n'y a point de différence, à cet égard, entre les cercles et les autres courbes, malgré l'exception qu'on remarque dans son équation générale, ainsi que nous l'avons fait observer; et il est aisé de voir

qu'en prenant arbitrairement la valeur de t, et celle du rayon r qui sert de paramètre, on parviendra aux valeurs des trois quantités a, b, m, qui conviennent au contact du premier ordre. On observera seulement une circonstance assez remarquable à l'égard des trois constantes $am + b\sqrt{(1 - m)^2}$, $bm - a\sqrt{(1 - m)^2}$, $r^2 - a^2 - b^2$, qui entrent dans l'équation générale du cercle; c'est que leurs valeurs se trouveront indépendantes de t, quoique t entre dans celles des quantités a, m, b, dont elles sont composées. Il est aisé de sentir que cela doit être ainsi, à cause que la position du cercle qui est déterminée par ces trois constantes, est indépendante du point de sa circonférence qu'on choisit pour point de contact, ce qui n'a lieu dans aucune autre courbe; on peut aisément s'en assurer par le calcul des valeurs de a, b, m.

Passons à l'examen du contact du second ordre. Il présente une équation de plus que celui du premier, et on peut par conséquent, après avoir éliminé a, b, m, en tirer une équation entre t et les paramètres, qui donne la valeur de cette abscisse dans le cas où ils seraient tous connus, c'est-à-dire, où la courbe osculatrice serait complétement déterminée. Il est clair que cette valeur est celle de l'abscisse du point de la courbe osculatrice où elle a la même courbure que la courbe donnée au point où elles doivent se toucher; en sorte que cette considération peut conduire à la solution du problème suivant : deux courbes étant données, trouver sur l'une d'elles le point où sa courbure est égale à celle de l'autre en un point déterminé. Tout cela ne peut avoir lieu dans le cercle, dont la courbure est par-tout la même, ce qui doit laisser t indéterminé : il est aisé de sentir que cela tient à ce que t disparaît en même temps que a, b, m; en sorte que l'équation restante, au lieu de contenir, comme pour les autres courbes, l'abscisse t et les paramètres, ne renferme dans le cercle que le seul rayon dont la valeur ne soit pas déjà déterminée; il est dès-lors facile d'en tirer cette valeur comme on l'a fait depuis long-temps, cette valeur étant celle de ce qu'on appelle le rayon de courbure.

Enfin dans le cas d'un contact du troisième ordre, qui ne peut avoir

lieu à l'égard du cercle, puisqu'il exige quatre constantes arbitraires dans l'équation de la courbe osculatrice, il restera deux équations entre t et les paramètres ; et si la courbe osculatrice n'en a qu'un, on pourra déterminer complétement la valeur de ce paramètre et celle de t pour chaque point de la courbe touchée : et comme ces deux valeurs ne dépendent que de sa forme, on pourra établir entre elles une équation vraiment caractéristique de cette courbe; on pourra également se servir de u et du paramètre, ou plus simplement de u et de t, puisque les valeurs de t et du paramètre donnent immédiatement celle de u.

L'uniformité de la courbure du cercle s'opposant à ce qu'il puisse être employé à cet usage, il faut choisir parmi les autres courbes à un seul paramètre, celle dont l'équation promet plus de simplicité dans le calcul et dans les résultats; on ne peut guère douter qu'il ne convienne de s'en tenir à la parabole, et de remplacer, pour caractériser une courbe quelconque, l'équation rapportée, comme on le fait ordinairement, à des axes arbitraires, par l'équation qui existe à chacun de ces points entre les coordonnées naturelles de la parabole, qui se confond avec elle en ce point.

On pourrait craindre que la parabole osculatrice ne fût double à chaque point, puisqu'on sait qu'on peut, en général, faire passer deux paraboles par quatre points, et que l'un des cinq coëfficiens de l'équation générale du second degré, lorsqu'on la particularise en l'appliquant à la parabole, se trouve lié à deux des quatre autres, par une équation du second degré, qui semble annoncer deux solutions pour tous les problèmes de ce genre. On s'aperçoit aisément cependant que cette considération ne peut avoir lieu dans le cas présent ; et que si l'on vouloit concevoir deux paraboles osculatrices comme passant par quatre points infiniment proches d'une courbe quelconque, une d'elles ayant un paramètre nul, ses deux branches se réuniraient en une seule ligne droite, et se confondraient avec la tangente.

En substituant à t et à u leurs valeurs dans l'équation de la parabole

$x' = pt$, on a

$$m^2y^2 + 2m\sqrt{(1-m^2)}\,xy + (1-m^2)x^2 + 2\left[bm + \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1-m^2)}\right]y + 2\left[b\sqrt{(1-m^2)} - \tfrac{1}{2}pm\right]x = pa - b^2;$$

divisant par m^2, et faisant pour abréger $\frac{\sqrt{(1-m^2)}}{m} = n$, n représentant la tangente de l'angle dont m est le cosinus, l'équation précédente se changera en

$$y^2 + 2nxy + n^2x^2 + 2\,\frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\,y + 2\,\frac{bn - \frac{1}{2}p}{m}\,x = \frac{pa - b^2}{m^2};$$

différenciant et divisant par 2,

$$\left(y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\right)y' + ny + n^2x + \frac{bn - \frac{1}{2}p}{m} = 0,$$

ou

$$y' = -\,\frac{ny + n^2x + \frac{bn - \frac{1}{2}p}{m}}{y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}} = -\,n + \frac{\frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)}{m}}{y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}} =$$

$$-\,n + \frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)^{\frac{3}{2}}}{y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}};$$

ainsi

$$y' + n = \frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)^{\frac{3}{2}}}{y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}};$$

d'où l'on tire successivement

$$y'' = -\,\frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(y' + n)}{\left(y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\right)^2} = -\,\frac{\frac{1}{4}p^2(1+n^2)^3}{\left(y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\right)^3},$$

et

$$y''' = 3\,\frac{\frac{1}{4}p^2(1+n^2)^3(y' + n)}{\left(y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\right)^4} = 3\,\frac{\frac{1}{8}p^3(1+n^2)^{\frac{9}{2}}}{\left(y + nx + \frac{b + \frac{1}{2}pn}{m}\right)^5}.$$

Ce sont ces quatre équations qui doivent déterminer a, b, n et p, en

x, y, y', y'', y''' : il sera facile ensuite d'avoir t et u au moyen des valeurs générales que nous avons déjà trouvées pour ces deux inconnues. On a d'abord

$$\frac{3y''^2}{y'''} = \frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)^{\frac{3}{2}}}{y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}} = y'+n,$$

d'où l'on tire

$$1.^\circ\quad n = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'''},$$

$$2.^\circ\quad \frac{9y''^3}{y'''^2} = -\frac{\frac{1}{4}p^2(1+n^2)^3}{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^3} \times \frac{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^3}{\frac{1}{4}p^2(1+n^2)^3},$$

ce qui se réduit à

$$y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m} = -\frac{9y''^3}{y'''^2};$$

substituant cette valeur dans celle de $\frac{3y''^2}{y'''}$, on obtient

$$\frac{3y''^2}{y'''} = -\frac{\frac{1}{2}p(1+n^2)^{\frac{3}{2}}y'''^2}{9y''^3},$$

et

$$p = -\frac{54y''^5}{y'''^3(1+n^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{54y''^5}{y'''^3\left[1+\frac{(3y''^2-y'y''')^2}{y'''^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{54y''^5}{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}};$$

telle est la valeur du paramètre de la parabole osculatrice.

Pour avoir celle des coordonnées t et u, on se rappellera d'abord que $u = my + \sqrt{(1-m^2)}\,x + b = m\left(y+nx+\frac{b}{m}\right)$, et en substituant dans cette valeur, celle de $y+nx+\frac{b}{m}$, tirée de l'équation $y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m} = -\frac{9y''^3}{y'''^2}$, on trouvera

$$u = -\frac{9my''^3}{y'''^2} - \frac{1}{2}pn;$$

mais

$$m = \frac{1}{\sqrt{(1+n^2)}} = \frac{y'''}{\sqrt{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]}},$$

on a donc

$$u = -\frac{9y'''^3}{y'''\sqrt{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]}} + \frac{27y''^5(3y''^2-y'y''')}{y'''[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= \frac{27y''^5(3y''^2-y'y''')-9y'''^3[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]}{y'''[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= \frac{81y''^7-27y'y''^5y'''-9y'''^3y'''^2-81y''^7+54y'y''^5y'''-9y'^2y''^3y'''^2}{y'''[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= \frac{9y''^3[y'(3y''^2-y'y''')-y''']}{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}}:$$

quant à la valeur de t, on la trouvera en substituant celle de p et u, dans $t = \frac{u^2}{p}$, et on aura, toutes les réductions faites,

$$t = -\frac{\frac{3}{2}y''[y'(3y''^2-y'y''')-y''']^2}{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est à remarquer que ces expressions, ainsi que celles du rayon de courbure, n'éprouvent aucun changement, quelque transposition qu'on fasse éprouver aux axes des x et des y; en sorte qu'en nommant ζ et $\varkappa$ d'autres coordonnées quelconques, on aura pour le rayon de courbure,

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{(1+\varkappa'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varkappa''},$$

pour le paramètre de la parabole osculatrice,

$$-\frac{54y''^5}{[y'''^2+(3y''^2-y'y''')^2]^{\frac{5}{2}}} = -\frac{54\varkappa''^5}{[\varkappa'''^2+(3\varkappa''^2-\varkappa'\varkappa''')^2]^{\frac{5}{2}}},$$

et ainsi des autres. Cette propriété qui appartient à certaines fonctions différentielles, vient de ce que, en y substituant aux fonctions dérivées, leurs valeurs différentielles prises en faisant varier toutes les différentielles, pour conserver la symétrie entre l'abscisse et l'ordonnée, elles se réduisent à ne contenir plus que des fonctions de ces deux formes $d^p x\, d^q y - d^p y\, d^q x$, et $d^p x\, d^q x + d^p y\, d^q y$, dont la dernière comprend celle-ci $d^p x^2 + d^p y^2$, qui jouissent, exclusivement à toute autre fonction différentielle, de la propriété de ne point changer de valeur, lorsqu'on rapporte la courbe à de nouveaux axes. En effet, les équations générales de la transformation des axes

$x = m\zeta - \sqrt{(1-m^2)}.\varkappa + a$, et $y = m\varkappa + \sqrt{(1-m^2)}.\zeta + b$,

donnent

$$d^p x = m\,d^p\zeta - \sqrt{(1-m^2)}.d^p\gamma,\quad d^p y = m\,d^p\gamma + \sqrt{(1-m^2)}.d$$
$$d^q x = m\,d^q\zeta - \sqrt{(1-m^2)}.d^q\gamma,\quad d^q y = m\,d^q\gamma + \sqrt{(1-m^2)}.$$

substituant et réduisant, l'on trouvera

$$d^p x\,d^q y - d^p y\,d^q x = d^p\zeta\,d^q\gamma - d^p\gamma\,d^q\zeta,$$
$$d^p x\,d^q x + d^p y\,d^q y = d^p\zeta\,d^q\zeta + d^p\gamma\,d^q\gamma :$$

et il sera aisé de voir que les mêmes réductions ne peuvent avoir li l'égard d'aucune autre forme de fonctions différentielles.

Pour y ramener les valeurs des lignes qui dépendent des cou osculatrices, il suffit d'observer qu'on a

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$
$$y''' = \frac{(dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,dx - 3\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^2x}{dx^5},$$

&c. &c.

d'où l'on tire $1 + y'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}$,

$$3y''^2 - y'y''' = \frac{3\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^2y - (dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,dy}{dx^5}$$

$$y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2 = \frac{(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2(dx^2+dy^2) - 6(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx\,d^2x + dy\,d^2y) + 9(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2(d^2x^2 + d^2y^2)}{dx^{10}}$$

$$y'(3y''^2 - y'y''') - y''' = \frac{3(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^2x + dy\,d^2y) - (dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx^2 +$$

Ces valeurs suffisent pour transformer celles de r, p, t, u, en fonctio dx, dy, d^2x, d^2y, &c. ainsi qu'il suit : $r = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$,

$$p = -\frac{54\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^5}{[(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2(dx^2+dy^2) - 6(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^3y - dy\,d$$
$$(dx\,d^2x + dy\,d^2y) + 9(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2(d^2x^2 + d^2y^2)]^{\frac{3}{2}},$$

$$t = -\frac{\frac{3}{2}(dx\,d^2y - dy\,d^2x)[3(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^2x + dy\,d^2y) - (dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx^2 +$$
$$[(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2(dx^2+dy^2) - 6(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx\,d^2x + dy\,d$$
$$+ 9(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2(d^2x^2 + d^2y^2)]^{\frac{3}{2}}$$

$$u = \frac{9(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^3[3(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^2x + dy\,d^2y) - (dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx^2 +$$
$$[(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2(dx^2+dy^2) - 6(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(dx\,d^3y - dy\,d^3x)(dx\,d^2x + dy\,d^2y$$
$$+ 9(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2(d^2x^2 + d^2y^2)]^{\frac{3}{2}}$$

et pour montrer, par la forme de ces fonctions, que ces quantités ne sont susceptibles d'aucune variation, lorsqu'on emploie de nouvelles coordonnées ζ et υ.

On voit qu'on peut former à volonté des fonctions qui jouissent de cette propriété, de ne point changer de valeur lorsqu'on transforme les axes, puisqu'il ne s'agit pour cela que de les composer de termes d'une de ces deux formes $d^p x\, d^q y - d^p y\, d^q x$, et $d^p x\, d^q x + d^p y\, d^q y$.

Parmi ces fonctions, l'expression du rayon de courbure est remarquable par sa simplicité; car elle est formée des deux fonctions $dx^2 + dy^2$ et $dx\, d^2y - dy\, d^2x$, dont la première est la plus simple de celles qui se rapportent à la formule

$$d^p x\, d^q x + d^p y\, d^q y,$$

et la seconde la plus simple de celles que donne la formule $d^p x\, d^q y - d^p y\, d^q x$. A l'égard de l'exposant $\frac{3}{2}$, qui affecte $dx^2 + dy^2$ dans la valeur du rayon de courbure, il est nécessaire pour rendre homogènes le numérateur et le dénominateur de cette valeur.

Il n'en est pas de même des valeurs de t et de u; elles sont assez compliquées pour rendre pénible en général le calcul de l'équation entre t et u, qu'on doit obtenir, en éliminant x des valeurs de ces deux variables en fonction de x : on peut le simplifier un peu en faisant cette élimination entre $\frac{u^2}{t}$, qui ne contient que y'' et $y'''^2 + (3\,y''^2 - y'\,y''')^2$, et $\frac{u}{t} = \frac{6\,y''^2}{y'''-y'(3y''^2-y'y''')}$, qui ne contient que y' et $y''' - y'\,(3\,y''^2 - y'\,y''')$.

Soit, par exemple, une ellipse dont l'équation est $y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, l'on aura $y' = -\frac{b}{a}\,x\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$$y'' = -\frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{b}{a}\,x^2(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} = -a\,b\,(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = -3\,a\,b\,x\,(a^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}};$$

d'où l'on tire, en se rappelant que $a^2 - b^2 = c^2$,

$$3y''^2 - y'y''' = 3a^2b^2(a^2-x^2)^{-3} - 3b^2x^2(a^2-x^2)^{-3} = 3b^2(a^2-$$

$$y''' - y'(3y''^2 - y'y''') = -3abx(a^2-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3\frac{b^3}{a}x(a^2-x^2$$

$$-3\frac{b}{a}c^2x(a^2-x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2 = 9a^2b^2x^2(a^2-x^2)^{-5},$$

$$+9b^4(a^2-x^2)^{-4} = 9b^2(a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2)(a^2-x^2)$$

$$9b^2(a^2b^2 + c^2x^2)(a^2-x^2)^{-5};$$

et par conséquent,

$$\frac{u}{t} = -\frac{6a^3b^3(a^2-x^2)^{-3}}{3\frac{b}{a}c^2x(a^2-x)^{-\frac{5}{2}}} = -\frac{2a^3b}{c^2x\sqrt{(a^2-x^2)}};$$

et

$$\frac{u^2}{t} = p = \frac{54a^3b^3(a^2-x^2)^{-\frac{15}{2}}}{27b^3(x^2b^2+c^2x^2)^{\frac{3}{2}}(a^2-x^2)^{-\frac{15}{2}}} = \frac{2a^3b^2}{(a^2b^2+c^2x}$$

pour éliminer x, on tirera de la valeur de $\frac{u}{t}$,

$$a^2c^4x^2 - c^4x^4 = \frac{4a^6b^2t^2}{u^2},$$

et de celle de $\frac{u^2}{t}$,

$$c^2x^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{4a^{10}b^4t^2}{u^4}\right)} - a^2b^2,$$

substituant dans la précédente, on obtiendra

$$a^2c^2\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4a^{10}b^4t^2}{u^4}\right)} - a^2b^2\right] - \left[\sqrt[3]{\left(\frac{4a^{10}b^4t^2}{u^4}\right)} - a^2b^2\right]^2 =$$

ou

$$c^2\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4a^4b^4t^2}{u^4}\right)} - b^2\right] - \left[\sqrt[3]{\left(\frac{4a^4b^4t^2}{u^4}\right)} - b^2\right]^2 =$$

équation de l'ellipse rapportée aux coordonnées de ses pa
latrices; on pourrait trouver de la même manière celle c
courbe. On peut remarquer, en passant, que le diamèt
bole osculatrice, à chaque point de l'ellipse, se confon

cette courbe, et a le même paramètre. Pour le démontrer, on observera d'abord, que la tangente de la courbe touchée, l'étant aussi de la parabole, et ayant, par conséquent, par rapport à l'axe de cette dernière courbe, une sous-tangente égale à $2t$; la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle forme avec cet axe, est égale à $\frac{u}{2t}$; c'est-à-dire, en général, à

$$\frac{3y''^2}{y''' - y'(3y''^2 - y'y''')},$$

et dans l'ellipse, à

$$- \frac{a^3 b}{c^2 x \sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Le signe qui précède cette valeur, indique que l'angle dont elle donne la tangente est obtus du côté où les x et les y positifs vont en croissant indéfiniment. Comme il suffit de prouver que l'axe de la parabole est parallèle au diamètre de l'ellipse, pour démontrer que ce dernier se confond avec celui de la parabole, il ne s'agira plus que de faire voir qu'on trouve la même valeur pour la tangente trigonométrique de l'angle que le diamètre de l'ellipse forme avec la tangente du côté de l'axe, et qui est alterne interne de celui dont nous venons de déterminer la tangente. Or, on sait que les coordonnées de l'extrémité d'un diamètre étant x et $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, celles de l'extrémité de son conjugué, sont $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ et $- \frac{bx}{a}$, en sorte que les tangentes des angles qu'ils forment avec l'axe, sont

$$\frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{ax}, \text{ et } - \frac{bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

ce qui donne pour la tangente de l'angle des deux diamètres considéré comme la différence (*) de ces deux angles,

$$\frac{\frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{ax} + \frac{bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^3 b}{c^2 x \sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

(*) Il en serait la somme si l'on avait pris positivement les deux angles, et par conséquent les valeurs de leurs tangentes; on parvient de l'une et de l'autre manière au même résultat.

Cet angle étant le supplément de celui que le diamètre et la tangente forment du côté de l'axe, ce dernier aura pour tangente

$$-\frac{a^3 b}{c^2 x \sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

comme nous nous étions proposé de le démontrer. Reste à faire voir que le paramètre du diamètre de la parabole est égal à celui de l'ellipse; le premier est égal à $p + 4t$, c'est-à-dire, à cause qu'on a

$$4t = -\frac{6y''[y''' - y'(3y''^2 - y'y''')]}{[y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2]^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{c^4 x^2 (a^2 - x^2)}{a(a^2 b^2 + c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qu'il est égal à

$$2\frac{a^6 b^2 + a^2 c^4 x^2 - c^4 x^4}{a(a^2 b^2 + c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on décompose le second terme $a^2 c^4 x^2$ du numérateur, ainsi qu'il suit $a^4 c^2 x^2 - a^2 b^2 c^2 x^2$, on verra que la valeur que nous venons de trouver, peut être divisée en haut et en bas, par $a^2 b^2 + c^2 x^2$, ce qui la réduit à $2\frac{a^4 - c^2 x^2}{a\sqrt{(a^2 b^2 + c^2 x^2)}}$.

Quant au paramètre du diamètre de l'ellipse, comme ce diamètre est égal à

$$2\sqrt{\left[x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\right]} = \frac{2}{a}\sqrt{(a^2 b^2 + c^2 x^2)},$$

et que son conjugué a pour valeur

$$2\sqrt{\left(a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}\right)} = \frac{2}{a}\sqrt{(a^4 - c^2 x^2)},$$

on trouvera, par une simple règle de trois, que son paramètre est, comme dans la parabole, égal à $2\frac{a^4 - c^2 x^2}{a\sqrt{(a^2 b^2 + c^2 x^2)}}$.

La valeur générale que nous avons trouvée pour la tangente trigonométrique $\frac{u}{2t}$, de l'angle que forme l'axe de la parabole osculatrice avec la tangente au point de contact, est, dans toutes les courbes, égale au triple de la fonction prime de l'arc considéré comme une fonction du rayon de courbure et d'une constante arbitraire, qui dépend

du point qu'on choisit pour l'origine de l'arc, et qui disparaît dans l'opération par laquelle on détermine sa fonction prime. On sait, en effet, que cette fonction est égale à la fonction prime de l'arc, par rapport à une variable quelconque divisée par celle du rayon de courbure rapportée à la même variable : or, en nommant l'arc s, le rayon de courbure r, leurs fonctions primes s', r', relativement à l'abscisse x, on aura

$$s' = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r' = -\frac{3y'y''^2(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{s'}{r'} = -\frac{y''^2}{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''} = \frac{y''^2}{y''' - y'(3y''^2 - y'y''')},$$

qui est précisément le tiers de la valeur que nous avons trouvée pour $\frac{u}{2t}$. On peut tirer de là cette proportion remarquable, en ce qu'elle a lieu dans toutes les courbes $u : 6t :: s' : r'$. L'équation de l'ellipse relativement à ses coordonnées paraboliques, telle que nous venons de la trouver, est beaucoup plus compliquée que son équation par rapport à deux axes rectilignes ; il n'en faut pas conclure que la même chose ait lieu dans les autres courbes. On ne peut douter que l'équation aux coordonnées paraboliques ne soit souvent la plus simple, quand ce ne serait qu'à cause qu'elle ne contient jamais d'autres constantes que les paramètres de la courbe, qui entrent nécessairement dans toutes les équations qui peuvent la représenter.

Il y a même des courbes dont l'équation, transcendante lorsqu'on la rapporte aux axes ordinaires, devient algébrique par rapport aux coordonnées paraboliques ; c'est ce qui arrive à l'égard de la cycloïde ; telle est aussi la développante du cercle, dont les mathématiciens se sont si peu occupés, quoique *Diderot* ait fait un ouvrage exprès pour la leur rappeler, et qu'elle présente bien d'autres propriétés remarquables que celles qu'a indiquées cet auteur. L'objet de ce mémoire ne me permet de m'occuper que de la simplicité de ses équations entre l'arc et le rayon de courbure, et entre les coordonnées paraboliques.

Avant d'entreprendre cette recherche, voyons d'abord s'il n'y a point d'autres fonctions de u et de t, que les deux que nous avons employées à la recherche de l'équation parabolique de l'ellipse, dont les valeurs en y', y'', y''', présentent encore plus de simplicité. Nous aurons d'abord

$$2ut = -\frac{27y''^4[y'(3y''^2 - y'y''') - y''']^3}{[y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2]^3},$$

puis

$$4t^2 + u^2 = \frac{9y''^2[y'(3y''^2 - y'y''') - y''']^4 + 81y''^6[y'(3y''^2 - y'y''') - y''']^2}{[y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2]^3} =$$
$$\frac{9y''^2[y'(3y''^2 - y'y''') - y''']^2}{[y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2]^2} \times \frac{[3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)]^2 + 9y''^4}{y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2} =$$
$$\frac{9y''^2[y'(3y''^2 - y'y''') - y''']^2(1 + y'^2)}{y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^2}.$$

En comparant cette valeur à celle de $2ut$, on voit qu'il suffit de l'élever à la puissance $\frac{3}{2}$ pour lui donner le même dénominateur et que les deux numérateurs aient un facteur commun : en exécutant les réductions qui résultent de cette considération, on trouvera

$$\frac{(4t^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{2ut} = -\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

valeur remarquable non-seulement par sa simplicité, mais encore parce que c'est précisément la valeur du rayon de courbure. On aurait pu parvenir au même résultat, mais d'une manière moins simple et surtout moins directe, en faisant attention que la courbe, et sa parabole osculatrice, ont au point de contact le même rayon de courbure; et en substituant dans l'expression connue de celui de la parabole, $\frac{u^2}{t}$ à la place de p.

Revenons à la développante du cercle. Il est évident que l'accroissement de son arc est à celui de son rayon de courbure, comme ce rayon est à celui du cercle qui lui sert de développée; on aura donc en nommant ce dernier a, et égalant le produit des moyens à celui

des extrêmes, l'équation

$$r\,dr = a\,ds,$$

ou

$$r^2 = 2a(s + c),$$

dont la simplicité est singulièrement remarquable.

Pour avoir l'équation entre les coordonnées paraboliques, on substituera dans l'équation $\frac{u}{6t} = \frac{s'}{r'}$, à la place de $\frac{s'}{r'}$, sa valeur $\frac{ds}{dr} = \frac{r}{a}$, et on aura

$$\frac{u}{6t} = \frac{r}{a} = \frac{(4t^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{2aut},$$

qui se réduit à

$$au^2 = 3(4t^2 + u^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$a^2u^4 = 9(4t^2 + u^2)^3,$$

équation algébrique, comme nous l'avions annoncé, et qui est encore fort simple. La même méthode peut servir pour toutes les courbes dont on a l'équation entre l'arc et le rayon de courbure; car, après en avoir tiré, par la différenciation, la valeur de $\frac{ds}{dr}$, en fonction de r, opération que fera disparaître toute constante dépendante de l'origine des s, on substituera dans cette valeur $\frac{(4t^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}}{2ut}$ à la place de r, et on l'égalera à $\frac{u}{6t}$, ce qui donnera l'équation cherchée entre t et u. C'est ainsi qu'on trouve une équation algébrique pour la cycloïde rapportée à ses coordonnées paraboliques. En effet, l'arc compté du sommet étant double d'une des cordes du cercle générateur, et le rayon de courbure double de l'autre, on a, en nommant a le rayon de ce cercle, l'équation $s^2 + t^2 = 16a^2$, sur laquelle il ne s'agit plus que d'exécuter les opérations que nous venons d'indiquer.

Il n'en est pas des paraboles osculatrices comme des cercles osculateurs, qui coupent la courbe en la touchant; les paraboles la laissent

en général toute d'un même côté : cela dépend de la théorie généra des contacts, et il est aisé de voir que les ordonnées qui avoisine y étant toujours représentées par $y + y'i + \frac{y''}{2} i^2 + \frac{y'''}{2.3} i^3 +$ &c et $y - y'i + \frac{y''}{2} i^2 - \frac{y'''}{2.3} i^3 +$ &c., i étant une quantité trè petite, il s'en suit que dans le contact du premier ordre, tel qu celui qui a lieu entre une courbe et sa tangente, la manière dont l deux courbes se séparent dépend du terme $\frac{y''}{2} i^2$ qui a le même sign dans l'ordonnée qui précède, et dans celle qui suit y, en sorte que cell des deux lignes qui est au-dessus de l'autre avant le point de contac l'est encore après : il en est de même de tous les contacts d'ordre impai où la manière dont les deux lignes se séparent dépend d'un terme où est élevé à une puissance paire; c'est le contraire quand le contact e d'ordre pair, par exemple, dans le contact du second ordre du cercl osculateur, la manière dont il se sépare de la courbe qu'il touche dépend du terme $\pm \frac{y'''}{2.3} i^3$, qui change de signe de l'ordonnée pr cédente à la suivante, en sorte que si le cercle osculateur est au-dessou de la courbe qu'il touche, avant le point de contact, il se trouve apr au-dessus, *et vice versâ :* le même raisonnement s'applique à tous l contacts d'ordre pair ; ces règles, toujours vraies relativement l'ordre du contact, paraissent subir une exception à l'égard de l'e pèce des courbes osculatrices, dans les points singuliers où le conta peut être d'un ordre supérieur à celui que comporte la nature de c courbes.

La règle générale pour déterminer ces points, est d'égaler les valeu qu'a, dans les deux lignes qui se touchent, la fonction dérivée de l'o donnée qui suit immédiatement celles qu'on a égalées, pour en déduir les élémens du contact. Ainsi, les points où le cours d'une courbe s rapproche le plus d'une ligne droite, sont ceux où l'on a $y'' = 0$, comm dans la ligne droite; et, dans ces points, la tangente coupe la courb en la touchant, parce que le contact devient du second ordre. Les poin-

où la courbure se rapproche davantage de celle du cercle, sont ceux où le contact du cercle osculateur devient du troisième ordre, et où le cercle touche par conséquent la courbe sans la couper, comme il fait ordinairement. On sait que ces points sont ceux où le rayon a la plus grande ou la plus petite valeur, et que le cercle osculateur touche la courbe en dehors dans le cas où ce rayon est un *maximum*, et en dedans lorsqu'il est un *minimum*. Comme il faut qu'à ces points $r' = 0$, il suit de la valeur trouvée tout-à-l'heure pour r', qu'on y a $y''' - y'(3y''^2 - y'y''') = 0$, ce qui réduit à zéro les valeurs de t et de u, et fait voir que le point de contact de la parabole osculatrice se trouve alors au sommet de cette courbe, qui est en effet le seul point où elle puisse avoir avec un cercle un contact du troisième ordre, comme elle doit l'avoir dans les cas que nous examinons avec le cercle osculateur de la courbe qu'elle touche.

La parabole osculatrice d'une courbe quelconque devant avoir, au point de contact, le même rayon de courbure que cette courbe, et celui d'une parabole à son sommet étant toujours égal à la moitié du paramètre, il s'ensuit qu'en vertu de l'équation $y''' - y'(3y''^2 - y'y''') = 0$, la valeur générale de p doit devenir égale au double de celle de r: c'est ce qu'il est aisé de vérifier par le calcul; car d'abord cette équation réduit cette valeur à $p = -\dfrac{54\,y''^5}{\dfrac{y'''^3}{y'^3}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$,

et elle donne ensuite $y'''(1+y'^2) = 3y'y''^2$,

ou $\dfrac{y'''}{y'} = \dfrac{3y''^2}{1+y'^2}$; substituant cette valeur dans celle de p, l'on a

$$p = -\frac{54\,y''^5(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{27\,y''^6} = -\frac{2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 2r.$$

Pour déterminer les points où le cours d'une courbe se rapproche le plus de celui de sa parabole osculatrice, il faut comparer les fonctions dérivées de l'ordonnée du quatrième ordre dans les deux courbes; celle de la courbe touchée étant représentée par y'''', il faudra calculer celle

de la parabole, en différenciant la valeur trouvée ci-devant pour y''', ce qui donnera

$$-15\,\frac{\frac{1}{8}p^3(1+n^2)^{\frac{9}{2}}(y'+n)}{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^6},\text{ ou }-15\,\frac{\frac{1}{16}p^4(1+n^2)^6}{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^7}.$$

Pour trouver la valeur de cette quantité en fonction de y', y'', y''', on se rappellera que

$$y''^2=\frac{\frac{1}{16}p^4(1+n^2)^6}{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^6},$$

et que

$$y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}=-\frac{9y''^3}{y'''^2},$$

d'où l'on tirera

$$-15\,\frac{\frac{1}{16}p^4(1+n^2)^6}{\left(y+nx+\frac{b+\frac{1}{2}pn}{m}\right)^7}=\frac{225\,y''^2y'''^2}{9y''^3}=\frac{5y'''^2}{3y''},$$

et pour que cette quantité soit égale à y'''', il faudra qu'on ait $5y'''^2-3y''y''''=0$, équation qui fera connaître les points où le contact de la parabole osculatrice, devenant du quatrième ordre, elle coupe la courbe en la touchant à la manière du cercle osculateur. Ces points séparent, en général, les branches de courbe qui sont touchées en dedans par leurs paraboles osculatrices, de celles qui le sont en dehors. La distinction de ces deux sortes de branches, des courbes qui n'en ont que d'une sorte, et de celles qui les réunissent toutes deux, mérite bien de nous occuper un instant. Les quantités dont la courbe s'éloigne de sa tangente parallèlement aux ordonnées, avant et après l'ordonnée y, étant, en général, représentées par

$$\frac{y''}{2}i^2\pm\frac{y'''}{2.3}i^3+\frac{y''''}{2.3.4}i^4\pm\&c.$$

et celles dont la parabole osculatrice s'éloigne de la même tangente l'étant par

$$\frac{y''}{2}i^2\pm\frac{y'''}{2.3}i^3+\frac{5y'''^2}{2.3.4.3y''}i^4\pm\&c.,$$

il est clair que la parabole touchera la courbe en dedans, tant que cette dernière quantité aura une valeur absolue (*) plus grande que celle de la précédente, c'est-à-dire, toutes les fois que $\frac{5\,y'''^2}{3\,y''} - y''''$, sera de même signe que y'' qui détermine le signe de toute la quantité, en déterminant celui de son plus grand terme $\frac{y''}{2}\,i^2$. Ce cas est facile à reconnaître, à ce que le triple du produit de ces deux quantités $5\,y'''^2 - 3\,y''\,y''''$ y est toujours positif. Le même produit est, au contraire, toujours négatif dans le cas où la parabole osculatrice touche la courbe en dehors, c'est-à-dire du côté de la convexité, parce qu'alors $\frac{5\,y'''^2}{3\,y''} - y''''$ doit être de signe contraire à y'', ce qui affecte nécessairement du signe — le produit de ces deux quantités. C'est ce dernier cas qui a lieu dans l'ellipse ; car, en joignant aux valeurs que nous avons trouvées ci-devant pour y, y', y'', y''', celle de y'''', qui est

$$y'''' = -3\,a\,b\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 15\,a\,b\,x^2\,(a^2 - x^2)^{-\frac{7}{2}},$$

on trouvera, toutes réductions faites, $5\,y'''^2 - 3\,y''\,y'''' = -9\,a^2\,b^2\,(a^2 - x^2)^{-4}$; l'ellipse est donc touchée par toutes ses paraboles osculatrices du côté de sa convexité, comme il était aisé de le prévoir d'après la forme de l'équation au paramètre, commune à tous ses diamètres. C'est le contraire dans l'hyperbole ; et il est aisé de s'assurer par le calcul, que la valeur de $5\,y'''^2 - 3\,y''\,y''''$, y est constamment positive. Prenons pour second exemple les paraboles représentées par l'équation générale

$$y = x^n,$$

nous aurons

$$5\,y'''^2 - 3\,y''\,y'''' = 5\,n^2\,(n-1)^2\,(n-2)^2\,a^2x^{2n-6} - 3\,n^2\,(n-1)^2\,(n-2)\,(n-3)\,a^2x^{2n-6} =$$
$$(n-2)\,[5\,(n-2) - 3\,(n-3)]\,n^2\,(n-1)^2a^2x^{2n-6} = (n-2)\,(2n-1)\,n^2\,(n-1)^2a^2x^{2n-6}.$$

Les seuls facteurs qui puissent devenir négatifs dans cette valeur, sont

(*) J'entends par-là la valeur considérée en elle-même, abstraction faite du signe.

évidemment $n - 2$ et $2n - 1$; c'est pourquoi elle sera négative, et la courbe sera touchée en dehors par toutes ses paraboles osculatrices : quand ces deux facteurs seront de signes contraires, c'est-à-dire, quand n sera renfermé entre ces deux limites $\frac{1}{2}$ et 2, comme il arrive, par exemple, dans la seconde parabole cubique, soit qu'on prenne pour son équation $y = ax^{\frac{3}{3}}$ ou $y = ax^{\frac{3}{2}}$, qui représente évidemment la même courbe.

Le contraire aura lieu lorsque les deux facteurs $n - 2$ et $2n - 1$ seront de même signe, ce qui arrivera toutes les fois que n sera plus grand que 2, ou plus petit que $\frac{1}{2}$; la première parabole cubique donne un exemple de ce cas, n y est plus grand que 2 quand on la représente par l'équation $y = ax^3$, et plus petit que $\frac{1}{2}$ quand on se sert de l'équation équivalente $y = ax^{\frac{1}{3}}$: cette courbe est donc touchée en dedans par toutes ses paraboles osculatrices. Si on écrit $-n$, au lieu de n, on aura l'équation $y = ax^{-n}$, qui est celle des hyperboles de tous les degrés, et l'on trouvera

$$5y'''^2 - 3y''y'''' = (n+2)(2n+1)n^2(n+1)^2a^2x^{-2n-6},$$

quantité toujours positive, d'où il suit que ces courbes ne peuvent être touchées qu'en dedans par leurs paraboles osculatrices.

La propriété d'être touchée en dedans ou en dehors, étant indépendante de la transformation des axes, il s'ensuit que si la fonction $5y'''^2 - 3y''y''''$ n'est pas du nombre de celles qui ne changent point de valeur dans cette transformation, cela ne peut venir que d'un multiplicateur ou d'un diviseur supprimé dans cette quantité, et qu'il suffit de rétablir pour avoir une fonction absolument indépendante de la position des axes, dont le signe sera toujours le même que celui de $5y'''^2 - 3y''y''''$, et qui déterminera par conséquent de même la position des paraboles osculatrices, pourvu que le facteur introduit soit nécessairement positif. Pour déterminer le facteur le plus propre à remplir ce but, commençons par substituer à la place de y'' et y''', les

valeurs que nous avons trouvées en différentielles, et à la place de y''''' la suivante,

$$y''''' = \frac{(dx\,d^4y - dy\,d^4x + d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)\,dx^2 - 3\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,dx\,d^3x\ldots}{dx^7}$$

nous aurons

$$5y'''^2 - y''y''''' = \frac{5\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2\,dx^2 - 9\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,dx\,d^2x\ldots}{dx^{10}}$$

dont les deux termes

$$-9\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,dx\,d^2x + 9\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\,dx\,d^3x,$$

peuvent être mis sous cette forme

$$-9\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(dx^2\,d^2x\,d^3y - dx^2\,d^2y\,d^3x) = -9\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,dx^2,$$

ce qui réduit la valeur précédente à

$$5y'''^2 - 3y''y''''' = \frac{5\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2 - 3\,(dx\,d^4y - dy\,d^4x)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\ldots}{dx^8}$$

où il n'y a que le dénominateur dx^8 qui puisse varier par le changement des axes; il suffit donc, pour obtenir une fonction invariable, de diviser $5\,y'''^2 - 3\,y''\,y'''''$, par une autre quantité de même nature, qui ait aussi pour valeur une fonction invariable, divisée par le même dénominateur dx^8 : telle est la fonction $(1 + y'^2)^4$, qui joint aux propriétés précédentes celle de ne pouvoir jamais devenir négative; l'on a ainsi la quantité

$$\frac{5y'''^2 - 3y''y'''''}{(1+y'^2)^4} = \frac{5\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)^2 - 3\,(dx\,d^4y - dy\,d^4x)\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)\ldots}{(dx^2 + dy^2)^4},$$

qui ne pourra changer de valeur par aucune transformation d'axes, et dont le signe fera connaître si la courbe est touchée en dedans ou en dehors par ses paraboles osculatrices.

MÉMOIRE

Sur la Transformation des Coordonnées,

Par M. FRANÇAIS, ancien Élève de l'École polytechnique, Capitaine au corps impérial du Génie.

NOUS diviserons ce Mémoire en trois parties : dans la première, nous passerons d'un système des coordonnées rectangulaires à un autre, dont les coordonnées font entre elles des angles quelconques; dans la seconde, nous traiterons de la transformation d'un système de coordonnées obliques en un autre; dans la troisième, nous rassemblerons une collection de formules sur la pyramide triangulaire (*).

Avant d'entrer en matière, expliquons une notation dont nous nous servirons constamment dans ce mémoire. Pour indiquer l'angle formé par deux axes, nous écrirons ces deux axes entre parenthèses, en les séparant par une virgule; ainsi, sin. (x, y') sera le sinus de l'angle formé par l'axe des x avec celui des y'. Nous indiquerons de la même manière les angles formés par des plans coordonnés, et par des axes et des plans; de sorte que $(xy, x'z')$ sera l'angle formé par le plan des $x\,y$ avec celui des $x'\,z'$, et $(z', x\,z)$ sera l'angle formé par l'axe des z avec le plan des $x\,z$.

§. I.

[1.] SOIENT x, y, z les coordonnées primitives d'un point, rapportées à trois plans rectangulaires; et supposons que, sans changer d'origine, on veuille transformer ces coordonnées en un système d'autres coordonnées x', y', z', rapportées à trois plans, dont les équations sont

$$(1)\quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = 0, \text{ pour le plan des } y'\,z', \\ a'x + b'y + c'z = 0, \text{ pour celui des } x'\,z', \\ a''x + b''y + c''z = 0, \text{ pour celui des } x'\,y'; \end{cases}$$

(*) Il ne paraît pas que M. *Français* ait eu connaissance du Mémoire de M. *Carnot*, sur la Théorie des Transversales, qui a paru l'année dernière (1806), et dans lequel ce géomètre a traité les mêmes questions. *(Note de M. Hachette.)*

chacune de ces équations contenant un coëfficient entièrement arbitraire, nous supposerons entre ces coëfficiens les relations suivantes :

$$(2)\quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

En faisant, pour abréger,

$$(3)\quad \begin{cases} b'c'' - b''c' = A,\ a''c' - a'c'' = B,\ a'b'' - a''b' = C; \\ bc'' - b''c = A',\ a''c - ac'' = B',\ ab'' - a''b = C'; \\ bc' - b'c = A'',\ a'c - ac' = B'',\ ab' - a'b = C''; \end{cases}$$

on aura, pour déterminer les nouveaux axes, les équations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} Cx = Az,\ Cy = Bz, \text{ pour l'axe des } x'; \\ C'x = A'z,\ C'y = B'z, \text{ pour celui des } y'; \\ C''x = A''z,\ C''y = B''z, \text{ pour celui des } z'; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(5)\quad \text{Sin. } (x', y'z') = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}},\ \text{sin. } (y', x'z') = \frac{a'A' + b'B' + c'C'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

$$\text{sin. } (z', x'y') = \frac{a''A'' + b''B'' + c''C''}{\sqrt{(A''^2 + B''^2 + C''^2)}}.$$

[2.] Les nouvelles coordonnées x', y', z' d'un point quelconque étant déterminées par l'intersection de trois plans parallèles aux plans (1), passant par ce point, on aura entre ces coordonnées et les coordonnées primitives, les relations suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} px' = ax + by + cz, \\ qy' = a'x + b'y + c'z, \\ rz' = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

p, q, r étant trois indéterminées que nous déterminerons après.

Il est évident aussi que les valeurs des coordonnées primitives en x', y', z' sont linéaires, et qu'elles peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} x = lx' + my' + nz', \\ y = l'x' + m'y' + n'z', \\ z = l''x' + m''y' + n''z'. \end{cases}$$

[3.] Pour déterminer l, m, n, &c. nous substituerons les valeurs (dans les équations (6), ce qui donne

$$(8)\quad \begin{cases} px' = x'(al + bl' + cl'') + y'(am + bm' + cm'') + z'(an + bn' + cn' \\ qy' = x'(a'l + b'l' + c'l'') + y'(a'm + b'm' + c'm'') + z'(a'n + b'n' + c'n'' \\ rz' = x'(a''l + b''l' + c''l'') + y'(a'm + b''m' + c''m'') + z'(a''n + b''n' + c''n' \end{cases}$$

Ces trois équations doivent être évidemment identiques, et fournisse par conséquent les neuf suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} al + b'l + cl'' = p, \; a'm + b'm' + c'm'' = q, \; a''n + b''n' + c''n'' = \\ a'l + b'l' + c'l'' = o, \; a''m + b''m' + c''m'' = o, \; an + bn' + cn'' = \\ a''l + b''l' + c''l'' = o, \; am + bm' + cm'' = o, \; a'n + b'n' + c'n'' = \end{cases}$$

au moyen desquelles on peut déterminer les neuf coëfficiens des équ tions (7).

En faisant $D = ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'$ on aura

$$(10)\quad D = aA + bB + cC = a'A' + b'B' + c'C' = a''A'' + b''B'' + c''C'';$$

et les équations (9) fourniront les valeurs suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} l = \frac{Ap}{D}, \; l' = \frac{Bp}{D}, \; l'' = \frac{Cp}{D}; \\ m = \frac{A'q}{D}, \; m' = \frac{B'q}{D}, \; m'' = \frac{C'q}{D}; \\ n = \frac{A''r}{D}, \; n' = \frac{B''r}{D}, \; n'' = \frac{C''r}{D}. \end{cases}$$

Il ne reste plus maintenant à déterminer que les coëfficiens p, q, pour y parvenir, nous allons considérer séparément les trois nouveau axes.

[4.] Pour l'axe des x', on a $y' = o$, $z' = o$: en faisant cet substitution dans les équations (7), elles deviennent

$$x = lx', \; y = l'x', \; z = l''x'.$$

l, l', l'' sont donc les cosinus des angles que l'axe des x' fait avec l trois axes primitifs. Par un raisonnement semblable sur les axes d

y' et des z', on trouverait que m, m', m'' sont les cosinus des angles que l'axe des y' fait avec les axes primitifs, et n, n', n'' ceux des angles que l'axe des z' fait avec les axes primitifs; c'est-à-dire, que

$$(12)\quad \begin{cases} l=\cos.(x,x')=\sin.(x,'yz), & l'=\cos.(y,x')=\sin.(x,'xz), & l''=\cos.(z,x')=\sin.(x,'xy); \\ m=\cos.(y',x)=\sin.(y',yz), & m'=\cos.(y',y)=\sin.(y',xz), & m''=\cos.(y',z)=\sin.(y',xy); \\ n=\cos.(z',x)=\sin.(z',yz), & n'=\cos.(z',y)=\sin.(z',xz), & n''=\cos.(z',z)=\sin.(z',xy); \end{cases}$$

on a donc

$$(13)\quad l^2+l'^2+l''^2=1,\ m^2+m'^2+m''^2=1,\ n^2+n'^2+n''^2=1,$$

substituant dans ces équations les valeurs (11), on trouve

$$(14)\quad p=\frac{D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ q=\frac{D}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},\ r=\frac{D}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}};$$

ou, en vertu des équations (5) et (10),

$$(15)\quad p=\sin.(x',y'z'),\ q=\sin.(y',x'z'),\ r=\sin.(z',x'y').$$

[5.] En substituant les valeurs (12) dans les équations (7), on obtient

$$(16)\quad \begin{cases} x=x'\cos.(x',x)+y'\cos.(y',x)+z'\cos.(z',x), \\ y=x'\cos.(x',y)+y'\cos.(y',y)+z'\cos.(z',y), \\ z=x'\cos.(x',z)+y'\cos.(y',z)+z'\cos.(z',z), \end{cases}$$

Ces équations suffisent pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre de coordonnées obliques, la position des deux systèmes étant donnée par les angles que leurs axes repectifs font entre eux. Mais nous allons en établir encore d'autres pour nous servir à la solution du problème général.

[6.] Les valeurs (14) substituées dans les équations (11), transforment celles-ci en

$$(17)\quad \begin{cases} l=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ l'=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\ l''=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}; \\ m=\frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+B'^2)}},\ m'=\frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},\ m''=\frac{C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}; \\ n=\frac{A''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}},\ n'=\frac{B''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}},\ n''=\frac{C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}}. \end{cases}$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations (7), et les valeurs (15)

dans les équations (6), ces deux systèmes d'équations se changeront dans les suivantes :

$$(18)\quad \begin{cases} x' \sin.(x',y'z') = ax + by + cz, \\ y' \sin.(y',x'y') = a'x + b'y + c'z, \\ z' \sin.(z',x'y') = a''x + b''y + c''z; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} x = x'\left(\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right) + y'\left(\frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right) + z'\left(\frac{A''}{\sqrt{(A''^2+P''^2+C''^2)}}\right), \\ y = x'\left(\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right) + y'\left(\frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right) + z'\left(\frac{B''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}}\right), \\ z = x'\left(\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right) + y'\left(\frac{C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right) + z'\left(\frac{C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}}\right). \end{cases}$$

[7.] Lorsque les trois nouveaux axes sont aussi rectangulaires, on a

$$(20)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0,\ aa'' + bb'' + cc'' = 0,\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 = 1,\ A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1,\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1, \\ AA' + BB' + CC' = 0,\ AA'' + BB'' + CC'' = 0,\ A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0, \\ p = 1,\ q = 1,\ r = 1,\ D = 1, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(21)\quad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a'x + b'y + c'z, \\ z' = a''x + b''y + c''z; \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z'; \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'; \end{cases}$$

$$(23)\quad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,\quad b^2 + b'^2 b''^2 = 1,\quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

§. II.

[8.] Si des coordonnées rectangulaires x, y, z, on voulait passer à un système de coordonnées obliques x'', y'', z'', déterminées par les équations

$$(24)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \text{ pour le plan des } y''z'', & a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_1' x + b_1' y + c_1' z = 0, \text{ pour celui des } x''z'', & a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2 = 1, \\ a_1'' x + b_1'' y + c_1'' z = 0, \text{ pour celui des } x''y'', & a_1''^2 + b_1''^2 + c_1''^2 = 1, \end{cases}$$

on aurait entre les nouvelles coordonnées et les coordonnées primitives

les relations suivantes analogues à celles (18) et (19):

$$(25)\quad \begin{cases} x''\ \sin.\ (x,''x''z'') = a,x + b,y + c,z, \\ y''\ \sin.\ (y,''x''z'') = a,'x + b,'y + c,'z, \\ z''\ \sin.\ (z,''x''y'') = a,''x + b,''y + c,''z; \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} x = x''\left(\frac{A,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{A,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{A''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right), \\ y = x''\left(\frac{B,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{B,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{B,''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right), \\ z = x''\left(\frac{C,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{C,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{C,''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right); \end{cases}$$

$A,$, $B,$, $C,$, A', &c. étant composées en $a,$, $b,$, $c,$, a', &c., comme A, B, C, A', &c. le sont en a, b, c, a', &c.

[9.] En substituant les valeurs des coordonnées rectangulaires x, y, z, données par les équations (26), dans les équations (18), et celles (19) dans les équations (25), on obtient les deux systèmes suivans de relations entre les coordonnées obliques x', y', z', et les autres coordonnées obliques x'', y'', z''.

$$\begin{cases} x'\sin.(x'y'z') = x''\left(\frac{aA,+bB,+cC,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{aA,'+bB,'+cC,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{aA,''+bB,''+cC,''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right), \\ y'\sin.(y,'x'z') = x''\left(\frac{a'A,+b'B,+c'C,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{a'A,'+b'B,'+c'C,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{a'A,''+b'B,''+c'C,''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right), \\ z'\sin.(z,'x'y') = x''\left(\frac{a''A,+b,''B,+c,''C,}{\sqrt{(A,^2+B,^2+C,^2)}}\right)+y''\left(\frac{a''A,'+b''B,'+c''C,'}{\sqrt{(A,'^2+B,'^2+C,'^2)}}\right)+z''\left(\frac{a''A,''+b''B,''+c''C''}{\sqrt{(A,''^2+B,''^2+C,''^2)}}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''\sin.(x''y''z'') = x'\left(\frac{a,A+b,B+c,C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right)+y'\left(\frac{a,A'+b,B'+c,C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right)+z'\left(\frac{a,A''+b,B''+c,C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C'')}}\right), \\ y''\sin.(y''x''z'') = x'\left(\frac{a,'A+b,'B+c,'C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right)+y'\left(\frac{a,'A'+b,'B'+c,'C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right)+z'\left(\frac{a,'A''+b,'B''+c,'C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}}\right), \\ z''\sin.(z''x''y'') = x'\left(\frac{a,''A+b,''B+c,''C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}\right)+y'\left(\frac{a,''A'+b,''B'+c,''C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}}\right)+z'\left(\frac{a,''A''+b,''B''+c,''C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}}\right). \end{cases}$$

Ces deux systèmes d'équations contiennent tout ce qu'il faut pour passer d'un système de coordonnées obliques à un autre, lorsque chacun de ces systèmes est donné par les équations des plans coordonnés,

rapportées à un même système de coordonnées rectangulaires. Mais ordinairement on ne connaît pas ces équations, et il faudrait commencer par les chercher, ce qui ferait perdre beaucoup de temps : on ne connaît le plus souvent que les angles que les nouveaux axes font avec les plans coordonnés primitifs ; les équations ci-dessus paraîtraient ainsi insuffisantes pour cet objet. Nous allons nous convaincre du contraire.

[10.] En effet, tous les coëfficiens des seconds membres des équations (27) sont des sinus d'angles formés par un axe du second système avec un plan du premier; et, avec un peu d'attention, on se convaincra que ces équations peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$(29)\quad \begin{cases} x' \sin.(x', y'z') = x'' \sin.(x'', y'z') + y'' \sin.(y'', y'z') + z'' \sin.(z'', y'z'), \\ y' \sin.(y', x'z') = x'' \sin.(x'', x'z') + y'' \sin.(y'', x'z') + z'' \sin.(z'', x'z'), \\ z' \sin.(z', x'y') = x'' \sin.(x'', x'y') + y'' \sin.(y'', x'y') + z'' \sin.(z'', x'y'). \end{cases}$$

Au moyen de ces équations, qui sont d'une simplicité et d'une symétrie remarquable, on peut passer d'un système de coordonnées quelconque à un autre quelconque. Nous pensons qu'elles mériteraient de trouver place dans les traités d'application de l'analyse à la géométrie à trois dimensions.

[11.] Si l'on veut changer l'origine en même temps que les axes, et que les coordonnées de la nouvelle origine soient α, β, γ, il suffit d'écrire dans les équations (29) $x' - \alpha$ à la place de x', $y' - \beta$ à la place de y', $z' - \gamma$ à la place de z' : ainsi, le problème de la transformation des coordonnées se trouve résolu dans toute sa généralité.

§. III.

[12.] Nous rassemblerons dans cette partie les différentes formules qu'on peut tirer des équations (1), (2), (3) et (4), tant pour éclaircir la signification de différentes équations que nous avons employées dans

la première partie, que pour en faire quelques rapprochemens remarquables. On a déjà trouvé, n.° 1,

$$(30)\begin{cases}\sin.(x',y'z') = \dfrac{aA+bB+cC}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \dfrac{D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\\ \sin.(y',x'z') = \dfrac{a'A'+b'B'+c'C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}} = \dfrac{D}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}},\\ \sin.(z',x'y') = \dfrac{a''A''+b''B''+c''C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}} = \dfrac{D}{\sqrt{(A''^2+B''^2+D''^2)}},\end{cases}$$

on trouve de même

$$(31)\begin{cases}\sin.(x'',x'z') = \dfrac{a'A+b'B+c'C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = 0, & \sin.(x',x'y') = \dfrac{a''A+b''B+c''C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = 0,\\ \sin.(y',y'z') = \dfrac{aA''+bB'+cC'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}} = 0, & \sin.(y',x'y') = \dfrac{a''A'+b''B'+c''C'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}} = 0,\\ \sin.(z',y'z') = \dfrac{aA''+bB''+cC''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}} = 0, & \sin.(z',x'z') = \dfrac{a'A''+b'B''+c'C''}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)}} = 0.\end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations ne sont autre chose que les équations (9), dans lesquelles on a substitué pour l, m, n, &c. leurs valeurs (17); ce qui explique la véritable signification de ces équations.

On trouve de même par la théorie du plan et de la ligne droite

$$\begin{cases}\cos.(x'y') = \dfrac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)]}}, & \sin.(x'y') = \dfrac{D}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)]}},\\ \cos.(x'z') = \dfrac{AA''+BB''+CC''}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A''^2+B''^2+C''^2)]}}, & \sin.(x'z') = \dfrac{D}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A''^2+B''^2+C''^2)]}},\\ \cos.(y'z') = \dfrac{A'A''+B'B''+C'C''}{\sqrt{[(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)]}}, & \sin.(y'z') = \dfrac{D}{\sqrt{[(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)]}}.\end{cases}$$

$$(33)\begin{cases}\cos.(x'z',y'z') = aa''+bb''+cc'', & \sin.(x'y',y'z') = \sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)},\\ \cos.(x'y',y'z') = aa''+bb''+cc'', & \sin.(x'y',y'z') = \sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)},\\ \cos.(x'y',x'z') = a'a''+b'b''+c'c'', & \sin.(x'y',y'z') = \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.\end{cases}$$

Ces équations contiennent toutes les formules nécessaires pour calculer tous les angles d'une pyramide triangulaire, donnée par les équations des trois plans dont elle est formée; leur ensemble constitue une espèce de trigonométrie sphérique analytique.

[13.] En combinant entre elles les équations précédentes, on tire les conséquences suivantes :

$$(34)\begin{cases}\sin.(x',y'z') = \sin.(x',z')\sin.(x'z',y'z') = \sin.(x',y')\sin.(x'y',y'\\ \sin.(y',x'z') = \sin.(x',y')\sin.(x'y',x'z') = \sin.(y',z')\sin.(x'z',y'\\ \sin.(z',x'y') = \sin.(x',z')\sin.(x'y',x'z') = \sin.(y',z')\sin.(x'y',y'\end{cases}$$

$$(35)\begin{cases}\sin.(x',y'z')\sin.(y',z') = \sin.(y',x'z')\sin.(x',z') = \sin.(z',x'y')\sin.(x',\\ \sin.(x',y')\sin.(x',z')\sin.(x'y',x'z') = \sin.(x',y')\sin.(y',z')\sin.(x'y',y'\\ \quad \sin.(x',z')\sin.(y',z')\sin.(x'z',y'z')\\ = \dfrac{D^2}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)]}} =\end{cases}$$

$$(36)\begin{cases}\sin.(y',x'z')\sin.(x'y',x'z') = \sin.(y',x'z')\sin.(x'y',y'z') = \sin.(z',x'y')\sin.(x'z'\\ \sin.(x',y')\sin.(x'y',x'z')\sin.(x'y',y'z') = \sin.(x',z')\sin.(x'y',x'z')\sin.(x'z'\\ \quad \sin.(y',z')\sin.(x'y',y'z')\sin.(x'z',y'z') = D.\end{cases}$$

$$(37)\quad \sin.(x',y')\sin.(x',z')\sin.(y',z') = \frac{D^3}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+}$$

$$(38)\quad \sin.(x'y',x'z')\sin.(x'y',y'z')\sin.(x'z',y'z') = \sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2-}$$

$$(39)\quad \sin.(x',y'z')\sin.(y',x'z')\sin.(z',x'y') = \frac{D^3}{\sqrt{[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+}$$

$$(40)\begin{cases}\dfrac{\sin.(x',y')}{\sin.(x'z',y'z')} = \dfrac{\sin.(x',z')}{\sin.(x'y',y'z')} = \dfrac{\sin.(y',z')}{\sin.(x'y',x'z')} = \dfrac{\sin.(x',y')\sin.(x',z')\ s}{F}\\ = \dfrac{D}{\sin.(x'y',y'z')\sin.(x'y',y'z')\sin.(x'z',y'z')} = \dfrac{\sin.(x',y'z')\sin.(y',x'z')\sin.(z}{D^2}\end{cases}$$

La quantité F (35) est très-remarquable : elle est le sextuple du v d'une pyramide formée par les trois axes x', y', z', supposés ég l'unité. Ce que la quantité F est relativement à cette pyramide, c l'est relativement à sa pyramide supplémentaire; c'est-à-dire à ur ramide dont les angles plans seraient égaux à ceux des arêtes première, et réciproquement.

Les équations (40) font voir que, dans une pyramide triangula rapport des sinus des angles d'arêtes à ceux des angles plans, q sont opposés, est constant; elles expriment de différentes mani valeur de ce rapport : la dernière prouve qu'il est égal à celui du v de la pyramide au volume de la pyramide supplémentaire.

MÉMOIRE

Sur l'Intégration des Équations différentielles partielles,

Par M. BRISSON,

Ancien Élève de l'École polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Mémoire envoyé à l'Institut en Prairial an 12 [Juin 1804].

L'IMPORTANCE de la théorie des équations différentielles partielles, pour l'application de l'analyse à la mécanique et à la physique, a déterminé les géomètres, depuis le milieu du siècle dernier, à faire de cette partie du calcul intégral l'un des principaux objets de leurs travaux. Les méthodes qu'ils ont créées pour intégrer ces équations, s'appliquent particulièrement à celles qui ne renferment la variable principale qu'au premier degré ; cependant, même pour les équations de ce genre, les méthodes connues sont loin d'être complètes. On sait, en général, faire dépendre l'intégration d'une équation du premier ordre et du premier degré, à un nombre quelconque de variables, de l'intégration du système du même nombre moins un d'équations différentielles ordinaires : mais lorsque l'on passe aux ordres supérieurs, le procédé qui conduit à ce résultat ne peut s'appliquer avec succès que dans des circonstances particulières. Les méthodes uniformes et générales manquent absolument, et le nombre des équations que l'on sait intégrer, est d'autant moindre que ces équations renferment plus de variables, ou qu'elles sont d'un ordre plus élevé. Une des principales difficultés provient de ce que la relation qui doit exister entre les différentes variables, dans l'intégrale d'une équation différentielle partielle, n'est pas toujours de nature à pouvoir être écrite d'une manière terminée, en ne faisant usage que des variables mêmes de l'équation donnée et des expressions analytiques ordinaires. On a donc été conduit à employer de nouvelles expressions

analytiques, pour énoncer, en termes finis, des relations plus compli quées que celles que l'on avait eu à considérer jusqu'alors.

M. *Laplace* a déjà donné les moyens de résoudre, à l'aide des inté grales définies, une certaine classe d'équations du premier degré, d second ordre, à trois variables : d'autres géomètres ont aussi traité d la même manière quelques équations particulières. Je me propose d'ex poser des méthodes plus étendues pour exprimer, par des intégrale définies, les intégrales des équations différentielles partielles du premi degré : ces méthodes s'appliquent non-seulement à toutes les équation à coëfficiens constans d'un ordre quelconque et à un nombre indéfi de variables, mais encore à d'autres classes d'équations très-nombreuses et c'est en développant les intégrales des équations du premier degré en des séries d'une forme particulière, que j'arrive à ces résultats.

Je commence par démontrer que, si l'on a une expression analytiqu renfermant, au premier degré, une fonction arbitraire d'une quanti donnée ; que cette fonction vienne à s'accroître d'un facteur arbitrai et composé de la même quantité, l'expression proposée peut, en généra se développer suivant les ordres différentiels ascendans de ce facteu ainsi qu'une fonction analytique, lorsque la variable qu'elle contie s'accroît d'une certaine quantité, peut se développer suivant les pui sances ascendantes de cet accroissement. Le développement auquel parviens, présente, avec celui d'une fonction analytique, l'analogie plus remarquable, et les coëfficiens se déduisent également les uns d autres par un procédé uniforme, mais qui ne peut se rapporter au calc différentiel.

La considération de ce développement me fait obtenir, dans un gra nombre de cas, les intégrales des équations différentielles partielles premier degré, exprimées par des séries que leur forme particulière re toujours susceptibles d'être enveloppées sous des intégrales définies.

Les équations à coëfficiens constans forment un cas particulier celles qu'embrassent ces recherches. J'indique les conditions qui doive être satisfaites, pour que l'on puisse sommer immédiatement les séri

q

qui représentent leurs intégrales, et obtenir ainsi ces intégrales sous forme finie.

Je considère ensuite les équations dont le premier membre renferme la variable principale et ses différentielles partielles au premier degré, et multipliées par des coèfficiens constans, et dont le second membre est une fonction donnée des variables indépendantes. L'intégration d'une équation de ce genre peut toujours être ramenée à celle de l'équation que l'on obtiendrait, en supprimant son dernier membre, lorsque l'on connaît une valeur de la variable principale qui la vérifie : or, je démontre que cette valeur particulière s'obtiendra sous forme finie, lorsque l'équation proposée, privée de son dernier membre, sera elle-même intégrable, en termes finis, par les moyens donnés précédemment; et d'ailleurs qu'elle pourra, dans tous les cas, s'exprimer par une série semblable à celles que j'emploie pour représenter, en général, les intégrales des équations différentielles partielles du premier degré.

Je donne en dernier lieu des procédés généraux et toujours applicables, pour envelopper ces séries sous des intégrales définies; et ainsi j'obtiens sous cette forme les intégrales des différentes classes d'équations traitées dans ce mémoire. Les résultats auxquels je suis conduit sont tellement réguliers qu'on en peut déduire immédiatement des formules générales, par exemple, pour les équations à coèfficiens constans du premier degré, d'un ordre quelconque, et renfermant un nombre quelconque de variables. Je joins à l'exposition de cette méthode, quelques applications particulièrement relatives à des équations liées à des problèmes de mécanique, et qui me donnent lieu de faire usage de la plupart des recherches précédentes.

Mais on doit remarquer que chercher à exprimer par des intégrales définies une quantité donnée d'une manière quelconque, c'est généralement se proposer un problème susceptible d'un grand nombre de solutions, comme lorsque l'on cherche deux surfaces dont l'intersection produise une courbe déterminée. En effet, la valeur d'une intégrale définie dépend des valeurs particulières attribuées, après l'intégration supposée

effectuée, à de certaines quantités auxiliaires introduites dans le du calcul ; et par conséquent, on conçoit que le résultat s'obtie finitivement par une véritable élimination : c'est pourquoi je par pour des équations auxquelles les géomètres ont déjà appliqué les grales définies, à des solutions d'une forme différente ; et je te même ce mémoire en indiquant des moyens d'obtenir, dans di circonstances, des résultats qui diffèrent également par leur form ceux que donne la méthode générale que j'ai exposée.

[1] Soit $V(\downarrow u)$ une expression analytique contenant la fo arbitraire $\downarrow u$ d'une manière quelconque, mais au premier degré. posons que la fonction $\downarrow u$ devienne $\downarrow u \times \pi u$, πu étant une no fonction ; quelque transformation que l'on fasse subir à l'expr $V(\downarrow u \times \pi u)$, elle devra contenir la fonction πu dans tous ses te et de plus se réduire à $A \,.\, V(\downarrow u)$, lorsque πu se réduit à la tante A.

Ainsi $V(\downarrow u \times \pi u)$ sera égale à $\pi u \,.\, V(\downarrow u)$, plus à une qu qui devra s'évanouir lorsque πu deviendra une constante, c'est-à à une quantité qu'on pourra regarder comme différenciée par r à πu.

On peut donc établir l'équation suivante :

$$V(\downarrow u \times \pi u) = \pi u \,.\, V(\downarrow u) + d' \,.\, M(\downarrow u, \pi u),$$

dans laquelle M désigne une expression à déterminer, qui doi tenir au premier degré l'une et l'autre des deux fonctions $\downarrow u$ e et d' indique une différenciation prise en regardant la quanti comme seule variable; on pourrait tirer de là la valeur de $M(\downarrow u$

$$M(\downarrow u, \pi u) = \int' [V(\downarrow u \times \pi u) - \pi u \,.\, V(\downarrow u)],$$

$\int'$ indiquant une intégration prise également par rapport à la quantité πu.

L'expression $M(\downarrow u, \pi u)$ pourra de même se décomposer en

parties, dont l'une devra subsister, et la seconde s'évanouir, lorsque πu se réduit à une constante. Si donc on représente par $V_{,}(\downarrow u)$ ce qui devient $M(\downarrow u, \pi u)$, lorsque πu égale un, on sera conduit à supposer

$$M(\downarrow u, \pi u) = \pi u \,.\, V_{,}(\downarrow u) + d' \,.\, M_{,}(\downarrow u, \pi u),$$

$M_{,}(\downarrow u, \pi u)$ étant une nouvelle expression analogue à $M(\downarrow u, \pi u)$.

De même, nous pouvons établir indéfiniment la série suivante d'équations,

$$M_{,}(\downarrow u, \pi u) = \pi u \,.\, V_{,,}(\downarrow u) + d' \,.\, M_{,,}(\downarrow u, \pi u),$$
$$M_{,,}(\downarrow u, \pi u) = \pi u \,.\, V_{,,,}(\downarrow u) + d' \,.\, M_{,,,}(\downarrow u, \pi u),$$
$$M_{,,,}(\downarrow u, \pi u) = \pi u \,.\, V_{,,,,}(\downarrow u) + d' \,.\, M_{,,,,}(\downarrow u, \pi u),$$
&c.

En éliminant M, $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, $M_{,,,,}$, &c., entre ces équations on obtient

$$V(\downarrow u \times \pi u) = V(\downarrow u) \,.\, \pi u + V_{,}(\downarrow u) \,.\, d'\pi u + V_{,,}(\downarrow u) \,.\, d'^{2}\pi u + V_{,,,}(\downarrow u) \,.\, d'^{3}\pi u + V_{,,,,}(\downarrow u) \,.\, d'^{4}\pi u + \&c.,$$

ou bien en établissant l'homogénéité entre les différens termes à l'aide de la différentielle constante du, changeant à cet effet convenablement les expressions $V_{,}$, $V_{,,}$, $V_{,,,}$, &c., et remplaçant le signe d' par le signe ordinaire d,

$$V(\downarrow u \times \pi u) = V(\downarrow u) \,.\, \pi u + V_{,}(\downarrow u) \,.\, \frac{d\pi u}{du} + V_{,,}(\downarrow u) \,.\, \frac{d^{2}\pi u}{du^{2}} + V_{,,,}(\downarrow u) \,.\, \frac{d^{3}\pi u}{du^{3}} + \&c.$$

Cherchons maintenant la loi selon laquelle les expressions $V_{,}$, $V_{,,}$, $V_{,,,}$, &c. dépendent les unes des autres, et de l'expression donnée $V(\downarrow u)$. Pour cela, nous remarquerons que si l'on suppose, dans la série précédente, ou $\downarrow u$ changée en $\downarrow u \times \varphi u$, ou πu changée en $\pi u \times \varphi u$, on doit arriver au même résultat donnant la valeur de $V(\downarrow u \times \pi u \times \varphi u)$.

Mettons d'abord $\pi u \times \varphi u$ à la place de πu; en développant les ordres différentiels du produit $\pi u \times \varphi u$, et s'arrêtant, pour plus de facilité,

aux termes où la fonction φu est différenciée au premier ordre série deviendra

$$V(\downarrow u).\pi u.\varphi u + V_{,}(\downarrow u).\frac{d\pi u}{du}.\varphi u + V_{,,}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^2}.\varphi u + V_{,,,}(\downarrow u).\frac{d^3\pi u}{du^3}.\varphi u +$$
$$+ V_{,}(\downarrow u).\pi u.\frac{d.\varphi u}{du} + 2V_{,,}(\downarrow u).\frac{d\pi u}{du}.\frac{d\varphi u}{du} + 3V_{,,,}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^2}.\frac{d\varphi u}{du} +$$

En effet, on démontre dans le calcul différentiel, que n étant nombre entier positif, les deux premiers termes du développem de $\frac{d^n(\pi u \times \varphi u)}{du^n}$ selon les ordres différentiels ascendans de φu, s

$$\varphi u \frac{d^n \pi u}{du^n} + n \frac{d\varphi u}{du} \frac{d^{n-1}\pi u}{du^{n-1}}.$$

Substituons en second lieu dans les différens termes de la série, $\downarrow u \times$ au lieu de $\downarrow u$; en développant chaque terme, et s'arrêtant encore premier ordre différentiel de φu, on obtient

$$V(\downarrow u).\pi u.\varphi u + V_{,}(\downarrow u).\frac{d\pi u}{du}.\varphi u + V_{,,}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^2}.\varphi u + V_{,,,}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^3}.\varphi u +$$
$$+ V'(\downarrow u).\pi u.\frac{d\varphi u}{du} + V'_{,}(\downarrow u).\frac{d\pi u}{du}.\frac{d\varphi u}{du} + V'_{,,}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^2}.\frac{d\varphi u}{du} + V'_{,,,}(\downarrow u).\frac{d^3\pi u}{du^3}.\frac{d\varphi u}{du} +$$

Les deux résultats auxquels nous venons de parvenir, doivent identiques, quelles que soient les valeurs de φu et de πu; on a donc, en les comparant terme à terme, les équations

$$V'(\downarrow u) = V_{,}(\downarrow u),\quad V'_{,}(\downarrow u) = 2V_{,,}(\downarrow u),\quad V'_{,,}(\downarrow u) = 3V_{,,,}(\downarrow u),\ \&$$

et, en général,

$$V'_{n-1}(\downarrow u) = nV_{n}(\downarrow u).$$

On remarquera en outre que chacune des expressions $V'_{,}(\downarrow$ $V'_{,,}(\downarrow u) \ldots\ldots V'_{n}(\downarrow u)$, se déduit respectivement de $V_{,}(\downarrow$ $V_{,,}(\downarrow u) \ldots\ldots V_{n}(\downarrow u)$, comme $V'(\downarrow u)$, ou $V_{,}(\downarrow u)$ se déc de $V(\downarrow u)$.

Si donc on a un procédé simple pour déduire $V'(\downarrow u)$ de $V(\downarrow$ on pourra de la même manière obtenir, en général, $V'_{n-1}(\downarrow u)$

moyen de $V_{n-1}(\downarrow u)$, et en conséquence parvenir à la valeur de $V_n(\downarrow u)$.

Reprenons l'équation

$$V(\downarrow u \times \pi u) = V(\downarrow u).\pi u + V_1(\downarrow u).\frac{d\pi u}{du} + V_{11}(\downarrow u).\frac{d^2\pi u}{du^2} + \&c.,$$

en supposant $\pi u = u$, elle se réduit à

$$V(\downarrow u \times u) = V(\downarrow u).u + V_1(\downarrow u),$$

d'où

$$V_1(\downarrow u) = V(u \downarrow u) - u.V(\downarrow u).$$

Nous représenterons $V(u\downarrow u) - u.V(\downarrow u)$ par $\Gamma\left(\frac{V\downarrow u}{u}\right)$.

Par le même procédé, l'on trouverait

$$V'_1(\downarrow u) = V_1(u\downarrow u) - uV_1(\downarrow u) = \Gamma\left(\frac{V_1\downarrow u}{u}\right);$$

mais

$$V_1(\downarrow u) = \Gamma\left(\frac{V\downarrow u}{u}\right),$$

donc

$$V'_1(\downarrow u) = \Gamma\left(\frac{\Gamma\left(\frac{V\downarrow u}{u}\right)}{u}\right).$$

Nous désignerons cette dernière expression par $\Gamma^2\left(\frac{V\downarrow u}{u^2}\right)$. D'après les équations que nous avons obtenues plus haut, l'on aura

$$V_{11}(\downarrow u) = \frac{1}{1.2}\Gamma^2\left(\frac{V\downarrow u}{u^2}\right);$$

à l'aide de ces équations, et en poursuivant la même notation, l'on aura, en général,

$$V_n(\downarrow u) = \frac{1}{1.2.3.4\ldots n}\Gamma^n\left(\frac{V\downarrow u}{u^n}\right);$$

on en conclura donc

$$(A)\ V(\downarrow u\times\pi u) = V(\downarrow u).\pi u + \Gamma\left(\frac{V\downarrow u}{u}\right).\frac{d\pi u}{du} + \frac{\Gamma^2\left(\frac{V\downarrow u}{u^2}\right)}{1.2}.\frac{d^2\pi u}{du^2}$$

$$+ \frac{\Gamma^3\left(\frac{V\downarrow u}{u^3}\right)}{1.2.3}.\frac{d^3\pi u}{du^3} + \frac{\Gamma^4\left(\frac{V\downarrow u}{u^4}\right)}{1.2.3.4}.\frac{d^4\pi u}{du^4} + \ldots + \frac{\Gamma^n\left(\frac{V\downarrow u}{u^n}\right)}{1.2.3\ldots n}.\frac{d^n\pi u}{du^n} + \&c.$$

Ce développement présente la plus grande analogie avec celui de $f(x+i)$, et nous avons cherché à la conserver dans la marche que nous avons suivie pour y parvenir. Les fonctions arbitraires $\downarrow u$ et πu remplacent les indéterminées x et i; elles sont combinées dans l'expression génératrice par voie de multiplication, au lieu de l'être par voie d'addition; dans le développement, les ordres différentiels de la fonction πu remplacent les puissances de i; les expressions $\Gamma\left(\frac{V\downarrow u}{u}\right)$, $\Gamma^2\left(\frac{V\downarrow u}{u^2}\right)$, &c. remplacent les coëfficiens différentiels ou les fonctions dérivées qui forment les divers termes du développement de $f(x+i)$. Enfin, ces expressions se déduisent de l'expression génératrice par un procédé qui conserve encore la même analogie, avec celui dont on se sert pour obtenir les coëfficiens différentiels au moyen de la fonction primitive.

Dans le développement (A), l'on peut supposer $\downarrow u = 1$, et alors on a le développement suivant de $V(\pi u)$

$$V(\pi u) = V.\pi u + \Gamma\left(\frac{V}{u}\right).\frac{d\pi u}{du} + \Gamma^2\left(\frac{V}{u^2}\right).\frac{d^2\pi u}{1.2\,du^2} + \Gamma^3\left(\frac{V}{u^3}\right).\frac{d^3\pi u}{1.2.3\,du^3} + \&c.$$

Il convient cependant de remarquer que de même que le développement de $f(x+i)$ devient impossible dans quelques cas particuliers, également aussi le développement (A) ne peut avoir lieu dans certains cas et pour des formes particulières de la fonction πu.

On pourrait encore se proposer de développer $V(\downarrow u \times \pi u)$ suivant les ordres différentiels négatifs de πu, ou, ce qui revient au même, suivant les intégrales successives de cette fonction; et l'on trouverait que ce développement n'est possible que dans des circonstances particulières, comme il arrive pour celui de $f(x+i)$ suivant les puissances négatives de i : mais la discussion complète de ces anomalies offre des difficultés que nous devons écarter, et d'ailleurs a peu de rapport a l'objet principal de ce mémoire.

A l'aide du développement de $f(x+i)$, on parvient à plusieurs séries, telles que celle, par exemple, qui représente $(x+i)^n$, quel que soit l'exposant n; le développement (A) conduirait également à des séries analogues, et particulièrement à celle qui représente $d^n.\frac{(\downarrow u \times \pi u)}{dx^n}$, quel que soit l'indice différentiel n. Nous ne nous arrêterons pas à cette recherche parfaitement analogue à celle du développement de $(x+i)^n$, et qui n'offre aucune nouvelle difficulté.

[2.] CEPENDANT, pour donner un exemple des résultats auxquels la formule précédente peut conduire, proposons-nous de développer $Z = \frac{d^n u}{dx^n}$ suivant les puissances de l'indice différentiel n, recherche analogue à celle du développement de a^n suivant les puissances de l'exposant n.

Si l'on se rappelle que pour développer a^n, on substitue à la quantité a, $1+b$ en faisant $b = a-1$, on sera conduit à écrire ainsi l'expression donnée

$$Z = \frac{d^n (e^x . u e^{-x})}{dx^n},$$

ou en faisant $v = u e^{-x}$,

$$Z = \frac{d^n (e^x v)}{dx^n}.$$

D'après le théorème que nous avons indiqué, l'on aura

$$Z = e^x \left(v + n\frac{dv}{dx} + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{d^3v}{dx^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\frac{d^4v}{dx^4} + \&c.\right);$$

en réunissant les quantités qui sont multipliées par les mêmes puissances de n, l'équation précédente deviendra

$$Z = e^x \left(v + nA + \frac{n^2}{1.2}B + \frac{n^3}{1.2.3}C + \frac{n^4}{1.2.3.4}D + \&c.\right),$$

en supposant que l'on fasse

$$A = \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3v}{dx^3} - \frac{1}{4}\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{1}{5}\frac{d^5v}{dx^5} - \text{\&c.}$$

$$B = \frac{dA}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3A}{dx^3} - \frac{1}{4}\frac{d^4A}{dx^4} + \frac{1}{5}\frac{d^5A}{dx^5} - \text{\&c.}$$

$$C = \frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3B}{dx^3} - \frac{1}{4}\frac{d^4B}{dx^4} + \frac{1}{5}\frac{d^5B}{dx^5} - \text{\&c.}$$

&c.

D'après l'analogie qui est à remarquer entre l'expression de A et développement de log. $(1+b)$, on peut représenter la quantité e^x par $\lambda(e^x v)$ ou par $\lambda(u)$, et par conséquent poser de même

$$B = \lambda^2(u) \qquad C = \lambda^3(u) \qquad D = \lambda^4(u) \text{ \&c.}$$

on aura donc enfin

$$Z = \frac{d^n u}{dx^n} = u + n\lambda(u) + \frac{n^2}{1.2}\lambda^2(u) + \frac{n^3}{1.2.3}\lambda^3(u) + \frac{n^4}{1.2.3.4}\lambda^4(u) + \text{\&}$$

expression parfaitement analogue à la suivante,

$$a^n = 1 + n La + \frac{n^2}{1.2}(La)^2 + \frac{n^3}{1.2.3}(La)^3 + \frac{n^4}{1.2.3.4}(La)^4 + \text{\&}$$

Lorsque l'on a la formule

$$y = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \text{\&c.}$$

et que l'on veut obtenir la somme du second membre, on trouve par une différenciation

$$\frac{dy}{db} = 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - b^5 + \text{\&c.} = \frac{1}{1+b},$$

et le problème se réduit à trouver une fonction y de la variable b, différenciée reproduise la quantité $\frac{1}{1+b}$. De même ayant la forme obtenue ci-dessus,

$$A = \frac{dV}{dx} - \frac{d^2V}{2} + \frac{d^3V}{3} - \frac{d^4V}{4} + \frac{d^5V}{5} - \text{\&c.}$$

que l'on demande la somme du second membre ; on mettra xV place de V, et retranchant de l'équation ainsi variée, l'équation donnée elle-même

elle-même, multipliée par x, on aura, d'après la notation que j'ai indiquée précédemment,

$$\Gamma\left(\frac{A}{x}\right) = V - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2} - \frac{d^3V}{dx^3} + \frac{d^4V}{dx^4} - \&c. = e^{-x}\int V e^x\, dx,$$

et le problème se trouve réduit à chercher une expression composée en V, et telle que pour V, mettant xV, et retranchant du résultat l'expression donnée elle-même, multipliée par x, la différence soit représentée par $e^{-x}\int V e^x\, dx$.

On voit naître ici un nouveau genre de calcul inverse, comme le calcul intégral se déduit immédiatement du calcul différentiel.

[3.] Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction arbitraire $\downarrow$ contenue dans $V(\downarrow u)$ renfermait seulement une variable u; si elle renfermait plusieurs variables indépendantes $u, v, w \ldots s$, on parviendrait toujours, à l'aide de considérations semblables aux précédentes, à développer $V[\downarrow(u, v, w \ldots s) \times \pi(x, v, w \ldots s)]$, suivant les ordres différentiels ascendans de $\pi(u, v, w \ldots s)$, pris par rapport aux variables $u, v, w \ldots s$. Il sera facile, par exemple, de s'assurer, en supposant les fonctions $\downarrow$ et π composées seulement des trois variables indépendantes u, v et w, que le coëfficient de

$$\frac{d^{m+n+p}\,\pi(u, v, w)}{du^m\, dv^n\, dw^p}$$

dans le développement cherché, est

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m.\ 1.2.3\ldots n.\ 1.2.3\ldots p}\,\Gamma(m+n+p)\left(\frac{V\downarrow(u, v, w)}{u^m v^n w^p}\right).$$

On conçoit qu'en suivant à-peu-près la même marche, on pourrait obtenir le développement de $V(\downarrow u \times \pi u)$ suivant les ordres ascendans des différences finies de πu; mais nous ne nous en occuperons pas dans ce moment, et nous allons essayer d'appliquer les recherches précédentes à la théorie des équations différentielles partielles du premier

[4.] Soit l'équation de l'ordre m entre n variables

$$A\zeta + B\frac{d\zeta}{dx} + C\frac{d\zeta}{dy} + D\frac{d\zeta}{dt} \ldots + F\frac{d\zeta}{ds} + G\frac{d^2\zeta}{dx^2} + H\frac{d^2\zeta}{dx\,dy}$$
$$+ I\frac{d^2\zeta}{dy^2} + K\frac{d^2\zeta}{dx\,dt} + L\frac{d^2\zeta}{dt^2} \ldots + N\frac{d^2\zeta}{ds^2} + P\frac{d^3\zeta}{dx^3} + Q\frac{d^3\zeta}{dx^2\,dy}$$
$$+ R\frac{d^3\zeta}{dy^2\,dx} \ldots + T\frac{d^3\zeta}{ds^3} \ldots + \&c. = 0.$$

contenant au premier degré, dans tous ses termes, la variable Z ou se coëfficiens différentiels. Pour plus de facilité, nous représenterons, e général, cette équation par $\nabla\zeta = 0$.

On sait qu'en général l'intégrale complète de $\nabla\zeta = 0$ doit con tenir au premier degré, m fonctions arbitraires chacune de $n -$ variables.

Faisons abstraction d'un nombre $m - 1$ de ces fonctions arbitraires supposons que l'équation donnée ne renferme que les trois variable z, x et y, et désignons par $Z = U(\downarrow u)$ la partie de l'intégrale com plète qui renferme la fonction arbitraire $\downarrow u$ conservée, u étant un quantité composée des variables indépendantes x et y.

Concevons maintenant que la fonction $\downarrow u$ devienne $\downarrow u \times \pi u$, nou pourrons développer l'intégrale $U(\downarrow u \times \pi u)$ sous la forme suivante,

$$(A)\quad \zeta = U(\downarrow u \times \pi u) = V.\pi u + V_1.\frac{d\pi u}{du} + \frac{V_{11}}{1.2}.\frac{d^2\pi u}{du^2} + \frac{V_{111}}{1.2.3}.\frac{d^3\pi u}{du^3} + \&c$$

V_n étant, en général, égale à $\Gamma^n\left(\frac{U\downarrow u}{u^n}\right)$ d'après la notation que nou avons indiquée. Cette valeur de ζ ne doit renfermer qu'une fonctio arbitraire distincte, et nous pourrons, en conséquence, donner à l fonction $\downarrow u$ une forme quelconque déterminée, mais telle que le dé veloppement supposé soit possible. En considérant $\downarrow u$ comme indéte minée, nous parviendrons, à l'aide de l'équation différentielle donnée à établir la loi qui lie les quantités V, V_1, V_n &c. En effet, l'on do évidemment avoir

$$\nabla\,[U(\downarrow u \times \pi u)] = 0,$$

ou, en faisant $\pi u = 1$,

$$\nabla(U \downarrow u) = \nabla V = 0. \quad (1).$$

Mettons dans cette équation, au lieu de $\downarrow u$, $u \downarrow u$; l'on remarquera que par cette substitution, V devient $uV + V_{,}$, et retranchant ensuite de l'équation ainsi variée, l'équation (1) elle-même, multipliée par u, l'on aura

$$\nabla . uV - u\nabla V + \Delta V_{,} = 0,$$

ou, suivant la notation que nous employons,

$$\Gamma . \left(\frac{\nabla V}{u}\right) + \nabla V_{,} = 0. \quad (2).$$

En continuant d'après le même procédé, si l'on varie l'équation (2) par la substitution de $u \downarrow u$ à $\downarrow u$, que l'on prenne la différence de sa valeur dans ce nouvel état, à sa valeur précédente multipliée par u, et que l'on remarque que la substitution indiquée change V en $uV + V_{,}$ et $V_{,}$ en $uV_{,} + V_{,,}$; l'on aura

$$\Gamma . \left(\frac{\nabla . uV}{u}\right) - u\Gamma . \left(\frac{\nabla . V}{u}\right) + \Gamma . \left(\frac{\nabla V_{,}}{u}\right) + \nabla . uV_{,} - u\nabla V_{,} + \nabla V_{,,} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Gamma^{2}\left(\frac{\nabla V}{u^{2}}\right) + 2\Gamma\left(\frac{\nabla V_{,}}{u}\right) + \nabla V_{,,} = 0. \quad (3).$$

Par la même marche, on obtiendra en général

$$\Gamma^{n}\left(\frac{\nabla V}{u^{n}}\right) + n\,\Gamma^{n-1}\left(\frac{\nabla V_{,}}{u^{n-1}}\right) + \frac{n.n-1}{1.2}\Gamma^{n-2}\left(\frac{\nabla V_{,,}}{u^{n-2}}\right) + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Gamma^{n-3}\left(\frac{\nabla V_{,,,}}{u^{n-3}}\right) + \ldots \nabla V_{n} = 0. \quad (n+1).$$

Les équations (1), (2), (3) ... $(n+1)$ doivent subsister quelle que soit la forme que l'on donne à $\downarrow u$, et par conséquent avoir encore lieu lorsqu'on attribue à cette fonction une forme particulière. Il suffira donc de les vérifier au moyen de valeurs particulières des quantités V, $V_{,}$, $V_{,,}$ &c., qu'elles serviront ainsi à déterminer.

Nous ne nous arrêterons pas à faire remarquer l'analogie du procédé que nous suivons avec les procédés que fournit le calcul différentiel, pour divers développemens en séries.

[5.] Proposons-nous quelques cas particuliers, et d'abord supposons que l'équation étant entre trois variables z, x, y, les coëfficiens qui, dans l'équation $\nabla z = 0$, multiplient z et ses différentielles partielles, renferment seulement la variable y; concevons encore que l'on ait fait sortir y de la fonction arbitraire contenue dans la partie de l'intégrale complète que nous considérons, en développant convenablement cette fonction qui alors ne renfermera plus que la variable x; nous poserons donc

$$z = V.\pi x + V_{,}.\frac{d\pi x}{dx} + \frac{V_{,,}}{1.2}.\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{V_{,,,}}{1.2.3}.\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c.$$

V, $V_{,}$, $V_{,,}$, ... &c. devant se déduire des équations

$$\nabla V = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Gamma\left(\frac{\nabla V}{x}\right) + \nabla V_{,} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Gamma^2\left(\frac{\nabla V}{x^2}\right) + 2\Gamma\left(\frac{\nabla V_{,}}{x}\right) + \nabla V_{,,} = 0 \ldots\ldots (3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma^n\left(\frac{\nabla V}{x^n}\right) + n.\Gamma^{n-1}\left(\frac{\nabla V_{,}}{x^{n-1}}\right) + \frac{n.n-1}{2}\Gamma^{n-2}\left(\frac{\nabla V_{,,}}{x^{n-2}}\right) + \ldots\nabla V_{n} = 0. \quad (n+1).$$

Faisons $V = e^{\alpha x} W$, la quantité à déterminer W étant seulement composée de y. Par la substitution de cette valeur, on a

$$\nabla V = e^{\alpha x}\nabla'(\alpha, W) = 0.$$

Le terme général de l'expression $e^{\alpha x}\nabla'(\alpha, W)$ étant

$$e^{\alpha x} M \alpha^{\beta} \frac{d^h W}{dy^h},$$

lorsque celui de ∇V est

$$M \frac{d^{\beta+h} V}{dx^{\beta} dy^h}.$$

Suivant la règle énoncée précédemment, que l'on mette $x V$ pour V dans ∇V, qu'on retranche du résultat $x \nabla V$, ou, ce qui revient au même, qu'on prenne le second terme du développement de $\nabla(xV)$, on aura $\Gamma\left(\frac{\nabla V}{x}\right)$, dont le terme général sera

$$M g \frac{d^{\beta-1+h} V}{dx^{\beta-1} dy^h},$$

quantité qui, après la substitution de $e^{ax}W$ pour V, se changera en

$$e^{ax} M g \alpha^{g-1} \frac{d^h V}{dy^h} = e^{ax} d' \left(\frac{M \alpha^g \frac{d^h W}{dy^h}}{d\alpha} \right).$$

Le signe d' indique que cette différentielle, par rapport à α, se prend en regardant W comme indépendant de α. Ce que nous trouvons pour un terme quelconque de l'expression ∇V a lieu pour tous, et nous pouvons poser $\Gamma\left(\frac{\nabla V}{x}\right) = e^{ax} d'\left(\frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha}\right)$;

on se convaincra facilement qu'on trouverait de même

$$\Gamma^2\left(\frac{\nabla V}{x^2}\right) = e^{ax} d'^2 \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha^2}, \quad \Gamma^3\left(\frac{\nabla V}{x^3}\right) = e^{ax} d'^3 \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha^3} \ldots$$

$$\ldots\ldots \Gamma^n\left(\frac{\nabla V}{x^n}\right) = e^{ax} d'^n \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d\alpha^n}.$$

Si, dans les équations (2), (3) ... $(n+1)$, on suppose aussi

$$V_{,} = e^{ax} W_{,}, \quad V_{,,} = e^{ax} W_{,,} \quad \ldots\ldots \quad V_n = e^{ax} W_n,$$

on aura de la même manière

$$\Gamma\left(\frac{\nabla V_{,}}{x}\right) = e^{ax} d' \frac{\nabla_{,}(\alpha, W_{,})}{d\alpha}, \quad \Gamma^2\left(\frac{\nabla V_{,}}{x^2}\right) = e^{ax} d'^2 \frac{\nabla'(\alpha, W_{,})}{d'\alpha^2} \ldots$$

$$\ldots\ldots a\Gamma\left(\frac{\nabla V_{,,}}{x}\right) = e^{ax} d' \frac{\nabla'(\alpha, W_{,,})}{d'\alpha},$$

et en général $\Gamma^n\left(\frac{\nabla V_m}{x^n}\right) = e^{ax} d'^n \frac{\nabla'(\alpha, W_m)}{d\alpha^n}$.

Substituons ces différens résultats dans les équations (1), (2), (3) ... $(n+1)$, et elles deviendront, après avoir retiré le facteur commun e^{ax},

$$\nabla'(\alpha, W) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1')$$

$$d' \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha} + \nabla'(\alpha, W_{,}) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

$$d'^2 \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha^2} + 2d' \frac{\nabla'(\alpha, W_{,})}{d'\alpha^2} + \nabla'(\alpha, W_{,,}) = \ldots (3')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d'^n \frac{\nabla'(\alpha, W)}{d'\alpha^n} + n d'^{n-1} \frac{\nabla(\alpha, W_{,})}{d'.\alpha^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2} d'^{n-2} \frac{\nabla'(\alpha, W_{,,})}{d'\alpha^{n-2}} \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \nabla'(\alpha, W_n) = 0, \quad (n+1').$$

L'équation $\nabla'(\alpha, W) = 0$ aux différentielles ordinaires donnera la valeur de W, qui contiendra la variable y et l'indéterminée α. Si on différencie cette équation complétement par rapport à α, et que l'on observe que W ne s'y trouvant qu'au premier degré, pour la différencier relativement à W, il suffit de mettre à la place de cette quantité sa différentielle; on obtiendra

$$d.\frac{\nabla'(\alpha, W)}{d\alpha} + \nabla'\left(\alpha, \frac{dW}{d\alpha}\right) = 0;$$

et de même, on aurait pour la différentielle d'un ordre quelconque d cette même équation,

$$d'^{n}\frac{\nabla(\alpha, W)}{d'\alpha^{n}} + n\,d'^{n-1}\frac{\nabla'\left(\alpha, \frac{dW}{d\alpha}\right)}{d'\alpha^{n-1}} + \frac{n.n-1}{2}d'^{n-2}\frac{\nabla'\left(\alpha, \frac{d^2W}{d\alpha^2}\right)}{d'\alpha^{n-2}} + \ldots \nabla'\left(\alpha, \frac{d^nW}{d\alpha^n}\right) =$$

Si l'on compare ces résultats avec les équations (2'), (3') .... (n + 1'), on verra qu'on satisfera à ces dernières en posant

$$W_{,} = \frac{dW}{d\alpha}, \quad W_{,,} = \frac{d^2W}{d\alpha^2}, \quad W_{,,,} = \frac{d^3W}{d\alpha^3} \ldots W_{,^n} = \frac{d^nW}{d\alpha^n},$$

ce qui, en effet, les réduira à n'être que les différentielles successives par rapport à α de l'équation (1').

On aura donc

$$V = e^{ax}W, \quad V_{,} = e^{ax}\frac{dW}{d\alpha}, \quad V_{,,} = e^{ax}\frac{d^2W}{d\alpha^2} \ldots \quad V_{,^n} = e^{ax}\frac{d^nW}{d\alpha^n},$$

et ainsi l'on obtiendra

$$(B)\ z = e^{ax}\left(W\pi x + \frac{dW}{d\alpha}\cdot\frac{d\pi x}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\cdot\frac{d^3 x}{d}\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nW}{d\alpha^n}\cdot\frac{d^n\pi x}{dx^n} + \&c.\right)$$

L'équation $\nabla'(\alpha, W) = 0$ aux différentielles ordinaires, qui doit déterminer la quantité W, est généralement de l'ordre m par rapport à cette quantité, et donnera par conséquent m intégrales particulières, desquelles on tirera autant de valeurs distinctes de W. En les employant successivement, on obtiendra m séries semblables à (B), dont la

somme formera l'intégrale complète de la proposée renfermant m fonctions arbitraires. On peut observer aussi que ces séries ne seront pas infinies, lorsque l'on aura $\frac{d^n W}{d\alpha^n} = 0$.

Si l'on différencie la valeur de z donnée par la série précédente, relativement à x, on aura pour $\frac{dz}{dx}$ la valeur que prendrait z, en changeant W en αW; pour $\frac{d^2 z}{dx^2}$ la valeur que prendrait z, en changeant dans la série (B), W en $\alpha^2 W$, et ainsi de suite.

En second lieu, si l'on différencie z par rapport à α, l'on aura pour $\frac{dz}{d\alpha}$ la même valeur que celle que prendrait z, en changeant πx en $x \pi x$, pour $\frac{d^2 z}{d\alpha^2}$ celle que prendrait z, en changeant πx en $x^2 \pi x$, &c.

D'après la première de ces deux remarques, on peut facilement vérifier l'intégrale (B). La seconde va nous servir à prouver que l'on peut donner une valeur déterminée à α, sans diminuer la généralité de l'intégrale.

En effet, donnons à α, dans la série (B), la valeur déterminée a, et représentons par z_1 ce que devient z lorsque l'on met à la place de a l'indéterminée $a + \alpha_1$, l'on aura

$$z_1 = z + \frac{dz}{da}\alpha' + \frac{d^2 z}{da^2}\frac{\alpha'^2}{1.2} + \frac{d^3 z}{da^3}\frac{\alpha'^3}{1.2.3} + \frac{d^4 z}{da^4}\frac{\alpha'^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

et, d'après ce que nous avons dit plus haut, la valeur de z' sera celle même de z donnée par la série (B), lorsqu'on change dans cette série πx en

$$\pi x \left(1 + \alpha' x + \frac{\alpha'^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha'^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha'^4 x^4}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

Cette dernière expression n'étant pas plus générale que la fonction arbitraire πx qu'elle remplace, on voit que la valeur de z_1 qui contient l'indéterminée $a + \alpha'$, n'offre pas plus de généralité que la valeur

de z qui contient la quantité déterminée a. Lorsqu'on attribue différentes valeurs à la quantité $a + a'$ ou a, l'on ne fait que varier les formes de la fonction πx, qui, restant toujours arbitraire, doit être censée embrasser toutes les formes. Nous supposerons donc, en général à a une valeur déterminée, telle toutefois qu'elle ne rende infini aucun des termes du développement.

[6.] Pour donner un second exemple de l'application de la même méthode, supposons que les différens termes de l'équation $\nabla z =$ soient de la forme

$$K\,(p + q\,x)^{\beta}\,\frac{d^{\beta+h}z}{dx^{\beta}\,dy^{h}},$$

k étant une quantité donnée en y, et différente d'un terme à l'autre. Nous supposerons au développement la même forme que celle qui a été attribuée au commencement de l'article précédent. On aura également entre ses termes les équations désignées par (1), (2), (3), . . . $(n + 1)$.

Faisons $V = (p + q\,x)^{\alpha}\,W$, W étant toujours une fonction de y, par la soustraction de cette valeur, l'expression ∇V devient $(p + q\,x)^{\alpha}\cdot\nabla'(\alpha, W)$, dont le terme général est

$$(p + qx)^{\alpha}\left[K.\,q^{\beta}.\,\alpha.\,\alpha-1.\,\alpha-2.\,\alpha-3\ldots(\alpha-\beta+1).\frac{d^{h}W}{dy^{h}}\right].$$

Si l'on prend, selon le procédé donné, le $\Gamma.\left(\frac{\nabla V}{x}\right)$, on trouvera pour le terme général de cette expression,

$$K\,(p + q\,x)^{\beta}.\,\beta.\,\frac{d^{\beta-1+h}V}{dx^{\beta-1}\,dy^{h}},$$

ou, en mettant pour V sa valeur

$$\frac{(p+qx)^{\alpha+1}}{q}\left[K.\,\beta.\,q^{\beta}.\,\alpha.\,\alpha-1.\,\alpha-2.\,\alpha-3\ldots(\alpha-\beta+2).\frac{d^{h}W}{dy^{h}}\right];$$

ce qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\frac{(p+q\ldots)}{q}\Delta'\alpha.\left[K\,q^{\beta}\,\alpha.\,\alpha-1.\,\alpha-2.\,\alpha-3\ldots(\alpha-\beta+1)\frac{d^{h}W}{dy^{h}}\right].$$

le

Le signe Δ'_α indique une différence finie prise par rapport à α, et en regardant W comme indépendant de α : l'expression $\Gamma.\left(\frac{\nabla V}{x}\right)$ deviendra donc

$$\frac{(p+qx)^{\alpha+1}}{q}\Delta'_\alpha.\ \nabla'(\alpha, W).$$

On trouverait de même qu'on peut représenter $\Gamma^2\left(\frac{\nabla V}{x^2}\right)$, $\Gamma^3\left(\frac{\nabla V}{x^3}\right)$, $\Gamma^4\left(\frac{\nabla V}{x^4}\right)$ &c. respectivement par $\frac{(p+qx)^{\alpha+2}}{q^2}\Delta'^2_\alpha\,\nabla'(\alpha, W)$, $\frac{(p+qx)^{\alpha+3}}{q^3}\Delta'^3_\alpha\,\nabla'(\alpha, W)$, $\frac{(p+qx)^{\alpha+4}}{q^4}\Delta'^4_\alpha\,\nabla'(\alpha, W)$, &c.

Si, dans les équations (2), (3), (4) &c., on suppose en outre

$$V_I=\frac{(p+qx)^{\alpha+1}}{q}W_I,\quad V_{II}=\frac{(p+qx)^{\alpha+2}}{q^2}W_{II},\quad V_{III}=\frac{(p+qx)^{\alpha+3}}{q^3}W_{III},\ \text{&c.},$$

on aura de la même manière

$$\Gamma\left(\frac{\nabla V_I}{x}\right)=\frac{(p+qx)^{\alpha+2}}{q^2}\Delta'_\alpha.\nabla'(\alpha+1, W_I),\quad \Gamma^2\left(\frac{\nabla V_I}{x^2}\right)=\frac{(p+qx)^{\alpha+3}}{q^3}\Delta'^2_\alpha.\nabla'(\alpha+1, W_I),$$

$$\ldots\ldots\Gamma^n\left(\frac{\nabla V_m}{x^n}\right)=\frac{(p+qx)^{\alpha+n+m}}{q^{n+m}}.\Delta'^n_\alpha.\nabla'(\alpha+m, W_m).$$

Substituons ces valeurs dans les équations (1), (2), (3) ... $(n+1)$. Si l'on considère particulièrement la dernière, on aura, en divisant tout par le facteur commun $\frac{(p+qx)^{\alpha+n}}{q^n}$,

$$\Delta'^n_\alpha.\nabla'(\alpha, W)+n\Delta'_\alpha{}^{n-1}.\nabla'(\alpha+1, W_I)+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta'_\alpha{}^{n-2}.\nabla'(\alpha+2, W_{II})$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta'_\alpha{}^{n-3}.\nabla'(\alpha+3, W_{III})\ldots+\nabla'(\alpha, W_n)=0.$$

L'équation $\nabla V=0$ se change, d'après ce qui a été dit précédemment, en $(p+qx)^\alpha\,\nabla'(\alpha, W)=0$. Si l'on prend la différence finie par rapport à x de l'ordre m, de $\nabla'(\alpha, W)=0$, pour comparer le résultat avec l'équation générale que l'on vient de trouver ; en remarquant que W ne se trouve qu'au premier degré dans $\nabla'(\alpha, W)$, et qu'en conséquence pour prendre les différences relatives à W considérée comme

fonction de α, il suffit de remplacer cette quantité par ses différences l'on aura

$$\Delta'^{n}{}_{\alpha}.\nabla'(\alpha, W) + n\,\Delta'^{n-1}_{\alpha}.\nabla'(\alpha+1, \Delta_{\alpha} W)$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}\Delta'^{n-2}_{\alpha}.\nabla'(\alpha+2, \Delta^{2}{}_{\alpha} W)$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta'^{n-3}_{\alpha}.\nabla'(\alpha+3, \Delta^{3}{}_{\alpha} W)\ldots+\nabla'(\alpha, \Delta^{n}{}_{\alpha} W)=0$$

Pour que la première des deux équations que nous comparons soient identique avec la seconde, il faut que

$$W' = \Delta_{\alpha} W, \quad W_{''} = \Delta^{2}{}_{\alpha} W, \quad W_{'''} = \Delta^{3}{}_{\alpha} W \ldots W_{n} = \Delta^{n}{}_{\alpha} W$$

Ces résultats ayant lieu quel que soit n, satisferont évidemment aux équations (2), (3) &c.; on en déduira

$$V' = \frac{(p+qx)^{\alpha+1}}{q}\Delta_{\alpha} W,\ V_{''} = \frac{(p+qx)^{\alpha+2}}{q^{2}}\Delta^{2}{}_{\alpha} W,\ V_{'''} = \frac{(p+qx)^{\alpha+3}}{q^{3}}\Delta^{3}{}_{\alpha} W..$$
$$\ldots V_{n} = \frac{(p+qx)^{\alpha+n}}{q^{n}}\Delta^{n}{}_{\alpha} W;$$

et l'on aura par conséquent,

$$(C)\ z = (p+qx)^{\alpha}\left(W\pi x + \frac{p+qx}{q}\Delta_{\alpha} W.\frac{d\pi x}{dx} + \frac{(p+qx)^{2}}{q^{2}}\frac{\nabla^{2}{}_{\alpha} W}{1.2}.\frac{d^{2}\pi x}{dx^{2}}\right.$$
$$\left. + \frac{(p+qx)^{3}}{q^{3}}\frac{\Delta_{\alpha}{}^{3} W}{1.2.3}.\frac{d^{3}\pi x}{dx^{3}} + \text{&c.}\right)$$

L'équation $\nabla'(\alpha, W) = 0$, qui ne contient que la variable indépendante y, et qui doit déterminer W, donnera généralement m valeurs distinctes pour cette quantité. En les employant successivement, on obtiendra m séries semblables à (C), dont la somme formera l'intégrale complète de la proposée.

Pour prendre la différentielle de l'ordre i, de la quantité z, par rapport à x, il suffit de changer dans la série (C), W en $(\alpha.\alpha-1.\alpha-2.\alpha-i+1)W$, et de remplacer le facteur commun $(p+qx)^{\alpha}$ par $q^{i}(p+qx)^{\alpha-i}$.

Pour prendre la différence finie de l'ordre i, de la même quantité par rapport à α, il suffit de mettre dans (C) pour πx, $(p+qx-1)^{i}$

A l'aide de cette dernière remarque, on démontrera, par un procédé à-peu-près semblable à celui que nous avons employé à la fin de l'article précédent, que l'on peut donner à α dans l'intégrale *(c)* une valeur déterminée, sans diminuer la généralité de cette intégrale.

[7.] Considérons de nouveau l'équation traitée dans l'article (5), et supposons qu'elle soit à coëfficiens constans; l'équation $\nabla'(\alpha, W) = 0$ que l'on a à résoudre pour déterminer W, sera également à coëfficiens constans, et donnera, pour une valeur particulière,

$$W = e^{\beta y};$$

β étant une fonction de α déterminée par l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, dont le terme général est $K\,\alpha^g\,\beta^k$. Lorsque cette équation présentera un facteur du premier degré en α et β, tel que l'on ait

$$a\alpha + b\beta + c = 0,$$

l'on trouvera

$$W = e^{-\frac{(a\alpha+c)y}{b}},$$

et par conséquent

$$\frac{d^i W}{d\alpha^i} = \pm \frac{a^i y^i}{b^i} e^{-\frac{(a\alpha+c)y}{b}};$$

le développement *(B)* devient alors

$$z = e^{\alpha x - y\frac{(a\alpha+c)}{b}}\left(\pi x - \frac{ay}{b}\frac{d.\pi x}{dx} + \frac{a^2y^2}{1.2.b^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} - \frac{a^3y^3}{1.2.3.b^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \ldots \&c.\right),$$

ou

$$z = e^{\alpha x - y\frac{(a\alpha+c)}{b}}\left[\pi\left(x - \frac{ay}{b}\right)\right].$$

On peut dans cette valeur de z faire α nulle sans diminuer sa généralité, et par conséquent obtenir

$$z = e^{-\frac{cy}{b}}\,\pi(bx - ay).$$

On aura autant de semblables valeurs de z que l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, donnera de facteurs du premier degré en α et β. Si cette équation est

entièrement décomposable en de semblables facteurs, on aura m valeurs de z analogues à la précédente, et leur somme sera l'intégrale complète en termes finis de la proposée.

Il peut arriver que b soit nulle dans l'équation $a\alpha + b\beta + c' = 0$; alors $\alpha = -\frac{c}{a}$, et sous le signe de fonctions x s'évanouit près de la quantité infinie $-\frac{ay}{b}$, la fonction arbitraire ne renferme plus que y, la quantité $e^{-y\frac{(a\alpha+c)}{b}}$ reste indéterminée, le coëfficient de y devenant $= \frac{0}{0}$, et peut être censée comprise dans la fonction. D'après ces modifications, la valeur de z deviendra dans ce cas

$$z = e^{-\frac{c'x}{a}}\pi(y),$$

et telle sera la forme de quelques parties de l'intégrale complète, lorsque l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, supposée décomposable en facteurs du premier degré, ne sera pas du degré m par rapport à β.

Si l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$ ne présente que quelques facteurs du premier degré en α et β, on aura l'intégrale complète en termes finis par rapport à quelques-unes des fonctions qu'elle doit contenir, et en termes infinis par rapport aux autres.

En général, l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$ ne sera pas décomposable en facteurs, et l'intégrale complète de la proposée sera en termes infinis par rapport à toutes les fonctions arbitraires qu'elle doit contenir. Cependant, si l'on remarque l'analogie que présente la formule

$$(B)\ z = e^{ax}\left(W\pi x + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d\pi x}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c.\right)$$

avec le développement de $f(x+i)$, on pourra la représenter par le symbole suivant,

$$z = e^{ax}\pi\left(x + \frac{dW}{d\alpha}\right),$$

en convenant qu'après avoir développé la fonction π selon les puissances entières et positives de $\frac{dW}{d\alpha}$, on changera les exposans de

... de différenciation; ainsi, par exemple, $\frac{dW^i}{d\alpha^i}$ deviendra $\frac{d^i W}{d\alpha^i}$, et $\frac{dW^o}{d\alpha^o}$ deviendra $\frac{d^o W}{d\alpha^o}$, ou W.

On pourrait encore représenter la même formule par $e^{\pi x}(W)$, (W) indiquant ce que devient W, lorsque l'on y met pour α, $\alpha + \frac{d\pi x}{dx}$, en convenant également de développer (W) suivant les puissances entières et positives de $\frac{d.\pi x}{dx}$, et de changer ensuite les exposans de $d.\pi x$ en indice de différenciation.

Les géomètres ont déjà employé des symboles de même genre pour indiquer plusieurs séries données par le calcul aux différences finies. Ils ont représenté, par exemple, la différence finie Δu par $e^{\frac{du}{dx}} - 1$, avec la même condition de changer dans le développement les exposans en indices de différenciation.

Au reste, nous remarquerons que, d'après l'analogie de la formule (A) de l'article [4], avec le développement de $f(x + i)$, toutes les intégrales qu'on peut dériver de cette formule doivent être susceptibles de s'exprimer par des symboles analogues à ceux que nous venons d'indiquer.

[8.] Reprenons encore l'équation traitée dans l'article [6], et supposons que son terme général soit

$$K(p + qx)^g (p' + q'y)^h \frac{d^{g+h}z}{dx^g dy^h},$$

K étant une constante; l'équation $\nabla'(\alpha, W) = 0$ qui doit déterminer W, sera satisfaite en faisant

$$W = (p' + q'y)^\beta,$$

la quantité β devra être déterminée en α par l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, qui a pour terme général,

$$\alpha.\alpha-1.\alpha-2.....(\alpha-g+1).\beta.\beta-1.\beta-2.....(\beta-h+1).q^g.q'^h.$$

... plus souvent cette équation, comme celle qui lui correspond dans

l'article précédent, ne sera pas décomposable en facteurs du premier degré. La formule *(C)* conserve alors sa forme infinie,

$$z = (p+qx)^{\alpha}(W\pi x + \frac{p+qx}{q}\Delta_{\alpha} W \cdot \frac{d\pi x}{dx} + \frac{(p+qx)^2}{q^2}\frac{\Delta^2_{\alpha} W}{1.2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{(p+qx)^3}{q^3}\frac{\Delta^3_{\alpha} W}{1.2.3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c.);$$

mais on pourra la représenter d'une manière finie par le symbole

$$z = (p+qx)^{\alpha}\,\pi\left(x + \frac{p+qx}{q}\Delta_{\alpha} W\right),$$

en convenant qu'après le développement de la fonction, les exposans de $\Delta_{\alpha} W$, seront changés en indices de différences.

Dans le cas où l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, présente un facteur du premier degré en α et β, tel que l'on ait

$$a\alpha + b\beta + c = 0,$$

W devient

$$W = (p' + q'y)^{-\frac{(a\alpha+c)}{b}},$$

et ainsi l'on a

$$\Delta^n_{\alpha} W = (p'+q'y)^{-\frac{(a\alpha+c)}{b}}\left[(p'+q'y)^{-\frac{a}{b}} - 1\right]^n;$$

la formule *(C)* devient donc,

$$z = (p+qx)^{\alpha}(p'+q'y)^{-\frac{(a\alpha+c)}{b}}\left[\pi x + \frac{(p+qx)}{q}\left((p'+q'x)^{-\frac{a}{b}} - 1\right)\frac{d\pi x}{dx} + \frac{(p+qx)^2}{q^2}\left(\frac{(p'+q'y)^{-\frac{a}{b}} - 1}{1.2}\right)^2\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{(p+qx)^3}{q^3}\left(\frac{(p'+q'y)^{-\frac{a}{b}} - 1}{1.2.3}\right)^3\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c.\right]$$

et peut être mise sous la forme

$$z = (p+qx)^{\alpha}(p'+q'y)^{-\frac{(a\alpha+c)}{b}}\,\pi\left\{x + \frac{(p+qx)}{q}\left[(p'+q'y)^{-\frac{a}{b}} - 1\right]\right\},$$

ou en faisant $\alpha = 0$, et négligeant sous le signe de fonction π les constantes qui n'affectent pas les variables

$$z = (p'+q'y)^{-\frac{c}{b}}\,\pi\left[(p+qx)^b(p'+q'y)^{-a}\right];$$

on pourra obtenir autant de semblables valeurs de z que l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, présentera de facteurs du premier degré en α et β. Si elle est entièrement décomposable en facteurs de ce genre, on aura l'intégrale générale complète de la proposée.

Supposons, pour donner un exemple simple, que le terme général de l'équation qu'on se propose d'intégrer, soit

$$\frac{g+h.g+h-1.g+h-2.\ldots\ldots.g+1.}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.h} x^g y^h \frac{d^{g+h}z}{dx^h\, dy^h},$$

$g + h$ étant toujours égale à m, de manière que l'équation proposée ne contienne que les coëfficiens différentiels de l'ordre le plus élevé. Dans le cas actuel, p et p' sont nulles; q et q' égales à un, et l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, a pour terme général,

$$\frac{g+h.g+h-1.g+h-2\ldots g+1}{1.2.3.\ldots\ldots.h} .\alpha.\alpha-1.\alpha-2.\ldots.\alpha-g+1.\beta.\beta-1.\beta-2.\ldots.\beta-h+1.$$

En faisant usage de la notation qu'emploie *Vandermonde* pour représenter les puissances du *second ordre*, ou produits tels que

$$p.p-1.p-2.\ldots\ldots\ldots.p-n+1,$$

l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$ pourra être mise sous la forme

$$[\alpha]^m + m[\alpha]^{m-1}[\beta]^1 + \frac{m.m-1}{1.2}[\alpha]^{m-2}[\beta]^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}[\alpha]^{m-3}[\beta] + \&c. = 0,$$

ou plus simplement sous la forme suivante,

$$[\alpha + \beta]^m = 0,$$

équation qui est satisfaite par la relation suivante entre α et β,

$$\alpha + \beta - i = 0,$$

i pouvant recevoir une quelconque des valeurs

$$0, 1, 2, 3.\ldots\ldots\ldots m-1.$$

La somme des valeurs particulières que l'on obtient en employant successivement les m relations différentes qui peuvent exister entre α et β, donnera l'intégrale complète

$$z = \pi.\left(\frac{x}{y}\right) + y.\pi_1\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\pi_2\left(\frac{x}{y}\right) + y^3\pi_3\left(\frac{x}{y}\right).\ldots + y^{m-1}\pi_{m-1}\left(\frac{x}{y}\right),$$

π, π_1, π_2, π_3 ..... π_{m-1} désignant des fonctions arbitraires différentes.

Lorsque $m = 2$, on a l'intégrale connue

$$z = \pi\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \pi_1\left(\frac{x}{y}\right),$$

de l'équation du second ordre

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx\, dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0.$$

[9.] PAR la combinaison des procédés que nous avons employés dans les deux derniers articles, on pourrait arriver à de semblables résultats pour l'équation à différentielles partielles du premier degré dont le terme général serait

$$K \cdot (p + qx)^g \frac{d^{g+h} z}{dx^g\, dy^h},$$

K étant constante.

Nous ne nous occuperons pas de ce calcul; et il nous suffira de remarquer qu'en changeant $p + qx$ en $e^{x'}$, on ramenerait cette équation à n'avoir que des coëfficiens constans. Il en serait de même de celle traitée dans l'article précédent, en y changeant $p + qx$ en $e^{x'}$ et $p' + q'y$ en $e^{y'}$.

Nous ferons observer encore que dans le calcul des équations différentielles à deux variables, on n'a de méthodes générales pour intégrer les équations du premier degré d'un ordre quelconque, que lorsque tous les termes n'ont que des coëfficiens constans, ou sont de la forme $k(p + qx)^g \cdot \frac{d^g z}{dx^g}$: cas analogues à ceux que nous venons de traiter pour les équations différentielles partielles à trois variables.

On peut aussi étendre aux équations entre un plus grand nombre de variables les recherches précédentes, en y introduisant les modifications convenables. Si, par exemple, l'équation proposée était entre quatre variables, il faudrait employer à la place de la formule *(A)* de l'article [4] une autre formule présentant le développement de l'intégrale suiva-

suivant les ordres différentiels pris par rapport à u et $u_{,}$ de la fonction arbitraire de deux quantités $\pi\ (u, u_{,})$.

Mais avant de nous occuper des équations à plus de trois variables, nous allons chercher à confirmer les résultats auxquels nous sommes parvenus, en les retrouvant par des procédés tout-à-fait différens, et qui pourront donner lieu à quelques remarques importantes.

[10.] SOIT l'équation différentielle partielle de l'ordre m et du premier degré.

$$\nabla \cdot z = 0.$$

On sait que si $z = V$ vérifie cette équation, et que ω désigne une quantité indéterminée contenue dans V, mais qui n'entre pas dans les coëfficiens de $\nabla z = 0$, cette équation sera encore vérifiée par $z = A \frac{d^n V}{d\omega^n}$, n étant un nombre quelconque, et A une constante qui peut être fonction de ω; de plus, on la vérifiera également en prenant la somme d'un nombre quelconque d'expressions semblables.

Lorsque les coëfficiens de l'équation proposée ne contiennent pas l'une des variables indépendantes, on peut opérer par rapport à cette variable comme par rapport à ω; mais la quantité A étant assujettie à demeurer constante, ne pourra pas la contenir.

Maintenant, supposons que l'équation $\nabla z = 0$ soit à coëfficient constant, et entre les variables x, y et z: on peut la vérifier en prenant

$$z = e^{\alpha x + \beta y}.$$

Les deux quantités α et β sont liées entre elles par l'équation de condition $\nabla' (\alpha, \beta) = 0$, la même que celle que nous avons désignée ainsi dans l'article [7], et semblable à celle que l'on obtiendrait entre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, si l'on changeait dans $\nabla z = 0$ les indices de différenciation en exposans de puissances; l'équation $\nabla' (\alpha, \beta) = 0$ donne la valeur de β en α qui reste indéterminée. L'on peut donc différencier l'expression $z = e^{\alpha x + \beta y}$ par rapport à α, un nombre indéfini de fois.

En représentant $e^{\beta y}$ par W, la somme de ces différentielles, multipliées chacune par une constante, sera

$$\begin{aligned} z = e^{\alpha x}\{ & A W + B\frac{dW}{d\alpha} + C\frac{d^2W}{d\alpha^2} + D\frac{d^3W}{d\alpha^3} + E\frac{d^4W}{d\alpha^4} + \&c. \\ & + Bx W + 2Cx\frac{dW}{d\alpha} + 3Dx\frac{d^2W}{d\alpha^2} + 4Ex\frac{d^3W}{d\alpha^3} + \&c. \\ & + Cx^2 W + 3Dx^2\frac{dW}{d\alpha} + 10Ex^2\frac{d^2W}{d\alpha^2} + \&c. \\ & + Dx^3 W + 4Ex^3\frac{dW}{d\alpha} + \&c. \\ & + Ex^4 W + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Si l'on représente par U la quantité

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.,$$

la valeur précédente de z deviendra

$$(b)\quad z = e^{\alpha x}\left[W U + \frac{dW}{d\alpha}\frac{dU}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3U}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4W}{d\alpha^4}\frac{d^4U}{dx^4} + \&c.\right];$$

en changeant dans cette expression U en πx, on trouvera

$$(B)\quad z = e^{\alpha x}\left[W.\pi x + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d\pi x}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4W}{d\alpha^4}\frac{d^4U}{dx^4} + \&c.\right],$$

formule qui est celle même qu'on a obtenue article [7] : on peut la vérifier *à posteriori*, et justifier ainsi la substitution de la fonction arbitraire πx, à la place de la fonction analytique U.

En considérant la première de ces deux séries, on aura autant d'expressions semblables que l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$ donnera de valeurs de β en α. Si cette équation est du degré m par rapport à β, on aura un nombre m de séries, dont la somme formera l'intégrale de l'équation $\nabla z = 0$ complétée avec m fonctions $U, U_{,}, U_{,,}$, &c., arbitraires, mais

assujetties à la condition de pouvoir être représentées par le développement analytique

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

L'intégrale ainsi complétée n'est évidemment que la transformation de la somme d'un nombre infini de termes, tels que

$$A \frac{d^n e^{\alpha x + \beta y}}{d\alpha^n},$$

en donnant à n toutes les valeurs positives entières, et à β successivement les m valeurs qu'elle peut recevoir en α.

Si l'on indique par le signe S la somme de tous ces termes, le théorème suivant résulte des remarques précédentes.

Lorsque z est déterminée par une équation $\nabla z = 0$ différentielle partielle à coëfficiens constans, toute proposition vraie pour la valeur

$$z = S\left(A \frac{d^n e^{\alpha x + \beta y}}{d\alpha^n}\right),$$

est vraie pour l'intégrale de l'équation $\nabla z = 0$ complétée avec des fonctions arbitraires, telles que U, $U_{,}$, $U_{,,}$, &c.

[11.] Admettons de plus qu'une proposition démontrée, en donnant à z la valeur

$$z = S\left(A \frac{d^n e^{\alpha x + \beta y}}{d\alpha^n}\right),$$

le soit encore, en supposant que, pour les valeurs de la variable x, comprises entre λ et λ', l'on puisse faire abstraction d'une partie des termes renfermés sous le signe S, ou changer à volonté les constantes qui les affectent; que l'on puisse en agir de même à l'égard d'une autre partie des mêmes termes, pour les valeurs de x comprises entre λ' et λ'', et ainsi de suite. On voit que dans ce cas les fonctions U, $U_{,}$, $U_{,,}$, &c. changeront de forme en passant des premières valeurs de x aux secondes, de celles-ci aux suivantes, &c.

Ceci posé, quelle que soit la fonction πx, entièrement arbitraire, discontinue, &c., qui, mise à la place de U, donne à l'intégrale de la

proposée toute la généralité qu'elle comporte, on peut toujours, et par des moyens connus, déterminer la fonction analytique U, de manière qu'elle donne les mêmes valeurs que πx pour autant de valeurs communes de x, et aussi rapprochées que l'on voudra, comprises entre λ et λ'. En outre, changeant la forme de U, comme nous supposons qu'il est permis de le faire, on peut opérer de la même manière pour les valeurs de x comprises entre λ' et λ'', &c. On voit que l'on peut exprimer ainsi dans toute son étendue, et avec un aussi grand degré de précision qu'on le jugera convenable, la fonction πx à l'aide de U; et il paraît en résulter que ce qui se démontre pour l'intégrale complétée avec la fonction U, peut s'appliquer au cas où l'on emploierait πx (*).

On est donc conduit par ces considérations à conclure que si une proposition est vraie pour la valeur

$$z = S\left(A\,\frac{d^{n}.e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^{n}}\right),$$

en admettant toujours les conditions que nous supposons dans le commencement de cet article, cette même proposition est vraie pour l'intégrale de l'équation $\overset{\vee}{\nabla} z = 0$, complétée avec des fonctions entièrement arbitraires.

Ce théorème a déjà été énoncé, mais sans démonstration, à la fin d'un Mémoire de M. *Biot*, sur les équations différentielles partielles, imprimé dans les recueils de l'Institut, pour l'an XI.

La somme d'un nombre infini de termes, tels que

$$(m)\quad A\,e^{\alpha x+\beta y}+B\frac{de^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha}+C\frac{d^{2}e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^{2}}+D\frac{d^{3}e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^{3}}+E\frac{d^{4}e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^{4}}+\&c$$

peut être remplacée par la somme d'un nombre infini de termes différens, tels que

$$(n)\quad A_{,}e^{\alpha x+\beta y}+B_{,}e^{\alpha_{,}x+\beta_{,}y}+C_{,}e^{\alpha_{,,}x+\beta_{,,}y}+D_{,}e^{\alpha_{,,,}x+\beta_{,,,}y}+E_{,}e^{\alpha_{,,,,}x+\beta_{,,,,}y}+\&c.$$

α, β; $\alpha_{,}, \beta_{,}$; $\alpha_{,,}, \beta_{,,}$ &c. étant toujours liées entre elles par l'équa

(*) C'est ainsi, dans la géométrie, que ce qui se démontre pour un polygone d'un nombre indéfini de côtés, inscrit à une courbe, se trouve démontré pour la courbe elle-même.

de condition $\Delta'(\alpha, \beta) = 0$, et $\alpha, \alpha_{,}, \alpha_{,,}$ &c. représentant des valeurs quelconques attribuées à α.

Pour s'en convaincre, il suffit de mettre à la place de α', $\alpha + \theta$; à la place de $\alpha_{,,}$, $\alpha + \theta_{,}$, &c. et de développer suivant les puissances de $\theta, \theta_{,}, \theta_{,,}$ &c., on retrouvera la somme (m), en changeant convenablement les constantes.

Cette dernière somme peut encore recevoir une autre forme assez remarquable. En effet, $\Phi\alpha$ désignant une fonction arbitraire de α, supposons $A = \int \Phi\alpha\, d\alpha$, $B = -\iint \Phi\alpha\, d\alpha^2$, $C = \iiint \Phi\alpha\, d\alpha^3$, $D = -\iiiint \Phi\alpha\, d\alpha^4$, &c. ce qui peut se faire sans diminuer la généralité des constantes A, B, C, D &c., l'expression (m) deviendra

$$e^{\alpha x+\beta y}\int \Phi\, d\alpha - \frac{d.e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha}\iint \Phi\alpha\, d\alpha^2 + \frac{d^2.e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^2}\iiint \Phi\alpha\, d\alpha^3 - \frac{d^3.e^{\alpha x+\beta y}}{d\alpha^3}\iiiint \Phi\alpha\, d\alpha^4 + \&c.$$

et pourra être mise sous la forme simple

$$(p) \quad \int e^{\alpha x+\beta y}\, \Phi\alpha.d\alpha,$$

expression que M. *Lacroix* a fait connaître, mais sans déterminer la généralité qu'elle comporte. Les expressions (n) et (p) ne sont que des transformations de l'expression (m); et si le théorème établi précédemment est regardé comme vrai, en considérant cette dernière, il l'est également en considérant les deux autres.

Ce théorème est très-important sur-tout pour l'application de l'analyse à la physique, où l'on rencontre souvent des équations différentielles partielles du premier degré à coëfficiens constans, et non susceptibles, pour la plupart, de recevoir une intégrale en termes finis.

En l'admettant, on voit, par exemple, que *Daniel Bernouilli*, dans la discussion relative au problème des cordes vibrantes, pouvait démontrer, à l'aide de l'expression donnée par *Taylor*,

$$z = A \sin.\left(\frac{cx}{\alpha}\right) \cos.\left(\frac{kct}{\alpha}\right) + B \sin.\left(\frac{cx}{\alpha_{,}}\right) \cos.\left(\frac{kct}{\alpha_{,}}\right) + D \sin.\left(\frac{cx}{\alpha_{,,}}\right) \cos.\left(\frac{kct}{\alpha_{,,}}\right) + \&c.$$

toutes les propositions dépendantes de cette question de mécanique, aussi complètement qu'*Euler* l'a fait, en employant et modifiant, d'après les circonstances du problème, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2},$$

qui représente le mouvement de la corde vibrante.

[12.] PASSONS maintenant à la considération des équations à plus de trois variables, et supposons que ζ, x, y et t entrent dans l'équation $\nabla\zeta = 0$ à coëfficiens constans et de l'ordre m : on y satisfera en posant

$$Z = e^{\alpha x+\beta y+\gamma t},$$

les trois quantités α, β, γ sont liées entre elles par l'équation de condition

$$\nabla'(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

la même que celle qu'on obtiendrait entre $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, en changeant dans $\nabla\zeta = 0$ les indices de différenciation en exposans de puissantes. Par ce changement, $\frac{d^{\varepsilon+h+i}\zeta}{dx^\varepsilon dy^h dt^i}$ deviendrait $\frac{d\zeta^\varepsilon}{dx^\varepsilon}\cdot\frac{d\zeta^h}{dy^h}\cdot\frac{d\zeta^i}{dt^i}$, et de même $\zeta = d^0\zeta$ deviendrait $d\zeta^0 = 1$. Par la suite, nous représenterons l'équation $\nabla\zeta = 0$ ainsi transformée, par $\nabla'\zeta = 0$.

L'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ donne la valeur de γ en α et β qui restent indéterminées ; nous pouvons donc différencier l'expression $\zeta = e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}$, un nombre indéfini de fois par rapport à α et β. En représentant $e^{\gamma t}$ par W, la somme de ces différentielles, multipliées chacune par une constante, sera

$$\begin{aligned}\zeta = e^{\alpha x+\beta y}\Big(&AW + B\frac{dW}{d\alpha} + B_{,}\frac{dW}{d\beta} + C\frac{d^2W}{d\alpha^2} + C_{,}\frac{d^2W}{d\alpha d\beta} + C_{,,}\frac{d^2W}{d\beta^2} + D\frac{d^3W}{d\alpha^3} + \&c\\ &+ Bx\,W + B_{,}y\,W + 2Cx\frac{dW}{d\alpha} + C_{,}\Big(x\frac{dW}{d\beta} + y\frac{dW}{d\alpha}\Big) + C_{,,}y\frac{dW}{d\beta} + 3Dx\frac{d^2W}{d\alpha^2} + \&c\\ &+ Cx^2W + C_{,}cxyW + C_{,,}y^2W + 3Dx^2\frac{dW}{d\alpha} + \&c\\ &+ Dx^3W + \&\Big)\end{aligned}$$

Représentons par U la quantité

$$\begin{aligned} &A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c. \\ &\quad + B_{,}y + C_{,}xy + D_{,}x^2y + E_{,}x^3y + \&c. \\ &\quad\quad + C_{,,}y^2 + D_{,,}xy^2 + E_{,,}x^2y^2 + \&c. \\ &\quad\quad\quad + D_{,,,}y^3 + E_{,,,}xy^3 + \&c. \\ &\quad\quad\quad\quad + E_{,,,,}y^4 + \&c. \\ &\quad\quad\quad\quad\quad + \&c. \end{aligned}$$

La valeur précédente de z alors deviendra

$$\begin{aligned} (b')\ Z = e^{\alpha x+\beta y}\Big\{ & WU + \frac{dW}{d\alpha}\frac{dU}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3U}{dx^3} + \&c. \\ & + \frac{2}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha\, d\beta}\frac{d^2U}{dx\, dy} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^2\, d\beta}\frac{d^3U}{dx^2\, dy} + \&c. \\ & + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha\, d\beta^2}\frac{d^3U}{dx\, dy^2} + \&c. \\ & + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\beta^3}\frac{d^3U}{dy^3} + \&c. \Big\} \end{aligned}$$

En changeant U en fonction entièrement arbitraire $\pi(x, y)$, on arrive à l'intégrale

$$\begin{aligned} (B')\ Z = e^{\alpha x+\beta y}\Big\{ & W\pi(x,y) + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d.\pi(x,y)}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi(x,y)}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi(x,y)}{dx^3} + \&c. \\ & + \frac{dW}{d\beta}\frac{d.\pi(x,y)}{dy} + \frac{2}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha d\beta}\frac{d^2\pi(x,y)}{dx\, dy} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^2 d\beta}\frac{d^3\pi(x,y)}{dx^2 dy} + \&c. \\ & + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{d^2\pi(x,y)}{dy^2} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha d\beta^2}\frac{d^3\pi(x,y)}{d\alpha\, dy^2} + \&c. \\ & + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\beta^3}\frac{d^3\pi(x,y)}{dy^3} + \&c. \Big\} \end{aligned}$$

que l'on aurait trouvée directement en appliquant aux équations du premier degré à quatre variables les procédés que nous avons employés pour les équations à trois variables, articles [5] et [7]; mais, d'après la marche que nous venons de suivre pour y parvenir, la substitution de la fonction entièrement arbitraire $\pi(x, y)$ à la fonction analytique U doit être justifiée, en vérifiant *a posteriori* l'intégrale (B').

Cette vérification deviendra facile, si l'on remarque que l'on a la valeur de $\frac{d\zeta}{dx}$ en changeant dans l'intégrale (B') W en αW, celle de $\frac{d\zeta}{dy}$ en changeant W en βW, et généralement celle de $\frac{d^{i+i'}\zeta}{dx^i dy^{i'}}$ en changeant W en $\alpha^i \beta^{i'} W$. Les différentielles de ζ relatives à t sont faciles à obtenir; car cette dernière variable n'entre que dans $W = e^{\gamma t}$. L'équation $\nabla \zeta = 0$, après qu'on y aura porté ces valeurs des coëfficiens différentiels, prendra la forme qu'offrirait le développement (B'), si l'on changeait W en $W \times \nabla' (\alpha, \beta, \gamma)$, et sera par conséquent vérifiée, puisqu'ainsi qu'on l'a vu plus haut, les quantités α, β, γ sont telles que l'on a $\nabla' (\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Nous remarquerons encore que l'on peut dans cette intégrale faire $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ sans en diminuer la généralité; c'est ce qui se démontre aisément, comme nous l'avons fait pour l'intégrale (B) de l'article [7].

On aura autant de séries pareilles à (B') que l'équation $\nabla' (\alpha, \beta, \gamma) = 0$ présentera de valeurs différentes de γ en β et α. Supposons que l'on en obtienne un nombre m, et la somme des m séries qui en résulteront donnera l'intégrale de la proposée.

Si l'on tire de l'équation $\nabla' (\alpha, \beta, \gamma) = 0$ un facteur du premier degré tel que

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + f = 0,$$

on trouvera

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{a}{c} t W, \qquad \frac{dW}{d\beta} = -\frac{b}{c} t W,$$

et en général

$$\frac{d^{i+i'} W}{d\alpha^i d\beta^{i'}} = \pm \frac{a^i b^{i'} t^{i+i'} W}{c^{i+i'}},$$

et la série (B') prendra la forme

$$\zeta = e^{\alpha x + \beta y - \frac{(a\alpha + b\beta + f)}{c} t} \pi \left(x - \frac{a}{c} t, y - \frac{b}{c} t \right),$$

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

qui se présente dans la théorie des fluides et des attractions des sphéroïdes. L'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, correspondante, est

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0;$$

faisons

$$W = e^{t\sqrt{(-\alpha^2-\beta^2)}}, \qquad W_1 = e^{-t\sqrt{(-\alpha^2-\beta^2)}},$$

et l'intégrale complète pourra être représentée par

$$\zeta = \pi\left(x + \frac{dW}{d\alpha}, y + \frac{dW}{d\beta}\right) + \pi_1\left(x + \frac{dW_1}{d\alpha}, y + \frac{dW_1}{d\beta}\right),$$

elle pourra l'être encore par

$$\zeta = e^{t\sqrt{\left[-\left(d.\frac{\pi(x,y)}{dx}\right)^2 - \left(d.\frac{\pi(x,y)}{dy}\right)^2\right]}} + e^{-t\sqrt{\left[-\left(d.\frac{\pi(x,y)}{dx}\right)^2 - \left(d.\frac{\pi(x,y)}{dy}\right)^2\right.}}$$

Dans le développement de la première expression, les exposans de $\frac{dW}{d\alpha}$, $\frac{dW}{d\beta}$, $\frac{dW_1}{d\alpha}$, $\frac{dW_1}{d\beta}$; dans le développement de la seconde, les exposans de $d.\frac{\pi(x,y)}{dx}$, $d.\frac{\pi(x,y)}{dy}$, doivent être changés en indices. De plus, dans l'une et l'autre expression α et β sont supposées nulles, ou devoir être annullées, après que les différenciations qui se rapportent à ces quantités, auront été effectuées.

Reprenons la série *(b')*,

$$= e^{\alpha x + \beta y}\left(W U + \frac{dW}{d\alpha}\frac{dU}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3U}{dx^3} + \&c.\right.$$

$$+ \frac{dW}{d\beta}\frac{dU}{dy} + \frac{2}{1.2}\frac{d^2W}{d\alpha d\beta}\frac{d^2U}{dx dy} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^2 d\beta}\frac{d^3U}{dx^2 dy} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha d\beta^2}\frac{d^3U}{dx dy^2} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\beta^3}\frac{d^3U}{dy^3} + \&c.$$

dans laquelle U représente une fonction [illegible] quantités,
développée selon les puissances entières et [illegible] $(s \ldots\ldots)$.

On peut substituer à cette série la somme [illegible] $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta) = 0$,
que la transformation, [illegible]

$$(m') \quad \int . A\, d^{n+n'} \frac{e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}}{d\alpha^n\, d\beta^{n'}}$$

leur nombre
lète de la
formée de tous les termes que l'on obtient en donnan
valeurs différentes entières et positives, et à γ successivement
valeurs qu'elle doit recevoir en α et β.
érale
ns

La somme (m') peut elle-même être remplacée par la suivante.

$$(n') \int . A\, e^{\alpha x+\beta y+\gamma t},$$

les quantités α, β, γ restant toujours liées entre elles par l'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; mais pouvant d'ailleurs recevoir une infinité de valeurs différentes : elle peut l'être encore par l'expression

$$(p') \iint e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}\, \Phi(\alpha, \beta)\, d\alpha . d\beta,$$

dans laquelle l'une des intégrales est prise par rapport à α, et l'autre par rapport à β, après que l'on a mis pour γ une de ses valeurs en α et β, tirée de l'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

La légitimité de ces transformations se démontre de la même manière que nous l'avons fait pour des transformations analogues dans l'article [11].

Lorsqu'une proposition est vraie en supposant z égale à l'une des expressions (m'), (n') ou (p'), elle le sera évidemment pour l'intégrale de l'équation $\nabla z = 0$, complétée avec des fonctions arbitraires telles que U.

Si pour le cas des équations à trois variables, le théorème précédent peut être étendu à l'intégrale complétée avec des fonctions entièrement arbitraires, les mêmes considérations conduiront à le généraliser aussi pour les équations à quatre variables.

TE herches précédentes peuvent s'appliquer sans

difficulté aux équations du premier degré de l'ordre m et à coèfficiens constans. En effet, supposons que $\nabla \zeta = 0$, renferme les n variables $\zeta, x, y, t \ldots . s$; on pourra satisfaire à cette équation par une expression exponentielle, telle que celles que nous avons employées dans les articles précédens; les indéterminées $\alpha, \beta, \gamma \ldots . . \theta$ qui entreront dans cette expression, seront liées entre elles par une équation

$$\nabla'(\alpha, \beta, \gamma \ldots . . \theta) = 0,$$

algébrique du degré m, la même que l'équation $\nabla' \zeta = 0$, qu'on obtiendrait entre $\frac{d\zeta}{dx}, \frac{d\zeta}{dy}, \frac{d\zeta}{dt} \ldots . . \frac{d\zeta}{ds}$, en changeant dans $\nabla \zeta$ les indices de différenciation en exposans.

La somme des différentielles par rapport à α, β, γ, &c. de cette quantité exponentielle, multipliées chacune par une constante, pourra être mise sous une forme analogue à celles des séries *(b)* et *(b')*. A la place de la fonction arbitraire analytique qui s'y trouvera comprise, on pourra mettre une fonction tout-à-fait arbitraire $\pi(x, y, t \ldots)$, et justifier cette substitution en vérifiant l'intégrale *a posteriori*, comme nous l'avons fait dans l'article précédent. Si l'on suppose $W = e^{\theta s}$, et qu'à la place de θ on ait mis sa valeur en α, β, γ, &c. tirée de l'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta)$, on trouvera que l'intégrale dont il s'agit a pour terme général,

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots i . 1.2.3 . i' . 1.2.3 \ldots i'' . \&c.} \cdot \frac{d^{i+i'+i''+\ldots} W}{d\alpha^i . d\beta^{i'} . d\gamma^{i''} \&c.} \cdot \frac{d^{i+i'+i''\ldots} \pi(x, y, t \ldots .)}{dx^i . dy^{i'} . dt^{i''} . \&c.}.$$

On peut remarquer aussi, en général, que lorsque l'équation $\nabla'(\alpha, \beta, \gamma \ldots .) = 0$, présentera un facteur du premier degré, tel que

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \ldots . . . . + f\theta + g = 0,$$

ou, ce qui revient au même, lorsque l'équation $\nabla' \zeta = 0$ donnera un facteur semblable du premier degré

$$a \frac{d\zeta}{dx} + b \frac{d\zeta}{dy} + c \frac{d\zeta}{dt} \ldots . + f \frac{d\zeta}{ds} + g = 0,$$

l'équation $\nabla \zeta = 0$ pourra être satisfaite par l'expression suivante

renfermant une fonction arbitraire de $n - 2$ quantités,

$$z = e^{-\frac{gs}{f}}\,\pi\,(fx - as,\ fy - bs,\ ft - cs\ \ldots\ldots).$$

On aura autant d'expressions semblables que l'équation $\nabla'(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta)=0$, ou $\nabla' z = 0$, présentera de facteurs du premier degré. Si leur nombre est m, la somme de ces expressions donnera l'intégrale complète de la proposée en termes finis.

Ainsi l'on est conduit à ce résultat remarquable : l'intégrale générale d'une équation différentielle partielle du premier degré à coëfficiens constans et entre n variables, contiendra, sous forme finie, autant de fonctions arbitraires de $n-2$ quantités qu'il se trouvera de facteurs du premier degré par rapport aux différentielles premières partielles de la variable principale, dans l'équation qu'on obtiendra en changeant en exposans les indices de différenciation de l'équation donnée.

Il faudrait de plus démontrer que les autres fonctions arbitraires qui doivent compléter l'intégrale générale, ne peuvent y entrer sous forme finie, c'est-à-dire d'une manière algébrique, ou engagées sous un nombre quelconque fini de signes de différenciation ou d'intégration pris seulement par rapport aux variables indépendantes de l'équation, ou par rapport à des quantités composées de ces variables d'une manière donnée. On peut parvenir à cette démonstration, en s'aidant de ce que nous avons exposé dans les articles [1], [4], [5] et [7]; mais cette recherche est trop longue pour trouver place ici, et nous écarterait trop de l'objet particulier de ce mémoire.

[14.] Jusqu'ici nous avons supposé que les équations à différentielles partielles du premier degré à coëfficiens constans dont nous nous sommes occupés, renfermaient dans tous leurs termes la variable principale z ou ses différentielles partielles; mais avant d'appliquer les intégrales définies aux séries que nous avons trouvées, il nous reste à traiter les équations qui, de plus, contiendraient un terme non affecté de la variable principale, et formé seulement de variables indépendantes.

Nous allons, préliminairement à cette recherche, exposer encore une manière différente de considérer les équations à coëfficiens constans, et par-là nous serons conduits à des méthodes faciles pour résoudre le nouveau problème qui doit nous occuper.

Soient les deux expressions différentielles,

$$A\,\frac{d^n z}{dx^n} \qquad B\,\frac{d^m z}{dy^m},$$

A et B étant des constantes; que l'on mette dans la première, à la place de la variable z, la seconde de ces expressions, on aura

$$A\,B\,\frac{d^{n+m} z}{dx^n\,dy^n}.$$

On serait arrivé au même résultat, si, après avoir changé dans les expressions différentielles données, les indices de différenciation de dz en exposans de puissances, on eût multiplié ces deux expressions l'une par l'autre, et que dans le produit l'on eût établi en indices les exposans de dz.

En généralisant ce procédé, on voit que si l'on a deux expressions différentielles Δz, $\Delta_1 z$ du premier degré à coëfficiens constans, et renfermant la même variable principale; et que l'on mette dans Δz à la place de z l'expression $\Delta_1 z$, le résultat que nous représentons par $\Delta . \Delta_1 z$, sera le même que celui qu'on aurait obtenu en multipliant les deux expressions données, et traitant les indices de différenciation comme des exposans de puissances.

Réciproquement l'expression différentielle du premier degré à coëfficiens constans ∇z, après que l'on a changé en exposans les indices de différenciation qui affectent dz, étant représentée par $\nabla' z$; si cette dernière expression peut être mise sous la forme de produit, tel que

$$\nabla' z = \Delta' z \,.\, \Delta'_1 z;$$

$\Delta' z$ et $\Delta'_1 z$ désignant des fonctions rationnelles et sans diviseurs variables de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ &c., on aura

$$\nabla z = \Delta \,.\, \Delta_1 z.$$

Les signes Δ, Δ_1 indiquent ce que deviennent les expressions $\Delta' z$ et $\Delta'_1 z$ lorsqu'on y change les exposans en indices de différenciation.

Soit l'équation de l'ordre m

$$\nabla z = 0,$$

l'équation correspondante $\nabla' z = 0$ sera du degré algébrique m; et on peut la concevoir composée du produit de m facteurs, dont chacun donne une valeur de la différentielle $\frac{dz}{dy}$ par exemple, exprimée par une série finie ou infinie de termes contenant des puissances entières et positives des autres différentielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{ds}$, &c.

Si l'on désigne par

$$\Delta'_0 z,\ \Delta'_1 z,\ \Delta'_2 z,\ \Delta'_3 z \ldots\ldots \Delta'_{m-1} z$$

ces différens facteurs, on aura

$$\nabla' z = \Delta' z \times \Delta'_1 z \times \Delta'_2 z \times \Delta'_3 z \ldots\ldots \Delta'_{m-1} z = 0.$$

Que l'on représente aussi par Δ, Δ_1, Δ_2, ... Δ_{m-1} les formes que prennent ces facteurs quand on y change les exposans en indices de différenciation, on trouvera

$$(a) \quad \nabla z = \Delta . \Delta_1 . \Delta_2 . \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_{m-1} z = 0.$$

Dans cette équation on peut faire occuper une place quelconque à chacun des signes $\Delta .$, Δ_1, Δ_2 &c., de même que dans le produit $\nabla' z$. On peut varier à volonté l'ordre des facteurs dont on le connaît composé.

Un facteur quelconque $\Delta'_i z$, égalé à zéro, rend nul le produit $\nabla' z$; de même aussi, en posant

$$\Delta_i z = 0,$$

on satisfait à $\nabla z = 0$, et l'on peut déduire une valeur de z qui vérifie cette dernière équation.

Ces remarques confirment encore l'analogie parfaite qui existe entre les équations différentielles du premier degré à coëfficiens constans, et les équations algébriques, et en général entre les opérations du calcul différentiel et celles de l'algèbre.

[15.] Supposons, pour éclaircir par un exemple ce qui précède, en faire une application, que $\nabla z = 0$ ne renferme que les trois variables z, x et y. En égalant à zéro l'un des facteurs $\delta' z$ de $\nabla' z$, on tirera

$$(p') \quad \frac{dz}{dy} = \beta \frac{dz^0}{dx^0} + \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3\beta}{d\alpha^3}\frac{d^3}{d} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4\beta}{d\alpha^4}\frac{dz^4}{dx^4} + \&c.$$

α, β sont deux indéterminées liées par l'équation $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, la même que $\nabla' z = 0$, en remplaçant respectivement $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par α et β. On suppose de plus dans l'équation (p') que α est rendue nulle après les différenciations.

Parmi les m valeurs de β que l'on pourra obtenir en α, celle qui entre dans l'équation (p') est donnée par le facteur de $\nabla'(\alpha, \beta) = 0$, correspondant au facteur $\delta' z$ de $\nabla' z = 0$.

D'après ce que nous avons dit plus haut, si l'on change dans l'équation (p'), les exposans de dz en indices de différenciation, l'on obtient pour $\frac{dz}{dy}$ la valeur suivante, qui résulterait de l'équation $\delta z = 0$, correspondante à $\delta' z = 0$.

$$(p) \quad \frac{dz}{dy} = \beta z + \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3\beta}{d\alpha^3}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4\beta}{d\alpha^4}\frac{d^4z}{dx^4} + \&c.$$

L'équation (p') donne encore

$$\frac{dz^n}{dy^n} = \beta^n \frac{dz^0}{dx^0} + \frac{d.\beta^n}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2.\beta^n}{d\alpha^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3.\beta^n}{d\alpha^3}\frac{dz^3}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4.\beta^n}{d\alpha^4}\frac{dz^4}{dx^4} + \&c.$$

on en déduira de même

$$\frac{d^n z}{dy^n} = \beta^n z + \frac{d.\beta^n}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2.\beta^n}{d\alpha^2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3.\beta^n}{d\alpha^3}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4.\beta^n}{d\alpha^4}\frac{d^4z}{dx^4} + \&c. :$$

équation

développement identique avec celui que nous avons désigné par dans les articles [7] et [10], en supposant nulle dans ce dernier déterminée a.

Le même procédé appliqué aux équations à quatre et à un grand nombre de variables, reproduirait et confirmerait égalemen formules que nous avons trouvées par des méthodes différentes.

[16.] PROPOSONS-NOUS maintenant l'équation à un nombre c conque de variables,

$$\nabla z = M,$$

dont le premier membre renferme z et ses différentielles partielle premier degré, multipliées par des constantes, et dont le second mer M est une fonction donnée des variables indépendantes.

Substituons à z, $Z + \xi$, on aura

$$\nabla Z + \nabla \xi = M.$$

On peut supposer $\nabla Z = 0$, et alors il suffira de trouver une va particulière de ξ qui satisfasse à $\nabla \xi = M$; l'intégrale de ∇Z devant fournir le nombre de fonctions arbitraires que comport proposée.

Supposons que $\nabla Z = 0$ soit intégrable en termes finis, d'après procédés exposés ci-dessus; l'équation $\nabla' Z = 0$, et par conséq l'expression $\nabla' \xi$ qui lui est semblable, seront décomposables en teurs du premier degré. Soient $\delta' z$, $\delta'_1 z$, $\delta'_2 z$, &c., les facteur premier degré de $\nabla' z$, les formes différentielles désignées par δ, δ_2, &c. qui leur correspondent, seront du premier ordre.

D'après la formule *(a)* de l'article [14], $\nabla \xi = M$ devient

$$\delta . \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots\ldots \delta_{m-1} \xi = M;$$

faisons

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \ldots\ldots \delta_{m-1} \xi = u, \quad \delta_2 . \delta_3 . \delta_4 \ldots\ldots \delta_{m-1} \xi = u_1,$$

$$\delta_3 \delta_4 \ldots \delta_{m-1} \xi = u_2, \quad \delta_4 . \delta_5 \ldots \delta_{m-1} \xi = u_3 \ldots \delta_{m-1} \xi = u_{m-2}$$

On aura le système des équations différentielles partielles du premier ordre,

$$\Delta u = M,\ \Delta u_1 = u,\ \Delta_1 u_2 = u_1,\ \Delta_2 u_3 = u_2 \ldots \Delta_{m-1}\xi = u_{m-2}.$$

Les méthodes ordinaires d'intégration des équations du premier ordre du premier degré et à coëfficiens constans, donneront facilement les intégrales complètes de ces équations, en les traitant successivement. On déduirait la valeur de u de la première, et on la substituerait dans la seconde; de celle-ci on déduirait la valeur de u_1 qu'on substituerait dans la troisième, et ainsi de suite. Il est évident que ces valeurs de u, u_1, u_2, &c. donnent les intégrales du premier, du second ordre, &c. de la proposée : et comme la première équation $\Delta u = M$ peut avoir m formes différentes, suivant que l'on emploie pour l'établir une quelconque des formes Δ, Δ_1, Δ_2 &c., on aurait m valeurs de u, et l'on en déduirait m intégrales de la proposée au premier ordre; on trouverait également $\frac{m.m-1}{2}$ intégrales au second ordre, &c.; enfin l'on parviendrait ainsi à l'intégrale complète de $\nabla\xi = M$. Mais il nous suffit de trouver une valeur particulière de ξ, et d'obtenir pour cela une valeur particulière de chacune des quantités u, u_1, u_2, u_3, $\ldots u_{m-2}$, dont la dernière conduira à déterminer ξ.

Prenons pour exemple l'équation du second ordre à quatre variables,

$$\nabla z = A\frac{d^2z}{dt^2} + B\frac{d^2z}{dx^2} + C\frac{d^2z}{dy^2} + D\frac{d^2z}{dt\,dx} + E\frac{d^2z}{dt\,dy} + F\frac{d^2z}{dx\,dy}$$
$$+ G\frac{dz}{dt} + H\frac{dz}{dx} + K\frac{dz}{dy} + Lz = M.$$

A, B, C, $D \ldots L$ étant des quantités constantes, et M une fonction de t, x, y.

En substituant $Z + \xi$ à z, l'on aura à chercher l'intégrale complète de

$$\nabla Z = A\frac{d^2Z}{dt^2} + B\frac{d^2Z}{dx^2} + C\frac{d^2Z}{dy^2} + D\frac{d^2Z}{dt\,dx} + E\frac{d^2Z}{dt\,dy} + F\frac{d^2Z}{dx\,dy}$$
$$+ G\frac{dZ}{dt} + H\frac{dZ}{dx} + K\frac{dZ}{dy} + LZ = 0,$$

et une valeur particulière qui satisfasse à

$$\nabla\xi = A\frac{d^2\xi}{dt^2} + B\frac{d^2\xi}{dx^2} + C\frac{d^2\xi}{dy^2} + D\frac{d^2\xi}{dt\,dx} + E\frac{d^2\xi}{dt\,dy} + F\frac{d^2\xi}{dx\,dy}$$
$$+ G\frac{d\xi}{dt} + H\frac{d\xi}{dx} + K\frac{d\xi}{dy} + L\xi = M.$$

L'intégrale complète de l'équation $\nabla Z = 0$ ne peut avoir lieu en termes finis que lorsqu'elle est décomposable en facteurs du premier degré après la transposition de ses indices de différenciation en exposans. On trouvera que, pour que cette décomposition puisse avoir lieu, il faut qu'il y ait entre les coëfficiens de l'équation les relations suivantes :

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 - DEF - 4ABC = 0,$$
$$AH^2 + BG^2 + LD^2 - DGH - 4ABL = 0,$$
$$AK^2 + CG^2 + LE^2 - EGK - 4ACL = 0,$$
$$BK^2 + CH^2 + LF^2 - PHK - 4BCL = 0,$$

dont trois quelconques comportent la quatrième.

Supposons que ces conditions soient remplies, et que les facteurs qui doivent alors exister, soient

$$g\frac{dZ}{dt} + h\frac{dZ}{dx} + k\frac{dZ}{dy} + lZ,\quad g_{,}\frac{dZ}{dt} + h_{,}\frac{dZ}{dx} + k_{,}\frac{dZ}{dy} + l_{,}Z;$$

d'après la formule générale donnée dans l'article [13], l'intégrale complète de l'équation $\nabla z = 0$ sera

$$Z = e^{-\frac{lt}{g}}\pi(gx - ht, gy - kt) + e^{-\frac{l,t}{g,}}\downarrow(g,x - h,t, g,y - k,t).$$

Dans le cas que nous considérons, l'expression $\nabla'\xi$ qui résulte de $\nabla\xi$, en changeant les indices en exposans, est également décomposable en facteurs du premier degré. Selon le procédé que nous avons indiqué, l'on posera donc les équations

$$g\frac{d\xi}{dt} + h\frac{d\xi}{dx} + k\frac{d\xi}{dy} + l\xi = u,\quad g_{,}\frac{du}{dt} + h_{,}\frac{du}{dx} + k_{,}\frac{du}{dy} + l_{,}u = M.$$

La méthode ordinaire d'intégration des équations du premier ordre,

donne la valeur particulière suivante de u, déduite de la dernière de ces deux équations :

$$u = e^{-\frac{l,t}{g,}} \int \frac{M}{g,} e^{\frac{l,t}{g,}} dt.$$

Le signe d'intégration est pris, en supposant qu'on a fait sortir les variables x et y de la fonction M, à l'aide des équations

$$g,x - h,t = a,, \quad g,y - k,t = b,,$$

et $a,$, $b,$ sont des constantes qu'on doit faire disparaître du résultat, en se servant des mêmes équations.

Lorsque l'on connaîtra u, la première des deux équations que nous avons établies, donne la valeur particulière suivante pour ξ,

$$\xi = e^{\frac{-lt}{g}} \int \frac{u}{g} e^{\frac{lt}{g}} dt.$$

Le signe d'intégration étant pris, en supposant qu'on a mis dans la valeur de u, pour x et y, leurs valeurs tirées des équations

$$gx - ht = a, \quad gy - kt = b;$$

après l'intégration, on fera disparaître les constantes a et b, en introduisant de nouveau les variables x et y.

L'intégrale complète de l'équation proposée $\nabla Z = M$, devant résulter de l'addition de l'intégrale de $\nabla Z = 0$, et d'une solution particulière de $\nabla \xi = M$, sera donc

$$Z = e^{-\frac{lt}{g}} \pi (gx - ht, gy - kt) + e^{-\frac{l,t}{g,}} \downarrow (g,x - h,t, g,y - k,t) + \frac{e^{-\frac{l}{g}} \int e^{\frac{(l-l,)t}{g \cdot g,}} dt \int M e^{\frac{l,t}{g,}} dt}{g \cdot g,}.$$

[17.] Considérons maintenant le cas où $\nabla Z = 0$ ne serait pas intégrable en termes finis : l'expression $\nabla' \xi$ alors n'est pas décomposable en facteurs du premier degré, et l'on ne peut ramener la recherche d'une valeur particulière de ξ, vérifiant l'équation $\nabla \xi = M$,

à la recherche des valeurs particulières d'une suite de quantités données par des équations du premier ordre. Cependant, en faisant usage de la décomposition indiquée dans la formule *(a)* de l'article [14], on pourrait encore parvenir à une valeur de ξ exprimée en série, et vérifiant l'équation $\nabla \xi = M$; mais on y parviendra d'une manière beaucoup plus simple par le procédé suivant, également établi sur les considérations exposées dans l'article [14].

En changeant un peu la forme de l'expression différentielle $\nabla \xi$, représentons l'équation qui nous occupe par

$$\xi + \nabla \xi = M.$$

Si l'on met pour ξ sous le signe ∇ sa valeur tirée de cette équation même, on a

$$\xi = M - \nabla M + \nabla \cdot \nabla \xi,$$

ou, en représentant $\nabla \cdot \nabla \xi$ par $\nabla^2 \xi$,

$$\xi = M - \nabla M + \nabla^2 \xi.$$

Poursuivons la même marche, et nous trouverons

$$\xi = M - \nabla M + \nabla^2 M - \nabla^3 M + \nabla^4 M - \nabla^5 M + \&c.$$

Transformons tous les indices différentiels en exposans, les caractéristiques qui affectent le signe ∇, d'après ce que nous avons dit précédemment, devront également se transformer en exposans; et si l'on représente par $\nabla' M$, ce qui devient l'expression ∇M par ce changement, on aura

$$\xi = (\nabla' M)^0 - (\nabla' M)^1 + (\nabla' M)^2 - (\nabla' M)^3 + (\nabla' M)^4 - (\nabla' M)^5 + \&c.,$$

ou, sous une forme plus simple,

$$\xi = \frac{1}{1 + \nabla' M}.$$

D'après cette formule, analogue aux symboles dont nous avons donné quelques exemples, la valeur de ξ en série, s'obtiendra en développant la quantité $\frac{1}{1 + \nabla' M}$ suivant les puissances entières et

positives de $\frac{dM}{dx}, \frac{dM}{dy}, \frac{dM}{dt}$, &c., et en changeant ensuite les exposans de ces quantités en indices de différenciation.

Supposons que l'équation proposée $\nabla z + z = M$, ne renferme que les trois variables z, x, y, et représentons par $\nabla'(\alpha, \beta)$, ce que devient $\nabla' M$, lorsque l'on change $\frac{dM}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}$ respectivement en α et β; faisons enfin

$$P = \frac{1}{1 + \nabla'(\alpha, \beta)},$$

la valeur de ξ, développée suivant les ordres différentiels ascendans de M, sera

$$\begin{aligned}
\xi = P M &+ \frac{dP}{d\alpha}\frac{dM}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3P}{d\alpha^3}\frac{d^3M}{dx^3} + \text{&c.} \\
&+ \frac{dP}{d\beta}\frac{dM}{dy} + \frac{2}{1.2}\frac{d^2P}{d\alpha d\beta}\frac{d^2M}{dx\,dy} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3P}{d\alpha^2 d\beta}\frac{d^3M}{dx^2 dy} + \text{&c.} \\
&+ \frac{1}{1.2}\frac{d^2P}{d^2\beta}\frac{d^2M}{dy^2} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3P}{d\alpha d\beta^2}\frac{d^3M}{dx\,dy^2} + \text{&c.} \\
&+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3P}{d^3\beta}\frac{d^3M}{dy^3} + \text{&c.} \\
&+ \text{&c.}
\end{aligned}$$

en supposant α et β nulles après les différenciations effectuées.

Il est évident que cette valeur de ξ sera terminée toutes les fois que M sera une fonction algébrique, rationnelle, et sans diviseurs variables, de x et de y; et que lorsque M sera composée de termes tels que $e^{\mu x + \nu y}$, la valeur de ξ sera composée d'un même nombre de termes tels que $e^{\mu x + \nu y} \frac{1}{1 + \nabla'(\mu, \nu)}$: mais, en général, la série précédente gardera sa forme infinie, à moins qu'on ne l'enveloppe sous des intégrales définies, ce qui est toujours possible, comme nous le verrons par la suite.

Le procédé que nous venons d'employer pour déduire cette valeur de ξ de l'équation $\nabla \xi = M$, peut servir également dans beaucoup de cas au retour des séries qui sont ordonnées suivant les ordres différentiels d'une fonction quelconque; car on doit remarquer que nous

n'avons pas eu besoin de supposer que $\nabla \xi$ fût une expression terminée.

[18.] Les méthodes que j'ai présentées jusqu'ici, ont pour but de développer les intégrales des équations différentielles partielles du premier degré, en séries ordonnées suivant les ordres différentiels des fonctions arbitraires que comportent ces intégrales ; elles s'appliquent particulièrement, comme nous l'avons vu dans l'article [5], aux équations dont les coëfficiens ne renferment qu'une seule variable indépendante, et à celles que l'on peut ramener à cette forme. En effet, elles réduisent la difficulté, dans ce cas, à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier degré.

Les équations du premier degré à coëfficiens constans de tous les ordres forment un cas particulier de celles que nous avons considérées. J'ai montré que l'on peut toujours parvenir à réduire leurs intégrales en séries, et même j'ai indiqué les cas où ces séries deviennent susceptibles d'être sommées immédiatement, et donnent ainsi l'intégrale sous forme finie : enfin, j'ai étendu ces recherches au cas où l'équation donnée contient, outre les différentielles partielles de la variable principale, multipliées par des constantes, un terme composé des variables indépendantes.

Je vais maintenant exposer les moyens d'envelopper sous des intégrales définies toutes les séries auxquelles je suis parvenu, et qui expriment des solutions d'équations différentielles partielles.

Soit d'abord la formule donnée dans l'article [5],

$$(B)\quad z = e^{ax}\left(W\pi x + \frac{dW}{da}\frac{d\pi x}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{da^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{da^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c.\right.$$

Nous ferons usage d'un procédé que quelques géomètres ont déjà employé pour obtenir les sommes de différentes séries.

Supposons

$$Z = W\pi x + \frac{dW}{da}\frac{d.\pi x}{dx} + \frac{1}{1.2}\frac{d^2W}{da^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{da^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4W}{da^4}\frac{d^4\pi x}{dx^4} + \&c.$$

et considérons les deux suites

$$(p)\ldots\ \pi x + \frac{d.\pi x}{dx}\,s + \frac{d^2\pi x}{dx^2}\,\frac{s^2}{1.2} + \frac{d^3\pi x}{dx^3}\,\frac{s^3}{1.2.3} + \frac{d^4\pi x}{dx^4}\,\frac{s^4}{1.2.3.4} + \&c. = \pi(x+s),$$

$$(q)\ldots\ W + \frac{dW}{d\alpha}\,\frac{1}{s} + \frac{d^2W}{d\alpha^2}\,\frac{1}{s^2} + \frac{d^3W}{d\alpha^3}\,\frac{1}{s^3} + \frac{d^4W}{d\alpha^4}\,\frac{1}{s^4} + \&c. = -se^{\alpha s}\int We^{-\alpha s}\,d\alpha.$$

Pour plus de facilité, nous représenterons la quantité $-se^{\alpha s}\int We^{-\alpha s}\,d\alpha$ par V.

Si l'on multiplie ces deux suites entre elles, le produit présentera premièrement les termes indépendans de s, et dont la somme formera évidemment la série Z; secondement les termes affectés de puissances entières, négatives ou positives, de s, et dont nous représenterons l'ensemble par (AS^m), m étant un nombre entier positif ou négatif. On aura donc

$$Z + (AS^m) = V\pi(x+s).$$

Pour faire évanouir le terme (AS^m), on substituera successivement, à la place de s, $e^{u\sqrt{(-1)}}$, et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$; et si l'on observe que $(Ae^{mu\sqrt{(-1)}}) + (Ae^{-mu\sqrt{(-1)}}) = [A(e^{mu\sqrt{(-1)}} + e^{-mu\sqrt{(-1)}})]$, on trouvera pour la somme des deux résultats,

$$2Z + [A(e^{mu\sqrt{(-1)}} + e^{-mu\sqrt{(-1)}})] = V_{,}\pi(x + e^{u\sqrt{(-1)}}) + V_{,,}\pi(x + e^{-u\sqrt{(-1)}}).$$

$V_{,}$ et $V_{,,}$ indiquant ce que devient la quantité V par les substitutions de $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$, à la place de s.

On prendra ensuite l'intégrale de cette dernière équation multipliée par du, entre les limites $u = 0$ et $u = \frac{\pi}{2}$, ou la demi-circonférence dont le rayon est un. On remarquera que $e^{mu\sqrt{(-1)}} + e^{-mu\sqrt{(-1)}} = 2\cos.(mu)$, et qu'entre les limites indiquées $\int 2\{A\cos. mu\}\,du = 0$;

m étant un nombre entier quelconque. Ainsi l'on obtiendra

$$\pi Z = \int du\,[V_{,}\pi(x + e^{u\sqrt{(-1)}}) + V_{,,}\pi(x + e^{-u\sqrt{(-1)}})].$$

La formule (B) deviendra donc

$$(\beta)\ldots z = \frac{e^{sx}}{\pi}\int du\,[V_{,}\pi(x + e^{u\sqrt{(-1)}}) + V_{,,}\pi(x + e^{-u\sqrt{(-1)}})].$$

Si au lieu de regarder Z comme résultante des deux séries (p) et (q), on l'eût conçue donnée par le produit des deux suivantes,

$$(p')\ldots \pi x + \frac{d.\pi x}{dx}\frac{1}{s} + \frac{d^2\pi x}{dx^2}\frac{1}{s^2} + \frac{d^3\pi x}{dx^3}\frac{1}{s^3} + \frac{d^4\pi x}{dx^4}\frac{1}{s^4}$$
$$+ \&c. = -se^{+sx}\int \pi x e^{-sx}dx,$$

$$(q')\ldots W + \frac{dW}{d\alpha}s + \frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{s^2}{1.2} + \frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{s^3}{1.2.3} + \frac{d^4W}{d\alpha^4}\frac{s^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \&c. = W_{(\alpha+s)},$$

en supposant que $W_{(\alpha+s)}$ soit ce que devient W, quand on y met pour α, $\alpha+s$.; il est évident qu'on serait parvenu au même résultat que celui qu'on obtiendrait en changeant dans la formule (β), x en α, πx en W_{α}, et réciproquement. Ainsi en faisant $-se^{sx}\int \pi x e^{-s\alpha}dx = \Omega(x)$, et représentant par $\Omega_{,}(x)$ et $\Omega_{,,}(x)$ ce que devient cette quantité lorsqu'on y change s en $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$, on trouvera

$$(\beta)\ldots z = \frac{e^{sx}}{\pi}\int du\,\{\Omega_{,}(x)\,W_{(\alpha-e^{u\sqrt{(-1)}})} + \Omega_{,,}(x)\,W_{(\alpha+e^{-u\sqrt{(-1)}})}\}.$$

On pourra employer arbitrairement celle de ces deux valeurs de z qui paraîtra se prêter plus facilement aux applications.

La même marche conduit également à envelopper, sous des intégrales définies, la série (C) de l'article [6],

$$(C)\ldots z = (p+qx)^{\alpha}\{W\pi x + \frac{p+qx}{1.q}\Delta_{\alpha}W\frac{d\pi x}{dx} + \frac{(p+qx)^2}{1.2.q^2}\Delta_{\alpha}W\frac{d^2\pi x}{dx^2}\frac{x}{1}$$
$$+ \&c.\} = (p+qx)^{\alpha}.Z.$$

On peut concevoir la quantité Z comme résultante des deux suites,

$$\pi x + s\frac{(p+qx)}{q}\frac{d\pi x}{dx} + \frac{s^2}{1.2}\frac{(p+qx)^2}{q^2}\frac{d^2\pi x}{dx^2} + \frac{s^3}{1.2.3}\frac{(p+qx)^3}{q^3}\frac{d^3\pi x}{dx^3} + \&c. = \pi\left(x + s\frac{(p+qx)}{q}\right),$$

$$W + \frac{1}{s}\Delta_\alpha W + \frac{1}{s^2}\Delta^2{}_\alpha W + \frac{1}{s^3}\Delta^3{}_\alpha W + \frac{1}{s^4}\Delta^4{}_\alpha W + \&c. = -s.(s+1)^\alpha\,\Sigma[W(s+1)^{-\alpha}].$$

Si on les multiplie, et que l'on exécute sur leur produit les opérations que nous avons faites sur le produit des séries (p) et (q), on arrivera absolument de la même manière au résultat suivant :

$$Z = \frac{(p+qx)^\alpha}{\pi}\int du\,\{V_{,}\pi[x + (\frac{p+qx}{q})e^{u\sqrt{(-1)}}] + V_{,,}\pi[x + (\frac{p+qx}{q})e^{-u\sqrt{(-1)}}]\}.$$

On pourrait adopter une autre décomposition pour la série qui forme le second membre de l'équation (c), comme nous l'avons indiqué précédemment pour la série (B); mais cette recherche devient plus compliquée, et d'ailleurs offre trop peu d'utilité pour que nous nous y arrêtions.

[19.] La méthode précédente peut être généralisée, et alors elle devient susceptible de s'appliquer aux séries qui s'ordonnent suivant les ordres des différentielles partielles d'une fonction de plusieurs variables. Considérons en effet la formule (B') donnée dans l'article [12];

$$(B')\quad \zeta = e^{\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}}\{W\pi(x,y) + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d\pi(x,y)}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi(x,y)}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi(x,y)}{dx^3} + \&c.$$
$$+ \frac{dW}{d\beta}\frac{d\pi(x,y)}{dy} + \frac{2}{2}\frac{d^2W}{d\alpha d\beta}\frac{d^2\pi(x,y)}{dxdy} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^2 d\beta}\frac{d^3\pi(x,y)}{dxdy} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{d^2\pi(x,y)}{dy^2} + \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha d\beta^2}\frac{d^3\pi(x,y)}{dxdy^2} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi(x,y)}{dy^3} + \&c.$$
$$+ \&c.\}$$

Nous désignerons par Z, la série qui, multipliée par $e^{\alpha x+\beta y}$, forme le second membre de cette équation, et nous poserons les deux suites,

$$(p')\ \left\{\begin{array}{l}\pi(x,y)+\dfrac{d\pi(x,y)}{dx}\,s+\dfrac{d^2\pi(x,y)}{dx^2}\,\dfrac{s^2}{2}+\&c.\ldots\ldots\\ +\dfrac{d\pi(x,y)}{dx}\,r+\dfrac{d^2\pi(x,y)}{dxdy}\,\dfrac{2.sr}{2}+\&c.\ldots\ldots\\ +\dfrac{d^2\pi(x,y)}{dxdy}\,\dfrac{r^2}{2}+\&c.\ldots\ldots\end{array}\right\}=\pi(x+r,y+s);$$

$$(q')\ \left\{\begin{array}{l}W+\dfrac{dW}{d\alpha}\,\dfrac{1}{s}+\dfrac{d^2W}{d\alpha^2}\,\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{d^3W}{d\alpha^3}\,\dfrac{1}{s^3}+\&c.\\ +\dfrac{dW}{d\beta}\,\dfrac{1}{r}+\dfrac{d^2W}{d\alpha d\beta}\,\dfrac{1}{sr}+\dfrac{d^3W}{d\alpha^2 d\beta}\,\dfrac{1}{s^2r}+\&c.\\ +\dfrac{d^2W}{d\beta^2}\,\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{d^3W}{d\alpha d\beta^2}\,\dfrac{1}{sr^2}+\&c.\\ +\dfrac{d^3W}{d\beta^3}\,\dfrac{1}{r^3}+\&c.\end{array}\right\}=rse^{\alpha x+\beta r}\iint d\beta d\alpha\, W e^{-\alpha s-\beta r}=V.$$

Le produit des deux suites précédentes offrira des termes indépendans des quantités s et t, et dont la somme reproduira la série Z; puis des termes affectés les uns des puissances de s, les autres des puissances de r, et d'autres enfin des puissances de r et de s. Nous indiquerons la collection de ces derniers termes respectivement par (As^m), (Br^n), $(Cs^p r^q)$, m, n, p, q étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et nous aurons l'équation

$$Z+(As^m)+(Br^n)+(Cs^p r^q)=V.\pi(x+s,y+r).$$

On fera d'abord évanouir les puissances de s, renfermées dans le premier membre de cette équation, en substituant successivement à cette quantité $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$; puis en ajoutant les deux résultats, et prenant leur intégrale entre les limites $u=0$ et $u=\frac{\pi}{2}$, on aura alors

$$\pi Z+\pi(Br^n)=\int du\,[V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}},y+r)+V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}},y+r)],$$

$V_{,}$ et $V_{,,}$ désignant ce que devient la quantité V après les substitutions indiquées.

Mettons ensuite dans cette dernière équation, à la place de r

successivement $e^{nv\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-nv\sqrt{(-1)}}$; et supposons ${}_{,}V_{,}$ et ${}_{,}V_{,,}$ égales à ce que deviennent $V_{,}$ et $V_{,,}$ par la première substitution, ${}_{,,}V_{,}$ et ${}_{,,}V_{,,}$ égales à ce que deviennent $V_{,}$ et $V_{,,}$ par la seconde substitution ; ces résultats donneront

$$2\pi Z + \pi[B(e^{nv\sqrt{(-1)}} + e^{-nv\sqrt{(-1)}}.)] =$$
$$+\int du[{}_{,}V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}}, y+e^{v\sqrt{(-1)}}) + {}_{,}V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}}, y+e^{v\sqrt{(-1)}}) + {}_{,,}V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}}, y+e^{-v\sqrt{(-1)}}) + {}_{,,}V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}}, y+e^{-v\sqrt{(-1)}})].$$

On prendra l'intégrale de cette dernière équation multipliée par dr, et entre les limites $v=0$ et $v=\frac{\pi}{2}$; ce qui rend nulle $\int[B(e^{nv\sqrt{(-1)}} + e^{-nv\sqrt{(-1)}})]\,dv = \int 2(\beta \cos. nv)\,dv$. On aura ainsi la valeur de Z exprimée par des intégrales définies, et l'équation (B'), après qu'on y aura transporté la valeur trouvée pour Z, deviendra

$$(\beta'')\ z = \frac{e^{ax+by}}{\pi^2} - \iint du\,d[uV_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}}, y+e^{v\sqrt{(-1)}}) + {}_{,}V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}}, y+e^{u\sqrt{(-1)}}) + {}_{,,}V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}}, y+e^{-v\sqrt{(-1)}}) + {}_{,,}V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}}, y+e^{-v\sqrt{(-1)}})].$$

Il est aisé de voir que l'on arriverait absolument de la même manière à une autre formule, analogue à la formule $(\beta_{,,})$ de l'article précédent, en regardant la série Z comme résultante des deux suites qui remplaceraient (p') et (q'), si l'on changeait dans ces dernières $\pi(x, y)$ en W, x en α, y en β, et réciproquement.

[20.] Nous n'avons considéré jusqu'ici que les séries ordonnées suivant les ordres des différentielles d'une fonction d'une ou de deux quantités, et qui se rapportent aux intégrales des équations à trois ou quatre variables. Dans le cas où les séries proposées renfermeraient des fonctions d'au moins trois quantités, c'est-à-dire, représenteraient les intégrales d'équations à plus de quatre variables, on parviendrait, par une marche uniforme, à des résultats analogues. Nous nous contenterons

d'exposer la valeur que l'on trouverait à l'aide des intégrales définies, pour la variable principale d'une équation différentielle partielle à cinq variables du premier degré, en supposant que l'on ait le développement de cette valeur en une série, dont le terme général serait

$$e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}\frac{1}{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i'.1.2.3\ldots i''}\frac{d^{i+i'+i''}W}{d\alpha^{i}.d\beta^{i'}d\gamma^{i''}}d^{i+i'+i''}\frac{\pi(x,y,t)}{dx^{i}dy^{i'}dt^{i''}}.$$

Supposons

$$V=-rsqe^{\alpha s+\beta r+\gamma q}\iiint d\alpha.d\beta.d\gamma We^{-\alpha s-\beta r-\gamma q}).$$

Que l'on mette dans V successivement, pour s, $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$, en indiquant les résultats par $V_{,}$ et $V_{,,}$, pour r, $e^{v\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-v\sqrt{(-1)}}$, en indiquant les résultats par ${}_{,}V$ et ${}_{,,}V$, et enfin pour q, $e^{w\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-w\sqrt{(-1)}}$, en indiquant les résultats par ${}'V$ et ${}''V$; on aura

$$(\beta'')\quad z=e^{\frac{e^{ax+by+cz}}{\pi^{3}}}\iiint dudvdw\big[{}''V\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}},y+e^{v\sqrt{(-1)}},t+e^{w\sqrt{(-1)}}$$
$$+{}_{,}V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}},y+e^{v\sqrt{(-1)}},t+e^{-w\sqrt{(-1)}})$$
$$+{}'V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}},y+e^{-v\sqrt{(-1)}},t+e^{w\sqrt{(-1)}})$$
$$+{}_{,,}V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}},y+e^{-v\sqrt{(-1)}},t+e^{-w\sqrt{(-1)}})$$
$$+{}'V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}},y+e^{v\sqrt{(-1)}},t+e^{w\sqrt{(-1)}})$$
$$+{}_{,,}V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}},y+e^{-v\sqrt{(-1)}},t+e^{w\sqrt{(-1)}})$$
$$+{}''V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}},y+e^{-v\sqrt{(-1)}},t+e^{-w\sqrt{(-1)}})\big].$$

Cette expression représente la somme de la série dont nous avons donné le terme général. Si l'équation proposée est du degré m, l'on pourra en général y satisfaire par m séries semblables, pour lesquelles la quantité W, qui est une fonction d'une des variables indépendantes et des indéterminés α, β et γ, prendra des valeurs différentes; on en déduira m expressions semblables à (β''), dont la somme formera l'intégrale complète de la proposée.

Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches, pour lesquelles les calculs deviennent plus longs, sans devenir plus difficiles. D'ailleurs ce qui précède suffit pour rendre sensible la loi qui lie entre elles les

formules (β), (β') et (β''), et l'on pourrait évidemment écrire, sans en faire les calculs, les formules qui se rapporteraient aux intégrales des équations à un plus grand nombre de variables.

Les séries exposées dans l'article [15] pour exprimer la valeur de $\frac{d^n z}{dy^n}$, quelle que soit n; celles qui donnent la valeur de ξ vérifiant l'équation $\xi + \nabla\xi = M$, article [17], sont absolument semblables à celles que nous venons de sommer à l'aide des intégrales définies, dans ces derniers articles, et les formules que nous avons trouvées s'y appliquent sans aucune difficulté.

[21.] Nous allons donner quelques applications des recherches précédentes, et nous proposer d'abord l'équation générale du premier degré, du troisième ordre, à trois variables, que l'on n'a point encore tenté, je crois, de résoudre par des intégrales définies,

$$\nabla z = A\frac{d^3z}{dx^3} + B\frac{d^3z}{dx^2dy} + C\frac{d^3z}{dxdy^2} + D\frac{d^3z}{dy^3} + E\frac{d^2z}{dx^2} + F\frac{d^2z}{dxdy} + G\frac{d^2z}{dy^2} + H\frac{dz}{dx} + K\frac{dz}{dy} + Lz = 0.$$

Supposons que les coëfficiens ne renferment pas la variable x, et l'on aura pour déterminer W, d'après la méthode exposée dans l'article [5], l'équation linéaire aux différentielles ordinaires,

$$\nabla'(\alpha, W) = A\alpha^3 W + B\alpha^2\frac{dW}{dy} + C\alpha\frac{d^2W}{dy^2} + D\frac{d^3W}{dy^3} + E\alpha^2 W + \alpha F\frac{dW}{dy} + G\frac{d^2W}{dy^2} + H\alpha W + K\frac{dW}{dy} + LW = 0.$$

On aura l'intégrale de cette équation, lorsque l'on connaîtra trois valeurs particulières de W qui la vérifient. Représentons ces trois valeurs, supposées connues, par W, W' et W''; la formule (B) donnera l'intégrale en séries de l'équation proposée, en y plaçant successivement W, W' et W'', et prenant la somme des résultats.

Nous avons vu, article [18], que $V = -se^{\alpha s}\int We^{-\alpha s}d\alpha$, des trois valeurs de W, on en déduira donc trois valeurs de V, que nous

désignerons par V, V', V'', et l'on formera ensuite par les substitutions de $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et de $e^{-u\sqrt{(-1)}}$ à la place de s, les quantités $V_{,}$ et $V'_{,}$ et $V''_{,}$, $V'_{,}$ et $V''_{,}$. Ces différentes valeurs portées dans la formule (β) donneront trois résultats, qui, pris avec des fonctions arbitraires distinctes π, $\downarrow$ et Φ, formeront par leur somme l'intégrale complète de l'équation proposée,

$$\zeta = \frac{e^{ax}}{\pi}\int du\,[V_{,}\pi(x+e^{u\sqrt{(-1)}}(+V_{,,}\pi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}})$$
$$+V'_{,}\downarrow(x+e^{u\sqrt{(-1)}})+V'_{,,}\downarrow(x+e^{-u\sqrt{(-1)}})+V''_{,}\Phi(x+e^{u\sqrt{(-1)}})$$
$$+V''_{,,}\Phi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}})\,].$$

On serait arrivé pour ζ, à une expression d'une autre forme, si, au lieu de la formule (β), on eût employé la formule (β') du même article.

On voit que la seule difficulté du problème se trouve dans l'intégration de l'équation différentielle ordinaire $\nabla'(\alpha, W) = 0$, que l'on ne sait résoudre en général que lorsque les coëfficiens sont constans.

[22.] PRENONS en second lieu l'équation

$$gh\frac{d^2\zeta}{dy^2} + g\sin.\lambda\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

qui renferme la théorie de la propagation du son, suivant une ligne formant l'angle λ avec l'horizon. (*Voyez* la Mécanique analytique.) Cette équation n'est pas intégrable en termes finis; et, en effet, si l'on change les indices différentiels en exposans, l'expression

$$gh\frac{d\zeta^2}{dx^2} + g\sin.\lambda\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\zeta^2}{dt^2} = 0,$$

n'est pas décomposable en facteurs du premier degré. On peut cependant remarquer que si l'on suppose à-peu-près horizontale la ligne selon laquelle le son se propage, sin. λ sera une quantité très-petite, dont on pourra négliger le carré et les puissances supérieures. Cette circonstance rend l'équation précédente susceptible d'être décomposée en deux facteurs du premier degré, exacts aux quantités près de l'ordre λ^2,

et l'on en déduit pour l'intégrale complète de la proposée,

$$z = e^{\frac{-t\sin.\lambda}{2}\frac{\sqrt{(g)}}{h}}\varphi[x - t\sqrt{(hg)}] + e^{\frac{t\sin.\lambda}{2}\frac{\sqrt{g)}}{h}}\downarrow[x + t\sqrt{(hg)}].$$

Cette intégrale, vérifiée *à posteriori*, se trouvera exacte aux quantités près de l'ordre λ^2.

Mais, en général, l'intégrale ne peut s'obtenir qu'en séries ou par intégrales définies. On parviendra facilement à l'intégrale en séries, en mettant dans l'équation *(B)*, article [5], pour W successivement les valeurs

$$W = e^{-t\sqrt{(gh\alpha^2 + g\sin.\lambda\alpha)}}, \quad W' = e^{-t\sqrt{(gh\alpha^2 + g\sin.\lambda\alpha)}}.$$

Nous ferons usage ensuite de la seconde méthode indiquée dans l'article [13], pour envelopper les résultats sous des intégrales définies. A cet effet, on doit former d'abord les quantités

$$\Omega(x) = -se^{xs}\int e^{-xs}\pi(x)\,dx, \quad \Omega'(x) = -se^{+xs}\int e^{-xs}\downarrow(x)\,dx;$$

$\pi(x)$ et $\downarrow(x)$ étant les deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale de la proposée; puis, par les substitutions convenables de $e^{u\sqrt{(-1)}}$ et $e^{-u\sqrt{(-1)}}$ à la place de s, on obtiendra les quantités représentées par $\Omega_{,}(x)$ et $\Omega_{,,}(x)$, $\Omega'_{,}(x)$ et $\Omega'_{,,}(x)$. En portant enfin ces quantités dans la formule $(\beta_{,})$ de l'article cité, et faisant, pour plus de simplicité, α nulle, on aura

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{\pi}\int du\,\{ & e^{t\sqrt{[ghe^{2u\sqrt{(-1)}} + g\sin.\lambda e^{u\sqrt{(-1)}}]}}.\Omega_{,}(x) \\ & + e^{t\sqrt{[ghe^{-2u\sqrt{(-1)}} + g\sin.\lambda e^{-u\sqrt{(-1)}}]}}.\Omega_{,,}(x) \\ & + e^{-t\sqrt{[ghe^{2u\sqrt{(-1)}} + g\sin.\lambda e^{u\sqrt{(-1)}}]}}.\Omega'_{,}(x) \\ & + e^{-t\sqrt{[ghe^{-2u\sqrt{(-1)}} + g\sin.\lambda e^{-u\sqrt{(-1)}}]}}.\Omega'_{,,}(x)\,\}. \end{aligned}$$

On doit observer que ce dernier résultat ne renferme qu'une seule variable auxiliaire u, et une seule intégrale définie, puisque $\Omega(x)$ ne renferme qu'une intégration indéfinie, prise par rapport à l'une des variables même de l'équation.

[23.] Les procédés que nous venons d'exposer, s'appliquent généralement à toutes les séries que nous avons considérées dans le cours de ce Mémoire, et conduisent par conséquent à exprimer, à l'aide des intégrales définies, les intégrales de toutes les équations que l'on peut traiter par les méthodes que nous avons exposées précédemment. Mais on peut sans doute obtenir le même résultat par plusieurs autres méthodes, et même il est aisé de voir qu'on doit en général y parvenir d'une infinité de manières différentes.

En effet, quelques géomètres, qui ont déjà employé les intégrales définies à la recherche des intégrales des équations différentielles partielles, ont trouvé pour des équations auxquelles s'appliquent les méthodes précédentes, des résultats d'une autre forme. M. *Laplace* a donné dans les Mémoires de l'Académie des sciences de l'année 1779, une méthode qui conduit à exprimer par des intégrales définies, la série qui représente l'intégrale d'une équation linéaire du second ordre, lorsque cette série est ordonnée suivant les ordres différentiels négatifs, ou, ce qui revient au même, suivant les intégrales successives de la fonction arbitraire qu'elle renferme ; et les résultats qu'il obtient, diffèrent aussi par leurs formes, de ceux que présentent les méthodes que nous avons exposées.

On a déjà remarqué que les séries que nous avons enveloppées sous des intégrales définies, pouvaient être décomposées de deux manières, et que l'on arrivait ainsi à deux résultats de formes différentes, comme on peut le voir par les exemples donnés dans les articles [21] et [22]. On pourrait encore varier les résultats, en variant les formes des séries que l'on considère, ou même en opérant divers changemens dans les équations différentielles dont elles dérivent, soit par la substitution de nouvelles variables à la place de celles qu'elles contiennent, soit par d'autres procédés qu'il est peu important de détailler.

Nous nous arrêterons cependant aux deux observations suivantes, qui peuvent conduire souvent à des résultats assez simples.

Soit l'équation

$$(\beta)\ldots z = e^{\alpha x}\left(W\pi x + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d\pi(x)}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2.3}\frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi(x)}{dx^3} + \&c.\right).$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$\pi(x) = \int e^{px}\Phi(p),$$

p étant une quantité indéterminée indépendante de x, et Φ une fonction arbitraire; la valeur précédente de z deviendra

$$z = e^{\alpha x}\int dp\,.\,\Phi p e^{px}\left(W + \frac{dW}{d\alpha}p + \frac{d^2W}{d\alpha^2}\frac{p^2}{2} + \frac{d^3W}{d\alpha^3}\frac{p^3}{2.3} + \&c.\right).$$

Si l'on fait α nulle, et que l'on représente par (W) ce que devient W lorsque l'on y change α en p, on aura

$$z = \int (W) e^{px}\Phi p\,dp,$$

expression de même genre que celle que nous avons désignée par $\int e^{\alpha x+\beta y}\Phi\,ada$ dans l'article [11] de ce Mémoire.

Lorsque la forme de la fonction $\pi(x)$ sera connue, on déterminera la forme de $\Phi(p)$ et les limites entre lesquelles devra se faire l'intégration relative à p, par la condition de satisfaire, quelle que soit x, à l'équation $\pi x = \int e^{px}\Phi p\,dp$; problème assez difficile, et pour lequel l'analyse ne paraît pas offrir de méthode générale.

En second lieu, supposons que l'on parvienne à exprimer W par une intégrale définie, de manière que l'on ait

$$W = \int e^{\alpha P}\,Q\,dp,$$

P et Q étant des quantités indépendantes de α, mais qui contiennent les variables de l'équation et la variable auxiliaire p.

L'équation (β) devient alors

$$z = e^{\alpha x}\int e^{\alpha P}\,Q\,dp\left\{\pi(x) + \frac{d\pi(x)}{dx}p + \frac{d^2\pi(x)}{dx^2}\frac{p^2}{1.2} \ldots\ldots + \frac{d^3\pi(x)}{dx^3}\frac{p^3}{1.2.3} + \&c.\right\},$$

et, en faisant α nulle, la valeur de z peut être mise sous la fc

$$z = \int Q.\pi(x + P)\,dp.$$

La principale difficulté consiste à obtenir W sous la forme $\int e^{\alpha P}$

[24.] POUR montrer, par un exemple, l'usage de cette d formule, considérons l'équation

$$(m) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} - g.d\frac{(l-y)\frac{dz}{dy}}{dy} = 0.$$

En supposant que t représente le temps, y une abscisse vertica une ordonnée horizontale, et g la gravité, cette équation est la que celle donnée par M. *Lagrange* dans la Mécanique analytique déterminer le mouvement d'une chaîne vibrante, uniformément é fixée par son extrémité supérieure, libre par son extrémité infé et dont la longueur serait exprimée par l.

On satisfera à l'équation m par la série

$$(a) \quad z = e^{at}\left\{W\pi t + \frac{dW}{da}\frac{d\pi t}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2 W}{da^2}\frac{d^2\pi t}{dt^2} + \&\right.$$

La quantité W étant déterminée par l'équation,

$$\frac{a^2 W}{g} - d\frac{(l-y)\frac{dW}{dy}}{dy} = 0.$$

De cette dernière on déduit

$$W = 1 + \frac{a^2}{g}\frac{l-y}{1.1} + \frac{a^4}{g^2}\frac{(l-y)^2}{1.2.1.2} + \frac{a^6}{g^3}\frac{(l-y)^3}{1.2.3.1.2.3} +$$

et cette valeur de W peut être exprimée, à l'aide d'intégrales défini

$$W = \frac{2}{\pi}\int e^{2a\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}\cos.u}\,du,$$

l'intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \frac{\pi}{2}$, ou la circonférence; la série (a) devient donc

$$z = \frac{2}{\pi}\int du\, e^{2a\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}\cos.u + at}\left\{\pi t + 2\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}\cos.u\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[2\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}\cos.u\right]^2\frac{d^2\pi t}{dt^2} + \&c.\right\}.$$

et peut être mise sous la forme,

$$z = \frac{2}{\pi}\int du\, e^{2au}\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}.\cos.u + at\,\pi\left[t + 2\sqrt{\left(\frac{l-y}{g}\right)}\cos.u\right],$$

ou, plus simplement, sous la suivante, en changeant, d'une manière convenable, la forme de la fonction arbitraire, et faisant $a = 0$,

$$z = \frac{2}{\pi}\int du\,\pi[t\sqrt{g} + 2\sqrt{(l-y)}.\cos.u].$$

Cette expression vérifiant l'équation m, on trouvera que l'expression suivante la vérifierait également,

$$z = \frac{2}{\pi}\int du\,\downarrow[-t\sqrt{g} + 2\sqrt{(l-y)}\cos.u].$$

La somme de ces deux résultats donnera pour l'intégrale générale de l'équation proposée,

$$z = \frac{2}{\pi}\int du\,\{\pi[2\sqrt{(l-y)}.\cos.u + t\sqrt{(g)}] + \downarrow[2\sqrt{(l-y)}\cos.u - t\sqrt{(g)}]\},$$

l'intégration par rapport à u devant s'effectuer entre les limites $u = 0$ et $u = \frac{\pi}{2}$.

Mon but principal dans ce Mémoire, a été de résoudre les équations différentielles partielles linéaires par des séries que l'on pût facilement envelopper sous des intégrales définies; j'y parviens dans un grand nombre de cas, et particulièrement lorsque les coëfficiens de l'équation différentielle proposée ne renferment qu'une seule des variables indépendantes. En considérant spécialement les équations à coëfficiens constans, lors même qu'elles comprennent un terme indépendant de la variable principale, et composé des autres variables d'une manière quelconque, je démontre que les suites qui représentent leurs intégrales, peuvent être sommées, et donner immédiatement les intégrales sous forme finie, lorsqu'en changeant dans les équations proposées les indices différentiels en exposans, ces équations sont décomposables en facteurs du premier degré, par rapport aux différentielles partielles du premier ordre de la

variable principale ; et lorsque cette condition n'a pas lieu, les séries dont il s'agit peuvent toujours être enveloppées sous des intégrales définies.

Mais l'on doit regarder aussi ces résultats comme des applications des méthodes que j'ai exposées dans les articles [1], [3], [14] et [17], lesquelles peuvent, je crois, être utilement employées dans d'autres recherches analytiques.

ADDITION au Mémoire précédent sur l'intégration des Équations différentielles partielles (18 juillet 1807).

DEPUIS l'époque déjà éloignée où ce Mémoire a été composé, j'ai étendu les résultats qu'il renferme, et j'en ai obtenu de nouveaux, en faisant usage de la méthode suivante.

[1.] SOIT l'équation de l'ordre m entre trois variables z, x et y,

$$A z + B\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy} + D\frac{d^2z}{dx^2} + E\frac{d^2z}{dx\,dy} + F\frac{d^2z}{dy^2} + G\frac{d^3z}{dx^3} + H\frac{d^3z}{dx^2dy} + I\frac{d^3z}{dx\,dy^2} + K\frac{d^3z}{dy^3} + L\frac{d^4z}{dx^4} + \&c. = 0,$$

contenant, au premier degré dans tous ses termes, la variable z ou ses différentielles partielles, et A, B, C, D, &c. étant des quantités données d'une manière quelconque en x et y. Nous représenterons à l'ordinaire cette équation par $\nabla(z) = 0$.

Supposons que l'intégrale soit développée en série, telle que

$$z = V\pi u + V_{,}\frac{d\pi u}{du} + V_{,,}\frac{d^2\pi u}{du^2} + V_{,,,}\frac{d^3\pi u}{du^3} \&c.,$$

u étant composée des variables indépendantes x et y, et πu étant la fonction arbitraire que comporte l'intégrale.

Comme V, $V_{,}$, $V_{,,}$ &c. sont indépendantes de la forme de la fonction πu, on peut particulariser cette fonction et la supposer égale à $e^{\alpha u}$,

la valeur de z devient alors

$$z = e^{\alpha u}(V + V_{,}\alpha + V_{,,}\alpha^2 + V_{,,,}\alpha^3 + \&c.);$$

ce qui conduit à supposer $z = e^{\alpha u} W$, W étant une quantité qui, développée suivant les puissances de α, donnera $V = W$, $V_{,} = \frac{dW}{d\alpha}$, $V_{,,} = \frac{1}{2}\frac{d^2 W}{d\alpha^2}$, &c. en faisant α nulle dans W après les différenciations.

En mettant $z = e^{\alpha u} W$ dans l'équation $\nabla(z) = 0$, et remarquant que, puisque $e^{\alpha u}$ n'entre qu'au premier degré dans $\nabla(e^{\alpha u} W)$, le résultat est divisible par $e^{\alpha u}$, on aura pour déterminer W une équation de l'ordre m, linéaire, aux différentielles partielles, que nous représentons par $\nabla_{,}(W) = 0$, et qu'il suffit de vérifier, par une valeur particulière de W.

La quantité W étant connue, on en déduira les valeurs de V, $V_{,}$, $V_{,,}$ &c., et l'on aura

$$(B)\quad z = W\pi u + \frac{dW}{d\alpha}\frac{d\pi u}{du} + \frac{1}{2}\frac{d^2 W}{d\alpha^2}\frac{d^2\pi u}{du^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3 W}{d\alpha^3}\frac{d^3\pi u}{du^3} + \&c.$$

Cette série coïncide avec la série *(B)* de l'article [5] du Mémoire précédent, en faisant dans cette dernière α nulle, comme nous avons démontré qu'il était permis de le faire sans diminuer la généralité de l'intégrale, et en donnant dans la série que nous trouvons actuellement, à u la valeur particulière x.

Dans ce même article du Mémoire cité, nous avons supposé que l'équation $\nabla z = 0$ ne renfermait que des coëfficiens A, B, C, &c. fonctions de la seule variable y. Dans ce cas, l'équation $V_{,} W = 0$, à laquelle nous parvenons maintenant, peut se réduire à une équation différentielle ordinaire à deux variables; et si ces mêmes coëfficiens étaient constans, on pourrait régarder $\nabla_{,} W$ comme étant à coëfficiens constans, et en tirer facilement la valeur de W: mais en général, on a à chercher une quantité qui vérifie l'équation linéaire à différentielles partielles de l'ordre m, $\nabla_{,} W = 0$, et quoique ce problème soit d'un ordre de difficulté inférieur à l'intégration directe de l'équation $\nabla z = 0$, l'analyse n'offre cependant pas encore de méthode générale pour le résoudre.

en déduit m valeurs de W qui ...
en les employant successivement on formera m ...
dont la somme sera l'intégrale complète de la proposée, renfe...
fonctions arbitraires.

Il faut observer que si l'une des valeurs de W que l'on se propose d'employer était de la forme $e^{-\alpha u} T$, T étant indépendante de α, on n'en pourrait déduire aucun résultat; en effet, dans ce cas les quantités W, $\frac{dW}{d\alpha}$, $\frac{d^2 W}{d\alpha^2}$, &c., deviendraient T, $-uT$, $u^2 T$, $-u^3 T$, &c., et la série *(B)* se changerait en

$$z = T\left(\pi u - u\frac{d\pi u}{du} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2\pi u}{du^2} - \frac{u^3}{2.3}\frac{d^3\pi u}{du^3} + \text{&c.}\right),$$

ce qui se réduirait à $T\pi(u-u)$, ou à T multipliée par une constante; la fonction arbitraire s'évanouirait donc, et l'on n'aurait qu'une valeur particulière de z, à moins que cette fonction arbitraire n'entrât dans T, ce qui exigerait qu'on ne se fût pas tenu à prendre pour W une simple valeur particulière vérifiant l'équation $\nabla_1 W = 0$.

Si l'on différencie la valeur de z donnée par la série *(B)*, relativement à x, par exemple, on trouvera pour $\frac{dz}{dx}$ la valeur que prendrait z, en changeant W en $\frac{dW}{dx} + \alpha W \frac{du}{dx}$, et en supposant toujours également α nulle dans les différens termes du développement après les différenciations effectuées. De même, en faisant $\frac{dW}{dx} + \alpha W \frac{du}{dx}$ égale à W', on aura pour $\frac{d^2 z}{dx^2}$ la valeur que prendrait z, en changeant W en $\frac{dW'}{dx} + \alpha W' \frac{du}{dx}$, et posant toujours α nulle après les différenciations; il en serait de même en continuant. Pareillement, la différence $\frac{dz}{dy}$ est égale à ce que devient z, en changeant dans la série *(B)* W en $\frac{dW}{dy} + \alpha W \frac{du}{dy}$, et ainsi de suite. D'après ces remarques, on peut facilement vérifier que l'intégrale *(B)* de l'équation $\nabla z = 0$

effet la résoudre, si la valeur particulière $z = e^{\alpha u} W$ satisfait à cette même équation.

[2.] La série *(B)* qui représente une partie de l'intégrale complète de la proposée $\nabla z = 0$, peut être transformée d'une infinité de manières, sans perdre rien de sa généralité.

En effet, étant donnée l'équation $z = e^{\alpha u} W$, de laquelle se déduit l'intégrale *(B)*, il est aisé de voir que le procédé employé consiste uniquement à développer W suivant les puissances de α, puis à changer dans le développement chaque terme, tel que $e^{\alpha u} \frac{d^n W}{d\alpha^n} \alpha^n$, en $\frac{d^n W}{d\alpha^n} \frac{d^n \pi(u)}{du^n}$.

Si donc l'on développe W suivant les puissances d'une quantité β, que l'on puisse concevoir ordonnée elle-même suivant les puissances de α, à chaque terme du développement, tel que $e^{\alpha u} \frac{d^n W}{d\beta^n} \beta^n$, correspondra une expression différentielle linéaire, formée en changeant dans $e^{\alpha u} \beta^n$ chaque terme $e^{\alpha u} \alpha^i$ en $\frac{d^i \pi(u)}{du^i}$.

Soit donc

$$z = e^{\alpha u} \left(W + \frac{dW}{d\beta} \beta + \frac{1}{2} \frac{d^2 W}{d\beta^2} \beta^2 + \frac{1}{2.3} \frac{d^3 W}{d\beta^3} \beta^3 + \&c. \right);$$

β devant être supposée nulle dans les coëfficiens W, $\frac{dW}{d\beta}$, $\frac{d^2 W}{d\beta^2}$ &c.; après les différenciations.

Si l'on représente par $\Theta(\pi u)$ une expression différentielle, formée en mettant dans le développement de β suivant les puissances de α, à la place de α, $\frac{d.\pi u}{du}$, et en changeant ensuite les exposans de puissance en indices différentiels, ce qui suppose que $\frac{d\pi u^0}{du^0}$ devient πu; que l'on représente également par $\Theta^2(\pi u)$ une expression différentielle formée de la même manière, par rapport à β^2, et ainsi de suite,

on aura la formule générale pour les transformations de l'intégrale *(B)*,

$$(C)\ \zeta = W\pi u + \frac{dW}{d\beta}\Theta(\pi u) + \frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{\Theta^2(\pi u)}{1.2} + \frac{d^3W}{d\beta^3}\frac{\Theta^3(\pi u)}{1.2.3} + \&c.$$

Pour donner quelques exemples de semblables transformations, prenons d'abord $\beta = e^{f\alpha} - 1$, f étant une quantité indépendante de α, on aura en développant

$$\beta = f\alpha + \frac{f^2\alpha^2}{2} + \frac{f^3\alpha^3}{2.3} + \frac{f^4\alpha^4}{2.3.4} + \&c.,$$

et par conséquent

$$\Theta(\pi u) = f\frac{d\pi u}{du} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2\pi u}{du^2} + \frac{f^3}{2.3}\frac{d^3\pi u}{du^3} + \frac{f^4}{2.3.4}\frac{d^4\pi u}{du^4} + \&c.,$$

ou $\Theta(\pi u) = \pi(u+f) - \pi u$, expression qu'on peut représenter par $\Delta(\pi u)$, Δ indiquant une différence finie prise en supposant que u varie de la quantité f: on aura de même $\Theta^2\pi u = \Delta^2\pi u$, et ainsi de suite; par conséquent la valeur de ζ deviendra

$$(D)\ \zeta = W\pi(u) + \frac{dW}{d\beta}\Delta(\pi u) + \frac{d^2W}{d\beta^2}\frac{\Delta^2\pi u}{1.2} + \frac{d^3W}{d\beta^3}\frac{\Delta^3\pi u}{1.2.3} + \&c.$$

Ce développement de l'intégrale offre cette particularité remarquable, que la fonction arbitraire n'y entre pas sous des signes différentiels, mais seulement sous des signes de différences finies.

Prenons en second lieu,

$$\beta = (g - \alpha)^n,$$

n et g étant des quantités indépendantes de α, on aura en développant

$$\beta = g^n - n g^{n-1}\alpha + \frac{n.n-1}{2}g^{n-2}\frac{\alpha^2}{2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}g^{n-3}\alpha^3 + \&c.$$

et par conséquent

$$\Theta(\pi u) = g^n\pi(u) - n g^{n-1}\frac{d\pi u}{du} + \frac{n.n-1}{2}g^{n-2}\frac{d^2\pi u}{du^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}g^{n-3}\frac{d^3\pi u}{du^3} + \&c.,$$

ce qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\Theta(\pi u) = e^{+gu}\frac{d^n(\pi^r u\, e^{-gu})}{du^n},$$

on trouverait de même

$$\Theta^2 \pi u = e^{gu} \frac{d^{2n} (\pi u e^{-gu})}{d u^{2n}},$$

et ainsi de suite; de sorte que le développement (C) deviendra, en faisant, pour plus de simplicité, $\pi u e^{-gu} = \downarrow u$,

$$(E) \quad z = e^{gu} \left(W \downarrow u + \frac{d W}{d \beta} \frac{d^n \downarrow u}{d u^n} + \frac{1}{2} \frac{d^{2n} \downarrow u}{d u^{2n}} \frac{d^2 W}{d \beta^2} + \frac{1}{2.3} \frac{d^3 W}{d \beta^3} \frac{d^{3n} \downarrow u}{d u^{3n}} + \&c. \right).$$

[3.] Mais il est important de remarquer que, comme ces diverses séries se déduisent du développement de W suivant les puissances de α ou de β, si ces développemens étaient impossibles, les séries qui en résultent cesseraient de pouvoir s'obtenir. Soit, par exemple, $\beta = \frac{1}{\alpha}$, l'on a dans ce cas $\Theta (\pi u) = \frac{d^{-1} \pi u}{d u^{-1}} = \int \pi u \, du$, $\Theta^2 (\pi u) = \int^2 \pi u \, du^2$, &c., et par conséquent

$$(F) \quad z = W \pi u + \frac{d W}{d \beta} \int \pi u \, du + \frac{1}{2} \frac{d^2 W}{d \beta^2} \int^2 \pi u \, du^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3 W}{d \beta^3} \int^3 \pi u \, du^3 + \&c.,$$

série qui procède suivant les intégrales successives de la fonction arbitraire; mais pour que cette forme de l'intégrale soit possible, il faut que la quantité W puisse être développée suivant les puissances positives de β, ou, ce qui revient au même, les puissances négatives de α.

La considération des développemens des intégrales des équations différentielles partielles, suivant les intégrales successives des fonctions arbitraires qu'elles contiennent, est d'autant plus importante, que M. *Laplace* a donné dans les Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences de l'année 1779, une méthode pour sommer par intégrales définies les séries de ce genre. Il serait donc important de rechercher, en général, dans quelles circonstances cette forme de développement

est possible : mais la résolution de ce problème nous entraînerait trop loin; il nous suffira de dire en ce moment que l'on peut démontrer,

1.° Qu'il est toujours permis de supposer l'intégrale d'une équation différentielle partielle linéaire, ordonnée suivant les ordres différentiels ascendans de la fonction arbitraire qu'elle renferme, quelles que soient les quantités qui entrent sous cette fonction ;

2.° Qu'il est également possible, en général, pour les équations à trois variables, de supposer la même intégrale ordonnée suivant les ordres différentiels descendans, ou les intégrales successives de la fonction, en donnant à la quantité qui entre sous cette fonction une forme déterminée. Mais il faut remarquer que ce développement est impossible, lorsque, considérant à part les termes de l'ordre le plus élevé de l'équation proposée, et changeant en exposans les indices des différentielles partielles de la variable principale, le résultat présente deux ou un plus grand nombre de facteurs égaux, à moins que les coëfficiens des termes des ordres inférieurs de la proposée ne satisfassent en même temps à de certaines équations de condition.

Pour étendre ce dernier théorème aux équations à quatre et à un plus grand nombre de variables, on doit en outre observer que le développement dont il s'agit serait encore impossible, si les coëfficiens de l'équation ne satisfaisaient pas aux conditions connues et nécessaires pour l'indépendance des quantités que doit renfermer la fonction arbitraire.

Lorsque l'intégrale d'une équation différentielle partielle linéaire peut s'obtenir en quantités finies ; c'est-à-dire, lorsque la fonction arbitraire ne s'y trouve engagée que d'une manière algébrique, ou sous un nombre fini de signes de différenciations ou d'intégrations indéfinies prises par rapport aux variables indépendantes de l'équation, ou par rapport à d'autres quantités composées de ces variables, on sait, en général qu'alors cette intégrale peut être développée suivant les ordres différentiels descendans, ou suivant les intégrales successives de la fonction arbitraire. Il suit de là que les conditions nécessaires pour la possibili

du développement de l'intégrale suivant les intégrales successives de la fonction arbitraire qu'elle doit renfermer, font partie des conditions relatives à la possibilité de l'intégration de la proposée en termes finis.

Nous terminerons ici en remarquant qu'indépendamment de ce que la série *(F)* peut être sommée, à l'aide d'intégrales définies, par la méthode donnée par M. *Laplace*, dont nous avons parlé ci-dessus, cette même série et celles que nous avons désignées par *(B)*, *(D)* et *(E)*, peuvent toujours l'être également, en faisant usage des méthodes indiquées à la fin du Mémoire précédent.

ESSAIS

Sur l'Art de projeter les Canaux de navigation;

Par MM. DUPUIS-TORCY et B. BRISSON, Ingénieurs des ponts et chaussées, anciens Élèves de l'École polytechnique (1).

L'ART de projeter les canaux présente un problème dont les élémens se rapportent, les uns à la science économique, d'autres à la géographie physique, et d'autres enfin à la science des constructions. En effet, lorsque l'on propose un canal, on doit en déterminer la direction de manière à procurer à la nation qui l'entreprend, le plus grand avantage avec le moins de dépense possible, question dépendante de l'économie publique; et le calcul de cette dépense résulte du tracé géographique du canal, et de la nature des constructions que comporte son exécution. On sent que ce problème général doit admettre une solution précise; et si l'on avait une méthode qui la fît obtenir, on résoudrait également une foule d'autres questions de même genre, relatives, sous beaucoup de rapports, à l'art de l'ingénieur.

L'évaluation de l'avantage que produira l'ouverture d'un canal proposé, ou en général d'une nouvelle voie de communication, offre d'assez grandes difficultés, lors même que pour la simplifier on fait abstraction de plusieurs élémens peu susceptibles de mesure, qu'elle paraît devoir renfermer. Il faut d'abord déterminer comment, dans un pays dont l'état de richesses est regardé comme constant, la production et la consommation s'opèrent, en quelque sorte périodiquement, par l'effet combiné

(1) M. *Dupuis-Torcy*, qui avait déjà donné des preuves d'un grand talent, est mort à Caïenne, où il avait été envoyé, sur sa demande, comme ingénieur des ponts et chaussées. Il avait à peine trente ans.

les facultés et des besoins de tous les habitans; et parmi les causes qui influent sur ce mouvement révolutif de richesses, on doit distinguer les communications qui lient les diverses parties de ce pays, soit entre elles, soit avec les pays voisins. Qu'on suppose ensuite l'ouverture d'une nouvelle voie de communication : le mouvement change et avec lui l'état des richesses, et par conséquent la production et la consommation ; mais l'une et l'autre doivent arriver, au bout d'un temps plus ou moins prolongé, et après avoir passé par plusieurs états variables, à un nouvel état fixe, différent de celui qui existait avant l'introduction d'une cause de changement ; et la comparaison des états postérieurs à l'état antérieur donne les moyens d'apprécier l'effet produit. C'est ainsi que nous concevons possible le calcul de l'avantage qui doit résulter d'une nouvelle voie de communication; mais nous écarterons pour le moment ces questions compliquées, et nous remettrons à une autre époque pour développer nos recherches à ce sujet.

Les constructions particulières aux canaux ont déjà été décrites dans plusieurs ouvrages connus, et d'ailleurs les difficultés d'exécution qu'elles présentent, sont semblables généralement à celles que l'on rencontre dans tous les autres travaux considérables.

Il reste à étudier la partie de l'art de projeter les canaux qui se lie à la géographie physique. Ce sera là l'objet principal de ce Mémoire ; et quoique les principes que nous allons exposer soient de nature à s'appliquer au tracé des routes, sur-tout des routes en pays de montagnes, comme à celui des canaux, c'est particulièrement sous ce dernier point de vue que nous comptons les envisager.

Les canaux se divisent en deux classes ; dans la première sont ceux destinés à suppléer la navigation difficile ou impossible des rivières et des fleuves; ils sont établis dans les mêmes vallées, et leurs eaux en sont dérivées; on les appelle *canaux de dérivation.* Dans la seconde classe sont les canaux qui ont pour objet de créer une ligne navigable entre les bassins de deux rivières, en franchissant la chaîne de montagnes qui

les sépare. Il y a donc sur cette chaîne un point auquel les eaux doivent être d'abord amenées, pour être ensuite partagées entre les deux branches du canal qu'on se propose d'établir, et ces sortes de canaux, pour cette raison, se nomment *canaux à point de partage.* Ces derniers, outre les difficultés qui leur sont communes avec les premiers, en offrent de particulières, et c'est pourquoi nous les considérerons principalement. On voit donc que, pour projeter en général un canal de navigation, il convient d'étudier les rapports qui existent entre les cours d'eau des pays qu'il doit traverser, et leur configuration.

Un pays quelconque est, en général, composé ou du système de ces chaînes de montagnes qui sont séparées par les lignes des plus grandes profondeurs, par les *thalwegs* des bassins de ses rivières, ou du système des bassins de ces rivières que séparent les lignes des sommités. Les grandes rivières, les fleuves, ont des rivières affluentes ; celles-ci en reçoivent d'autres, et ainsi de suite jusqu'aux moindres ruisseaux qui prennent leurs sources près des faîtes des chaînes de montagnes. De même les principales chaînes de montagnes ont de premières ramifications; d'autres ensuite, et divergent ainsi jusqu'à leurs derniers appendices, c'est-à-dire, jusqu'aux caps qu'elles forment sur les bords des rivières et des mers. On a de la sorte des chaînes et des bassins de divers ordres, et l'on doit remarquer qu'une chaîne ou un bassin d'un ordre quelconque, est entièrement composé d'une suite de chaînes ou de bassins de l'ordre immédiatement inférieur.

Si l'on embrasse sous le même point de vue de plus grands espaces, on sera conduit à considérer les continens comme de vastes chaînes, dont les *faîtes* circonscriront les bassins des mers, et qui seront elles-mêmes séparées au-dessous des eaux par de simples lignes, qu'on peut appeler les *thalwegs* de ces immenses bassins. La surface entière de la partie solide du globe pourra de la sorte être indifféremment regardée comme composée, soit de la chaîne des continens, soit du système de bassins des mers, en concevant, ainsi que nous l'avons fait, les uns

les autres de ces grands élémens étendus jusqu'à leurs dernières et véritables limites. Il nous suffira de ces seules observations pour reconnaître les principales propriétés de la surface terrestre relatives à notre objet.

On aperçoit d'abord que les parties de cette surface qui se succèdent de chaque faîte à chaque thalweg, et de chaque thalweg à chaque faîte, ont des pentes alternatives, c'est-à-dire sont inclinées dans des sens opposés à l'égard de l'horizon. Or, ces pentes, quoique susceptibles de quelques variations dans le sens de leur longueur, peuvent s'exprimer sensiblement par des plans, qu'on concevra plus ou moins étendus, selon que les pentes qu'ils devront représenter appartiendront à des chaînes ou à des bassins des premiers ordres ou des ordres inférieurs; et tous ces plans étant classés et réunis selon les ordres des chaînes et des bassins auxquels ils correspondent, formeront, par leurs divers ensembles, des polyèdres, dont chacun représentera la surface terrestre avec plus ou moins de précision, et qui en approcheront de plus en plus, à mesure que le nombre de leurs faces sera plus grand, et chacune de ces faces en même temps terminée par des limites plus resserrées.

La nature des recherches que nous avons à faire sur cette surface, met cependant des bornes à cette approximation. Si l'on y considérait des parties trop petites, les moindres inégalités y deviendraient très-sensibles, et les polyèdres qu'il faudrait imaginer pour exprimer toutes ces inégalités, n'auraient plus la propriété que nous attribuons à la surface à laquelle nous les comparons, d'être composés de pentes alternatives.

Il convient donc de ne comprendre dans la série de ces polyèdres, que ceux dont les faces seront terminées par des limites très-prononcées, telles, par exemple, que les faîtes et les thalwegs qui, sur les continens, séparent les bassins ou tracent les cours des derniers ruisseaux.

Nous devons encore remarquer que, si l'on considère sur la même surface de très-grandes parties, il deviendra nécessaire de faire participer à sa courbure générale les surfaces par lesquelles on se proposera d'en exprimer les pentes : en effet, ces surfaces étant inclinées dans un même sens sur de très-grandes longueurs, et faisant les mêmes angles

avec des verticales dont la convergence deviendra sensible, seront nécessairement des surfaces courbes. Il est aisé de voir qu'elles seront à-peu-près, à l'égard des surfaces en général, ce que sont les spirales à l'égard des lignes. On pourra cependant en composer des polyèdres à faces courbes, qui conviendront pour représenter la surface du globe, lorsqu'on n'en voudra considérer que les plus amples inégalités; et l'on parviendra de la sorte au sphéroïde, par lequel on a coutume de représenter la forme la plus générale de la terre, et dont la surface a la propriété d'être constamment perpendiculaire aux directions de la pesanteur dans tous ses points : nous l'appellerons sphéroïde des mers, parce qu'en effet sa surface comprend celle des mers, en faisant abstraction de leurs oscillations dues à l'action des corps célestes. Ce sphéroïde termine donc dans ce sens la série des polyèdres propres à l'expression des inégalités de la superficie terrestre.

Maintenant, puisque ces polyèdres ont pour limite commune, et circonscrivent tous une même surface horizontale dans tous ses points, et qu'ils s'en éloignent successivement en devenant de plus simples, plus composés, c'est une conséquence que, de proche en proche, dans cet ordre, chacune des faces de l'un quelconque d'entre eux corresponde à plusieurs faces du polyèdre suivant, et que les faces des derniers polyèdres soient toujours plus inclinées à l'horizon que celles des polyèdres précédens. On a donc des plans de pente de divers ordres, selon les ordres des polyèdres auxquels ils appartiennent.

Les pentes des ordres supérieurs peuvent être appelées des pentes générales à l'égard des pentes des ordres inférieurs; réciproquement celles-ci sont des pentes directes, inverses et latérales, selon les directions qu'elles ont à l'égard des pentes générales; et, d'après ce qui précède, il suffit d'imaginer le triangle formé par les directions de deux pentes opposées, contiguës à un même faîte ou à un même thalweg, et de la pente générale à laquelle l'une et l'autre se rapportent, pour apercevoir qu'entre les pentes d'un même ordre, rapportées à une même pente générale, les pentes inverses sont ordinairement les plus courtes.

Ces propriétés résultent uniquement de la considération progressive des polyèdres terrestres, et de la nature des sphéroïdes dont nous avons vu qu'ils s'éloignaient successivement et par les degrés les plus rapprochés.

En outre, puisque la surface de la terre est entièrement composée, d'une part, de pentes alternatives, et, d'une autre part, des systèmes de ses chaînes ou de ses bassins, il s'ensuit que chaque chaîne ou chaque bassin se compose uniquement de deux pentes séparées par un faîte ou par un thalweg. Chacune des deux pentes appartenant à une chaîne ou à un bassin d'un ordre quelconque, sera donc entièrement composée des pentes alternatives d'une suite de chaînes et de bassins de l'ordre immédiatement inférieur.

Or, si l'on considère l'une de ces deux pentes, on devra remarquer que les faîtes et les thalwegs secondaires, entre lesquels se trouvent les pentes alternatives dont elle se compose, se rattachent latéralement au faîte et au thalweg principal qu'elle réunit; et comme la direction des pentes a toujours lieu de chaque faîte à chaque thalweg, il s'ensuit que ces pentes secondaires sont des pentes latérales par rapport à la pente principale proposée. Ainsi une pente d'un ordre quelconque est toujours composée d'une suite de pentes alternatives de l'ordre immédiatement inférieur, et qui sont latérales par rapport à elle; chacune de celles-ci est pareillement composée d'une suite de pentes alternatives de l'ordre immédiatement inférieur, qui sont latérales par rapport à elle-même, et qui se trouvent par conséquent des pentes directes et inverses à l'égard de la pente précédente. On retrouverait, en continuant, de nouvelles pentes latérales à l'égard de la même pente, et ainsi de suite.

Cette disposition, en quelque sorte symétrique, forme un nouveau caractère de la surface de la terre et de celle des polyèdres successifs qui la représentent.

Nous avons encore à considérer les rapports qui existent entre les faces des polyèdres et les arêtes qui terminent ces faces, entre celles de ces arêtes qui appartiennent à des angles saillans et celles qui appartiennent à des angles rentrans, afin d'en conclure des rapports

analogues entre les faîtes, les thalwegs et les plans de pentes des diverses chaînes et bassins; cela sera facile, d'après ce qui précède. Ces rapports se réduisent en effet, pour les polyèdres, à ce que les situations respectives des faces résultent de celles des arêtes, et réciproquement à ce que les inclinaisons des arêtes résultent de celles des faces. Ainsi, sur la surface de la terre, les pentes des deux revers d'une chaîne vers les thalwegs qui la terminent étant indiquées, ainsi que les pentes propres à ces thalwegs, et leur position, la situation des plans qui forment ces revers est déterminée, et l'on en conclura celle du faîte qui en est la limite commune. Semblablement, la pente du thalweg d'un bassin résultera des pentes supposées connues des deux faîtes qui le terminent, et des propres pentes latérales de ce bassin vers son thalweg.

En continuant cette marche, nous pourrions de ces résultats sur les situations et les pentes générales des faîtes et des thalwegs, passer à d'autres sur les situations et les pentes de leurs parties; mais nous ne nous étendrons pas davantage pour le moment sur les propriétés de la surface terrestre comparée à des polyèdres, et nous allons considérer de nouvelles surfaces géométriques propres à en exprimer, d'une manière approchée, toutes les inégalités.

En effet, ainsi que nous l'avons déjà observé, la représentation des pentes alternatives de la surface terrestre par des plans ou des surfaces spirales, non-seulement a des limites qui en restreignent la possibilité, mais même, lorsqu'elle est possible, est encore loin d'être rigoureuse. Dans la réalité actuelle, cette surface est une et continue, et le passage de l'une quelconque de ses pentes à la pente opposée, n'est pas brusque en général, et se fait au contraire d'une manière insensible; en sorte que si on la conçoit coupée par des plans verticaux, les lignes de section seront des courbes continues à sinuosités alternatives, et dont les tangentes se trouveront horizontales dans des points où en même temps les hauteurs verticales seront des *maxima* ou des *minima*.

Or, il est évident qu'on peut attribuer plus ou moins d'amplitude aux sinuosités de la surface terrestre envisagée sous ce point de vue, ainsi qu'aux systèmes de lignes qu'on y concevra tracées, selon les ordres divers des chaînes ou des bassins dont on la regardera comme composée : on peut donc la représenter avec des degrés successifs d'approximation par des surfaces continues à sinuosités alternatives, comme nous l'avons fait par des polyèdres terminés par des faces faisant entre elles alternativement des angles saillans et rentrans. Les circonstances détermineront sur le choix de ces deux systèmes de représentation, et l'on se rappellera toutefois que, malgré que le dernier soit le plus rigoureux, ils sont établis l'un et l'autre sur l'observation fondamentale des pentes alternatives de la surface terrestre.

Au surplus, les différentes parties de ces nouvelles surfaces successives, comparées entre elles, ont les mêmes dispositions que les faces des polyèdres que nous avons considérées. Nous rappelant donc ce que nous avons dit à l'égard de ces polyèdres, et revenant aux propriétés des faîtes et des thalwegs, nous observerons que la direction générale d'un faîte quelconque, par exemple, traverse, à-peu-près à angles droits, les pentes principales des deux revers que ce faîte sépare : il doit donc, dans beaucoup de cas, participer aux pentes latérales alternatives de ces deux revers ; cela n'est pas nécessaire cependant, et il peut, en faisant divers contours, parcourir les plans de ces pentes alternatives, et en couper les faîtes et les thalwegs, sans alterner dans le même sens ses propres pentes; il pourra même les alterner dans un sens opposé. Selon les divers accidens du terrain, les faîtes forment donc des courbes sinueuses dans divers sens, en sorte que leurs projections horizontales et verticales forment aussi des courbes sinueuses offrant des arcs alternatifs.

Nous entendons ici par projections horizontales, les projections faites par des lignes verticales sur une surface parallèle au sphéroïde des mers, et par projections verticales, les projections faites par les lignes les plus courtes parallèles au même sphéroïde, sur une surface composée de

verticales, et ayant pour trace sur ce sphéroïde une ligne dont la longueur est un *minimum*.

Si donc on considère les projections verticales des faîtes, on aperçoit, indépendamment des pentes générales qu'ils peuvent avoir dans la totalité de leurs longueurs, des pentes alternatives correspondantes ou non aux pentes alternatives des revers qu'ils séparent, et qui se terminent insensiblement aux points de ces faîtes où leurs tangentes devenant horizontales, leurs hauteurs verticales peuvent être des *maxima* ou des *minima*.

Ces pentes sont de divers ordres, comme toutes celles que nous avons considérées jusqu'à présent ; on doit seulement observer à cet égard que les pentes propres à des faîtes ne pouvant être latérales les unes à l'égard des autres, leurs ordres successifs, comparés à ceux des pentes des surfaces dont elles font partie, ne peuvent procéder au plus que de deux en deux. Les mêmes rapports existent entre les arcs dont chacun se compose de deux de ces pentes ; et les différences entre les plus grandes et les plus petites de leurs hauteurs, deviennent d'autant moindres qu'ils ont moins d'amplitude, et qu'ils vont s'éloignant des premiers ordres. Ces propriétés des faîtes sont évidemment communes aux thalwegs.

Maintenant, pour obtenir les points les plus élevés ou les plus bas des arcs que forment les thalwegs et les faîtes, proposons-nous immédiatement de déterminer les points de la surface terrestre, dont les hauteurs sont des *maxima* ou des *minima* ; et d'abord, pour fixer nos idées, nous ne considérons que les plus amples sinuosités de la surface terrestre, celles, par exemple, que présentent les chaînes ou les bassins des premiers ordres conçus terminés aux thalwegs ou aux faîtes qui les circonscrivent. Nous remarquerons que sur cette surface les courbes perpendiculaires aux faîtes ou aux thalwegs ont, dans leurs points de rencontre avec les unes et les autres de ces lignes, des tangentes horizontales ; ainsi, dans les points de rencontre mutuelle des faîtes et des thalwegs, les courbes qui leur sont respectivement perpendiculaires se

rencontrant également, le plan tangent à la surface qui devra passer par les tangentes horizontales de ces dernières courbes, sera nécessairement horizontal. Les points où les hauteurs de la surface terrestre peuvent être des *maxima* ou des *minima*, sont donc déterminés par les rencontres mutuelles des faîtes et des thalwegs, en concevant que les faîtes ou thalwegs qui se rattachent à un même point d'un thalweg ou d'un faîte de l'ordre supérieur, forment une ligne continue qui coupe celle du faîte ou du thalweg principal.

Ensuite si, de part et d'autre de chacune de ces lignes de thalwegs ou de faîtes, on suppose tracées des lignes A et A', B et B', qui leur soient parallèles : 1.° ou ces dernières lignes seront toutes convexes, et la surface sera entièrement convexe; sa hauteur au point de rencontre que l'on considère sera donc un *maximum absolu* : 2.° ou elles seront toutes concaves, et la surface sera entièrement concave; sa hauteur au point proposé sera donc un *minimum absolu* : 3.° ou deux d'entre elles A et A', par exemple, seront convexes, B et B' étant concaves, et la surface sera en partie convexe et en partie concave; sa hauteur au point proposé sera donc un *maximum* ou un *minimum relatif*. Il peut encore s'offrir d'autres cas moins importans, tels que ceux où les lignes A et A' étant toutes deux convexes ou concaves, des deux lignes B et B', l'une est convexe, l'autre est concave; la surface alors a dans le point proposé une de ses courbures nulles, ou, ce qui revient au même, une inflexion horizontale. Il est facile de voir que ces différens cas auront lieu respectivement, lorsqu'à un même point d'un faîte ou d'un thalweg d'un ordre quelconque, se rattacheront, et toujours latéralement, deux faîtes ou deux thalwegs de l'ordre immédiatement inférieur, que l'on pourra concevoir former une ligne continue : c'est à savoir le premier cas, lorsqu'à un faîte se rattacheront deux faîtes secondaires; le deuxième cas, lorsqu'à un thalweg se rattacheront deux thalwegs secondaires; le troisième cas, qui est unique, quoiqu'il puisse se présenter de deux manières différentes, lorsqu'à un faîte se rattacheront deux thalwegs secondaires, ou à un thalweg deux faîtes secondaires; les autres

cas enfin auront lieu, lorsqu'à un faîte ou à un thalweg se rattacheront un faîte et un thalweg secondaires : ces dernières combinaisons ne peuvent se rapporter qu'aux points extrêmes des sinuosités que présentent les projections horizontales des faîtes ou des thalwegs proposés ; mais dans la rigueur géométrique, elles n'arriveront que rarement, l'inflexion horizontale n'étant qu'un cas particulier par rapport aux autres cas de *maximum*.

Les points de la surface de la terre, dont les hauteurs sont des *maxima* ou des *minima*, étant ainsi déterminés par les rencontres mutuelles des thalwegs et des faîtes, ces mêmes points se trouvent immédiatement ceux où les hauteurs de ces lignes sont des *maxima* ou des *minima*.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré sur chacune des surfaces à sinuosités alternatives par lesquelles nous avons représenté la surface de la terre, qu'un petit nombre de lignes remarquables. Pour définir complétement l'une quelconque de ces surfaces, nous devons y considérer un système de lignes dont elles puissent se composer entièrement. Parmi celles qu'on pourrait adopter, nous choisirons les lignes de plus grande pente, comme se rapportant plus directement à notre objet. Le caractère de ces lignes est d'être constamment perpendiculaires aux courbes horizontales que l'on pourrait tracer par leurs différens points sur la surface proposée. On formera donc de la sorte deux systèmes de lignes perpendiculairement trajectoires les unes aux autres ; en sorte que, quand un des systèmes sera donné, l'autre s'ensuivra nécessairement. On obtiendra les courbes horizontales, en concevant la surface proposée coupée par des surfaces horizontales ou parallèles au sphéroïde des mers ; les lignes de section seront évidemment des courbes à sinuosités alternatives, et l'une d'elles, par exemple, est la ligne des côtes maritimes.

Les lignes de sections horizontales ne pouvant jamais se rencontrer, les lignes de plus grande pente, qui en sont les trajectoires perpendiculaires, ne peuvent pas non plus, en général, se rencontrer ; en effet,

soient

soient supposées d'abord à des distances finies les lignes horizontales données, ces lignes étant tracées sur une certaine surface, et liées entre elles par une loi de continuité. Si, par un point quelconque de l'une d'elles, on conçoit une ligne polygonale formée de la suite des plus courtes perpendiculaires à ces lignes consécutives, cette ligne, en général, doit être unique; et comme cette propriété a lieu, quelque petites que soient les distances qui séparent les courbes horizontales, elle aura lieu encore lorsque ces courbes étant multipliées à l'infini, et leur distance nulle, la ligne polygonale deviendra une ligne de plus grande pente; les lignes de plus grande pente ne peuvent donc avoir, en général, de points communs.

Parmi ces lignes, on doit comprendre les faîtes et les thalwegs. En effet, d'après ce qu'on a vu, si l'on fait perpendiculairement à un faîte ou à un thalweg, une section dans la surface, cette section a dans ce point sa tangente horizontale, et les lignes de faîte ou de thalweg toujours perpendiculaires à ces tangentes, sont des lignes de plus grande pente. On voit qu'elles sont les limites entre les deux systèmes des lignes de plus grande pente, situées sur l'une et l'autre des deux pentes alternatives qu'elles séparent.

Quoique les lignes de plus grande pente ne puissent avoir en général de points communs, elles peuvent cependant se rencontrer dans les points singuliers de la surface. En effet, 1.° lorsque la hauteur de la surface est un *maximum* ou un *minimum* absolu, la ligne de section horizontale, qui, un peu plus bas ou un peu plus haut, était une courbe fermée, se réduit à un point; et une infinité de lignes de plus grande pente, peuvent partir de ce point dans toutes les directions. Parmi ces lignes, on doit remarquer les deux lignes de faîte, ou les deux lignes de thalweg, qui se rencontrent et se croisent dans les points proposés.

2.° Lorsque la hauteur de la surface est un *maximum* ou un *minimum* relatif, la courbe horizontale qui, un peu plus haut ou un peu plus bas, était formée de deux branches opposées aux sommets, obtient par le rapprochement de ces sommets, un point double, duquel partent deux

lignes de plus grande pente qui se croisent en ce point ; et ces deux lignes sont la ligne de faîte et celle de thalweg, dont nous avons vu que la rencontre déterminait ce même point.

3.° Dans les points où la surface a des inflexions horizontales, les lignes de section horizontale prennent une forme qui se compose de l'une et de l'autre de celles que nous avons décrites dans les cas précédens, et les lignes de plus grande pente suivent, en conséquence de cette forme, des directions diversement multiples qu'il est aisé de se représenter. Parmi ces lignes, on doit encore distinguer les faîtes et les thalwegs qui se rencontrent dans ces points d'inflexion.

L'étude des lignes que nous venons de considérer, se lie entièrement à celle du cours des eaux sur la surface de la terre. En effet, les eaux se partagent sur les faîtes des chaînes de montagnes, coulent sur leurs revers, en suivant les lignes de plus grande pente, et vont se réunir dans les thalwegs. L'observation complète du cours des eaux ferait donc connaître exactement, non-seulement les thalwegs de tous les bassins, mais encore les lignes de plus grande pente, et même jusqu'aux faîtes de toutes les chaînes de montagnes; et, comme nous l'avons vu, le système de toutes ces lignes définit rigoureusement la surface terrestre, et la compose entièrement.

POUR rendre utiles ces derniers résultats, après avoir exprimé géométriquement la nature et les propriétés de la surface de la terre, il nous reste à en obtenir la représentation graphique la plus convenable, et ensuite à indiquer l'usage de cartes faites d'après les méthodes descriptives employées généralement. Toute méthode pour représenter une surface se réduit, en général, à faire les projections d'un système quelconque de lignes qui la définissent. Nous pourrons donc représenter la surface de la terre par les projections des lignes de section horizontale, ou par celles des lignes de plus grande pente que nous avons précédemment considérées. Ces deux systèmes de lignes ont l'avantage de se succéder suivant des lois simples et faciles à saisir, et elles conservent

en outre, dans leurs projections horizontales, la propriété qu'elles ont sur la surface à laquelle elles appartiennent, d'être réciproquement des trajectoires perpendiculaires les unes aux autres ; en sorte que la projection d'un des deux systèmes étant donnée, la projection de l'autre s'ensuivrait rigoureusement. La considération de ces deux systèmes de lignes a fourni, en effet, les élémens des diverses méthodes descriptives employées avec plus ou moins d'intelligence dans les cartes topographiques, et qui se réduisent à tracer leurs projections horizontales ensemble ou séparément.

Lorsque l'on considère les lignes de section horizontale seules, et que l'on conçoit les sections faites à des intervalles égaux et connus, leurs projections ont l'avantage de peindre à l'œil et d'exprimer exactement les contours et le relief du terrain. Les projections des lignes de plus grande pente offrent aussi le figuré du terrain ; et prolongées dans toute leur étendue, elles approchent tellement des projections des faîtes et des thalwegs, qu'elles peuvent en quelque sorte les tracer. Si même, malgré que cela ne soit pas rigoureusement exact, on admet que les eaux se partagent sur les lignes géométriques qui forment les faîtes, et se réunissent pareillement dans les lignes géométriques qui forment les thalwegs, les courbes de plus grande pente, considérées de part et d'autre d'un faîte ou d'un thalweg, se rencontreront deux à deux sur ces lignes principales ; et dans leurs points de rencontre, elles devront être tangentes entre elles, pour ne pas cesser d'être perpendiculaires à la courbe continue de section horizontale : le faîte ou le thalweg qui les sépare devra donc aussi leur être tangent ; ainsi, chaque faîte ou chaque thalweg sera tangent aux deux systèmes de lignes de plus grande pente qu'il sépare, et en sera généralement la courbe enveloppe. Dans ce cas, l'ensemble de ces lignes le déterminerait entièrement.

Non-seulement ces considérations offrent les moyens de représenter avec exactitude, dans les cartes topographiques, un terrain de peu d'étendue ; elles sont susceptibles de s'appliquer encore aux grandes cartes géographiques. En effet, par un système d'opérations parallèles à

celles que l'on est obligé de faire pour déterminer les projections horizontales des points principaux de la surface terrestre, on pourrait obtenir les hauteurs verticales de ces points ; et en les supposant convenablement choisis, l'ensemble de ces deux systèmes d'opérations définirait assez complètement la surface terrestre ; en sorte qu'on en pourrait conclure, non-seulement les projections horizontales des thalwegs et des faîtes, mais encore celles d'un nombre quelconque de courbes de section horizontale, rencontrant à des hauteurs connues les premières lignes : il conviendrait évidemment que les points que doivent déterminer ces opérations appartinssent immédiatement à des faîtes ou à des thalwegs. On aurait ainsi une représentation assez complète du sol terrestre, dont les cartes ordinaires ne donnent que les simples projections horizontales. Telles sont les principales méthodes de description graphique qui résultent des définitions de la surface terrestre que nous avons précédemment données.

Mais, dans la plupart des cartes actuelles, les lignes de section horizontale, ni en général celles de plus grande pente, ne sont dessinées, elles ne donnent point les projections des faîtes ; et les projections même des thalwegs indiqués sur le terrain par le cours des eaux, ne s'y trouvent tracées que jusqu'à quelque distance des faîtes. N'ayant donc pour conclure la configuration du sol terrestre que la description incomplète du cours des eaux, on ne peut parvenir à cet égard qu'à des résultats dépourvus de précision ; et ces résultats doivent se borner à la détermination approximative des parties de thalwegs non indiquées par le tracé des cours d'eau, et à celle des faîtes et de leurs points principaux que nous avons besoin de considérer. Les mêmes données peuvent conduire encore à reconnaître le sens, mais non à estimer la quantité des pentes de ces principales lignes.

Les cartes dont il s'agit doivent cependant guider dans la conception générale d'un projet de navigation, et dans la détermination approchée des points les plus importans de son tracé. En effet, ce n'est pas sur le terrain que ces premières idées peuvent être aperçues : la vue est trop

faible, et s'y trouve trop resserrée pour embrasser à-la-fois le relief d'une grande étendue de pays, et l'on risque de négliger les formes principales pour ne s'attacher qu'aux accidens secondaires de la contrée qu'on a devant les yeux. Il est donc utile sous ce rapport, d'exposer l'usage des cartes, telles qu'elles sont le plus souvent dessinées, sans renoncer aux avantages qu'offrirait une représentation plus exacte du terrain, ou mieux encore l'étude même des localités, pour fixer en détail et d'une manière précise les résultats vers lesquels on aura été dirigé par les cartes ordinaires.

Cela posé, le cours des eaux dans les ruisseaux, les rivières et les fleuves, ou leur stagnation dans les lacs et les mers, exprime, comme nous l'avons remarqué, les parties inférieures des thalwegs; et l'on peut compléter leur tracé, soit en prolongeant ces parties suivant leur loi indiquée, soit en considérant qu'ils occupent le fond de bassins, dont les pentes latérales sont déterminées par des thalwegs connus d'un ordre inférieur.

On peut déduire également des mêmes données les projections horizontales des faîtes et celles de leurs points principaux déterminés par leurs rencontres, soit entre eux, soit avec des thalwegs, et le sens des inclinaisons de ces lignes. En effet, les faîtes des chaînes continentales séparent les sources des fleuves affluens des mers opposées, de même les faîtes des chaînes secondaires séparent les sources des affluens des fleuves, et ainsi des autres. Les projections horizontales des faîtes, et toutes les sinuosités de toutes ces projections, sont donc faciles à déterminer lorsque l'on connaît le cours des eaux. De plus, nous avons vu que les inclinaisons générales des faîtes résultent des pentes déterminées par les thalwegs de même ordre qu'ils séparent, et ces pentes sont indiquées par le cours des eaux qui suivent ces thalwegs. Ainsi, les faîtes des chaînes continentales n'ont point de pentes générales, puisqu'ils séparent des mers dont les eaux n'ont pas de cours ; les faîtes des chaînes secondaires participent aux pentes générales indiquées par les fleuves

parallèles affluens des mers, et ainsi de suite. Enfin, puisque les projections horizontales de tous les thalwegs et de tous les faîtes peuvent être tracées, les points où les faîtes principaux se trouvent rencontrés à-la-fois par deux faîtes secondaires opposés, ou par deux thalwegs, ou par un faîte et un thalweg, sont évidemment indiqués, et l'on a tout ce qu'il faut pour conclure le sens de leurs pentes alternatives. L'on voit, en outre, que ces divers résultats s'obtiendront avec d'autant plus de précision, que les cartes dont on fera usage, indiqueront un plus grand nombre de thalwegs des ordres les moins élevés.

Au reste, il nous importe principalement de connaître les points des faîtes dont les hauteurs verticales sont des *minima*, et on peut les obtenir immédiatement, d'après les différentes considérations qui ont précédé. Il nous suffira de rechercher ces points dans les arcs les plus amples dont puissent se composer les faîtes principaux, et la même marche s'appliquera facilement aux faîtes et aux arcs des ordres inférieurs.

Les cours de deux fleuves comparés entre eux et au faîte qui les sépare, en considérant les cas extrêmes, peuvent être opposés ou parallèles. S'ils sont opposés, leurs thalwegs prolongés jusqu'à ce faîte, le rencontrent sensiblement en un même point qui se trouve de la sorte déterminé; et d'après ce qu'on a vu précédemment, la hauteur du faîte en ce point est un *minimum*. Si les cours des deux fleuves proposés sont parallèles, ils peuvent être dirigés dans le même sens, ou en sens contraire : s'ils sont dirigés dans le même sens, le faîte, comme nous l'avons vu, participe à leur pente commune. Les *minima* de ces hauteurs n'appartiennent alors qu'à des arcs d'un ordre secondaire, et doivent être déterminés par les affluens des fleuves proposés : s'ils sont dirigés en sens contraire, la pente du faîte qui les sépare paraît indéterminée, et l'on ne peut reconnaître, comme dans le cas précédent, les *minima* de ces hauteurs qu'au moyen des affluens. Cependant si l'on remarque que les cours d'eau sont plus rapides vers les sources que vers les embouchures, on peut apercevoir, *à priori*, que le faîte a deux pentes alternatives, correspondantes aux pentes opposées des deux fleuves, et qu'il doit

source à l'autre un arc susceptible de *minimum*. La consi-
affluens donnerait ensuite les moyens de fixer avec plus
les points du faîte auxquels appartiennent les moindres
peut rapporter à ces cas principaux tous ceux dans les-
s des fleuves sont en partie parallèles et en partie opposés.
n effet, prolonger les parties divergentes de ces fleuves
elles se rencontrent sur le faîte intermédiaire, et elles y
un point de *minimum*.

une application de cette théorie. Le continent de l'Europe
deux pentes, dont l'une verse ses eaux dans la mer Bal-
s l'Océan, et l'autre dans la mer Noire et la Méditerranée;
n est déterminée par un faîte principal, qui, après avoir
de l'est à l'ouest, entre en Europe aux sources du Puzora
affluens du Wolga, traverse la Russie, la Pologne, la
oute l'Allemagne, et vient sur les Alpes, après avoir passé
s sources du Danube; de là, séparant les bassins du Rhin
, ce faîte vient sur le Jura et sur les Vosges; il descend des
continuant de circonscrire le bassin du Rhône qu'il sépare
la Seine et de la Loire, se rend aux Cévennes, et de là
s Pyrénées; après quoi il traverse l'Espagne, et va se terminer
, ou plutôt il passe sous la mer pour se rattacher à l'Afrique.
ns de nommer les points les plus élevés de cette ligne, depuis
jusqu'aux Pyrénées, et ils sont évidemment indiqués, parce
aissent des rivières dont les pentes latérales déterminent des
condaires qui se rattachent de part et d'autre en un même point
principal. Les points les plus bas sont également faciles à re-
tre. En effet, l'Aar affluent du Rhin d'une part, et le Rhône de
, divergent dans des directions parallèles au Jura. Les thalwegs
és par cette partie de leurs cours étant prolongés, doivent donc
r en un même point du faîte principal. Ces prolongemens

sont indiqués pour l'Aar par l'Orbe, et les lacs de Bienne et de Neufchâtel; et pour le Rhône, par la Veroge affluent du lac Léman. Les pentes latérales vers ces thalwegs sont d'ailleurs indiquées par les parties supérieures et parallèles de leurs cours, et par les torrens qui viennent du Jura. Le faîte principal descend ensuite du Jura pour remonter sur les Vosges; relativement à cette partie, l'Ill affluent du Rhin, et le Doubs affluent de la Saone et du Rhône, prennent des cours entièrement divergens, et leurs thalwegs prolongés se rencontrent en un même point du faîte à l'est de Béfort dans le département du Haut-Rhin. Les parties inférieures des cours de la Largue affluent de l'Ill, et de l'Halène affluent du Doubs, appartiennent à ces thalwegs, et les parties supérieures des cours de ces rivières d'une part, et de la Savoureuse et de la Dolleren de l'autre, indiquent les pentes latérales vers ces mêmes thalwegs. Le point du faîte, dont la hauteur est un *minimum*, est donc déterminé dans cette partie. Entre les Vosges et les Cévennes, les cours de la Saone et du Rhône, d'une part, et celui de la Loire, de l'autre, suivent en sens contraires des directions peu divergentes d'abord, et ensuite parallèles; entre la source de la Saone et celle de la Loire, il doit donc y avoir un point dont la hauteur soit un *minimum*, et il faudrait déterminer ce point par la considération des affluens de ces fleuves dont les thalwegs seraient opposés : or, il est immédiatement indiqué aux étangs de Longpendu, dont les eaux se partagent en effet et se rendent à ces fleuves par des cours opposés. Entre les Cévennes et les Pyrénées enfin, le faîte s'abaisse encore, les parties inférieures des cours de la Garonne et de l'Aude divergent, et leurs thalwegs se prolongent; savoir, celui de Garonne par le Lers, et celui de l'Aude par le Fresquel jusqu'à Naurouse, où ils se rencontrent sur le faîte, les pentes latérales vers ces thalwegs sont indiquées par les parties supérieures des cours de la Garonne et de l'Aude, qui viennent des Pyrénées et par les affluens secondaires qui viennent de la montagne Noire et de l'appendice qui continue à séparer le Tarn de la Garonne.

Dans le premier de ces points, on a projeté depuis long-temps d'établir

d'établir une communication entre le Rhin et le Rhône par le lac de Neufchâtel et le lac Léman ; par le second doit passer le canal projeté qui réunira encore le Rhin au Rhône, par l'Ill et le Doubs ; par le troisième, passe déjà le canal de Digoin ; et par le dernier enfin, passe le canal du Midi.

Pour la détermination de ces points, nous avons supposé que l'on avait sous les yeux une carte présentant seulement les thalwegs suivis par des cours d'eau assez considérables. Une carte qui eût offert le tracé d'un plus grand nombre de thalwegs, nous eût donné lieu de fixer ces mêmes résultats avec plus de précision ; enfin nous nous sommes bornés à la recherche de ces points principaux : nous eussions pu semblablement déterminer ceux analogues dus à des sinuosités secondaires, et, en général, considérer les détails dans ces applications, comme nous l'avons fait, ou comme nous l'avons pu faire dans la théorie qui a précédé.

Nous devons maintenant chercher à déduire des principes précédens les conséquences les plus importantes à la théorie des canaux.

Lorsque l'on projette un canal, les points auxquels il doit conduire, et quelques-uns des points par lesquels il doit passer, sont en général indiqués par les besoins du commerce : on prend donc ces points comme des données immédiates, et l'on se borne à déterminer dans chacune de ses parties, la ligne qui doit les réunir.

Considérés deux à deux, ils peuvent être situés dans le même bassin, en sorte que de l'un à l'autre il y ait une pente unique ; ou bien ils peuvent être situés dans des bassins différens, et séparés par un faîte, en sorte que de l'un à l'autre il y ait deux pentes alternatives : mais ces deux cas, qui peuvent se rencontrer pour chacune des parties de la longueur du canal, se rapportent à ceux que nous avons considérés pour les canaux en général, et qui nous les ont fait distinguer en canaux de dérivation, et en canaux à point de partage, et nous nous sommes fixés à ces derniers. Embrassant donc la longueur totale du canal proposé,

nous supposerons, qu'il doive être uniquement composé de deux branches situées dans deux bassins principaux opposés, et nous chercherons à déterminer d'abord son point de partage sur le faîte qui sépare ces bassins, puis les lignes que devront suivre les branches de part et d'autre de ce point.

Le point de partage, comme nous l'avons déjà dit, doit être tel qu'on puisse y amener des eaux recueillies dans les parties supérieures du terrain, en quantité suffisante pour les besoins de la navigation ; et il est évident que la quantité des eaux qu'il sera possible de faire arriver à ce point, sera d'autant plus grande qu'il se trouvera plus bas sur le faîte auquel il doit appartenir. On serait donc conduit par cette seule considération à le fixer au point le plus bas d'un des arcs les plus amples dont on puisse concevoir le faîte composé ; ou, ce qui revient au même, en un point de la surface du terrain, dont la hauteur fût un *maximum* ou un *minimum* relatif, en n'ayant égard qu'aux plus grandes sinuosités de cette surface : mais en le déterminant ainsi, on remplira en même temps plusieurs autres conditions importantes. D'abord, la hauteur des écluses étant fixée d'ailleurs, leur nombre se trouvera le moindre possible, ce qui diminuera les frais de construction, et augmentera la célérité de la navigation ; en second lieu, les mêmes avantages seront encore obtenus, en ce que les points de la surface du terrain, dont les hauteurs sont des *maxima* ou des *minima* relatifs, devant être déterminés par la rencontre de deux thalwegs opposés sur un faîte, les deux branches de canal qui s'éloigneront peu de deux semblables thalwegs, seront après en ligne droite, abstraction faite des sinuosités secondaires ; en sorte que la somme de leurs longueurs qui forme la longueur totale du canal, sera la moindre possible : les frais de construction et la durée de la navigation sont donc encore diminués sous ce point de vue. Enfin, puisque l'on n'a égard qu'aux plus grandes sinuosités de la surface du terrain, la fixation du point de partage se trouvera déterminée par les thalwegs des affluens principaux des mers ou des

fleuves auxquels le canal doit conduire. Les deux branches suivront donc, en général, les vallées les plus peuplées, et passeront par les villes les plus commerçantes : le plus souvent il remplira ainsi, le mieux possible, son objet économique.

La fixation du point de partage du canal, en un point de la surface du terrain dont la hauteur est un *maximum* ou un *minimum* relatif, semble donc réunir tous les avantages : la facilité et la célérité de la navigation, l'économie de la construction, enfin la direction de ses branches de la manière la plus favorable au commerce. C'est à quoi peuvent définitivement se réduire les conditions auxquelles il doit satisfaire. Quelques-unes, dans certains cas, pourraient ne point exiger que la hauteur du point de partage fût un *minimum ;* mais leur ensemble conduira le plus souvent à ce résultat. Au surplus, des circonstances locales détermineront auxquelles de ces conditions il conviendra d'attacher une importance prééminente, et quelles seront celles qu'il sera possible ou nécessaire de ne pas remplir complétement (*).

Le premier objet à se proposer est donc de chercher, entre les deux bassins que l'on a en vue de réunir, le point de *minimum* du faîte, ou, ce qui revient au même, le point de *maximum* ou de *minimum* relatif de la surface terrestre. Les considérations que nous avons exposées précédemment, fournissent les moyens de résoudre ce problème d'une manière approchée, d'après l'étude des cartes qui représentent les cours d'eau de l'un et de l'autre de ces bassins. Pour l'arrêter ensuite d'une manière précise, on observe sur le terrain même les moindres cours d'eau ; on juge à l'œil les lignes de pente, et l'on trace le faîte ; puis on détermine, en s'aidant de quelques opérations de nivellement, les pentes

(*) Nous faisons totalement abstraction, dans ces recherches, des canaux souterrains : leur tracé ne dépend que très-peu de la forme des pays qu'ils traversent ; c'est la nature du sol qu'on doit sur-tout considérer pour des canaux de ce genre, et on ne peut, en effet, les tenter que lorsque le terrain permet que l'on pratique, sans trop de frais et de dangers, ces grandes excavations.

alternatives de cette dernière ligne, et le point de partage se trouve ainsi fixé, autant qu'il est possible et nécessaire qu'il le soit, sur une ligne courbe, qui dans ce point se confond avec sa tangente horizontale.

Dès que le point de partage est fixé, la direction générale des deux branches du canal en résulte immédiatement, puisqu'elles doivent suivre des vallées dont les thalwegs se réunissent en ce point, et côtoyer en général ces thalwegs, en se tenant toutefois à l'abri des inondations que les cours d'eau qu'ils reçoivent peuvent occasionner. Il s'agit de déterminer sur laquelle des deux pentes de chaque vallée, l'une et l'autre des deux branches seront tracées. La solution de cette question dépend d'un grand nombre d'accidens du terrain, qu'il est impossible de prévoir ici. Il nous suffira de remarquer que si l'on compare les deux pentes latérales de chaque vallée à une pente plus générale, par rapport à laquelle l'une soit directe et l'autre inverse, ce sera le plus souvent sur cette dernière qu'il conviendra préférablement de diriger et de soutenir le canal. En effet, des deux pentes dont il s'agit, la pente inverse sera généralement la plus courte, et terminée par le faîte le moins élevé : il s'y formera par conséquent moins de sources; elle recevra moins d'eaux pluviales, et sera sillonnée par des cours d'eau secondaires moins considérables : les ponts aqueducs ou les autres ouvrages à construire pour faire traverser au canal ces cours d'eau, seront moins dispendieux, et les biefs horizontaux assujettis à de moins grandes sinuosités. Il arrivera pourtant beaucoup de cas dans lesquels il sera nécessaire de s'écarter de cette règle.

Pour compléter l'étude des rapports qui lient le projet d'un canal à la forme des pays qu'il doit traverser, il nous reste maintenant à considérer le tracé des rigoles destinées à conduire au point de partage les eaux nécessaires aux besoins de la navigation. La consommation d'eau d'un canal peut être rapportée à plusieurs causes principales; le passage des barques par les écluses, le remplissage des biefs que l'on a vidés pour les nettoyer, l'évaporation qui a lieu à la surface d'un canal,

l'infiltration à travers les terres dans lesquelles il est creusé, et les filtrations fréquentes à travers les portes des écluses. Les eaux nécessaires pour remplacer celles qu'enlèvent l'évaporation, l'infiltration, et même le remplissage d'une partie des biefs inférieurs, peuvent, dans beaucoup de cas, être fournies par des prises d'eau diverses, faites dans l'étendue de la longueur des branches du canal ; mais la dépense qu'exige l'entretien de la navigation doit généralement être faite au point le plus élevé. Nous n'entreprendrons pas ici le calcul de la consommation d'eau qu'exige le point de partage d'un canal, nous la regarderons comme une donnée, et nous chercherons les moyens d'y satisfaire.

C'est ici le lieu de se rappeler les considérations faites précédemment sur la forme que présente le terrain, dans l'espace qui environne le point de partage fixé, comme il a été dit, à l'un des points de *maximum* ou *minimum* relatif de la surface terrestre. Que l'on conçoive sur cette surface une ligne horizontale passant par ce point ; elle présentera quatre branches placées chacune dans l'un des quatre espaces angulaires formés par les lignes de thalwegs et de faîtes, dont la rencontre détermine le point de partage. Ces branches considérées deux à deux, de part et d'autre de la ligne des deux thalwegs, viennent, après un nombre quelconque de sinuosités, se réunir sur le faîte, en circonscrivant toute l'étendue de terrain dont les eaux pourraient, physiquement parlant, être amenées au point de partage : mais il est évident qu'il suffit de les prolonger jusqu'à ce qu'elles aient rencontré des cours d'eau assez abondans, pour que leur dérivation fournisse complétement aux besoins du canal. On voit que les rigoles partant du point de partage doivent se tenir au-dessus des branches de cette ligne, dont il est utile en conséquence dans un premier aperçu, de conjecturer le tracé.

On remarquera d'abord que les deux pentes alternatives du faîte, de part et d'autre du point de partage, étant nécessairement secondaires par rapport à celles des deux thalwegs qui viennent s'y réunir, sont généralement plus considérables ; ou, ce qui revient au même, que la

courbure concave de l'arc formé par le faîte est plus grande que la courbure convexe de l'arc formé par la réunion des deux thalwegs; et de là on peut conclure généralement, qu'en partant de ce point, les premières tangentes à chacune des quatre branches de la ligne horizontale, diviseront chacun des quatre angles droits formés par les tangentes aux lignes de faîte et de thalwegs, en deux angles inégaux, dont le plus petit sera du côté du thalweg, et dont on pourrait calculer les valeurs, si l'on connaissait les rayons de courbure des lignes de thalwegs et de faîte, qui sont elles-mêmes, dans le point que l'on considère, les lignes de courbure principale de la surface : or, si à ces quatre premières tangentes qui divisent inégalement les angles droits, on en substitue d'autres qui divisent les mêmes angles en parties égales ; si, de plus, on conçoit une courbe formée de quatre nouvelles branches correspondantes à ces nouvelles tangentes, et que l'on en continue la description, en la considérant comme une courbe horizontale, c'est-à-dire, en s'assujettissant à la condition de rester constamment perpendiculaire aux lignes de pente qu'elle traverse, ses branches à leur origine se tiendront supérieures à celles de la courbe horizontale qui passe par le point de partage, et par conséquent elles leur seront supérieures dans tout leur développement. Le tracé de ces lignes peut donc être considéré comme une première limite approchée de la superficie de terrain sur laquelle on doit prendre les eaux nécessaires pour alimenter le point de partage.

En général, une seule rigole doit aller recueillir les divers cours d'eau appartenant à chacun des quatre espaces angulaires que nous venons de considérer, en coupant successivement les thalwegs dans lesquels ces cours d'eau sont réunis, et les faîtes qui les séparent. Pour fixer avec précision les points de rencontre de la rigole avec les thalwegs et les faîtes, l'on établit un système complet de nivellement sur ces lignes, de manière à comparer les hauteurs de leurs différens points, soit entre elles, soit avec la hauteur du bief de partage. L'on fixe alors ces points de rencontre, en jugeant de la longueur du développement de rigole

qui en résultera, et de la pente qu'il convient de conserver pour le mouvement des eaux que l'on se propose de recevoir. Il faut observer qu'en général, il est avantageux que cette pente soit la moindre possible, afin que la rigole rencontre les différens cours d'eau à une plus grande distance de leurs sources, et qu'elle y trouve une plus grande quantité d'eau. Cependant il n'est pas indispensable que la pente soit uniforme; on peut réserver des chutes sur la longueur de la rigole, et souvent même il convient de le faire, lorsque, d'une part, dans la vue de diminuer sa longueur; et, d'une autre part, ne craignant pas de manquer d'eau, on établit ses points de rencontre avec un ou plusieurs des thalwegs que l'on considère, assez haut pour que la rigole puisse être conduite du bassin d'un des cours d'eau, dans le bassin du cours d'eau voisin, en passant par un point de *minimum* du faîte intermédiaire.

Nous n'avons considéré qu'un seul des quatre espaces angulaires contigus au point de partage. En considérant ensemble les deux côtés d'une même partie du faîte principal, il peut quelquefois être convenable de conduire les eaux prises sur l'un de ces espaces dans le bassin de l'un des cours d'eau qui appartiennent à l'autre. Le canal du Midi offre un exemple très-remarquable d'un tracé de ce genre; les eaux de divers affluens du Fresquel, recueillies par la rigole de la Montagne, traversent le faîte principal, et sont jetées dans le vallon du Laudot et du Sor; de là réunies aux eaux de la rigole de la plaine, elles traversent une seconde fois le faîte principal pour être conduites à Naurouse (*). On sent bien que nous ne pouvons énoncer de règles générales à cet égard; mais la vue du terrain et l'étude de ses formes, dirigée par les principes que nous avons exposés précédemment, conduiront à connaître les différens systèmes de rigoles possibles, et feront juger quel est celui qui doit être préféré. Nous terminerons ces considérations générales par l'observation suivante, qui quelquefois a été peut-être un peu perdue de

(*) Voyez l'ouvrage du général *Andréossy*, sur le canal du Midi.

vue : Les rigoles sont des canaux de petites dimensions, dans lesquels les eaux sont abandonnées à des pentes quelconques, et les ouvrages accessoires qu'elles exigent sont, pour la plupart, peu dispendieux, du moins relativement aux frais qu'entraînent ordinairement les grands travaux publics; lors donc que le point de partage aura été bien choisi, presque toujours il sera possible de prolonger les rigoles de manière à recueillir toute la quantité d'eau convenable, sans augmenter de beaucoup la dépense de la construction d'un grand canal.

MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur la possibilité de substituer le Belier hydraulique à l'ancienne Machine de Marly;

Par M. J.^{eph} MONTGOLFIER, membre de l'Institut, Administrateur du Conservatoire des Arts et Métiers.

DEPUIS long-temps on cherche une machine capable de remplacer celle de Marly; je crois que le belier hydraulique est la plus convenable; c'est ce que je vais essayer de démontrer.

I.

CONDITIONS DE LA MEILLEURE MACHINE.

§. 1.er *Ce que c'est qu'une Machine.*

UNE machine n'est jamais qu'un instrument propre à appliquer une quantité de force donnée à la production d'un effet. Si cet instrument était parfait, la force utilisée par la machine serait égale à celle qu'on lui aurait confiée; mais les machines destinées à utiliser la force de l'eau en mouvement, sont bien éloignées de la perfection, et elles font généralement une distraction inutile, très-considérable de la force qu'on leur confie; de sorte que, pour obtenir l'effet que l'on desire, on est obligé de développer une quantité de force beaucoup plus grande que celle dont elles auraient réellement besoin.

§. 2. *De la Force, son expression.*

LA force est susceptible d'évaluation numérique, et on en a des effets constans qui peuvent toujours la mesurer.

Trois de ces effets les mieux connus, sont le mouvement des corps dans le sens vertical, leur mouvement dans le sens horizontal, et la tension des ressorts.

La force dont on a à disposer pour la machine de Marly, se présente sous la forme d'une grande masse d'eau, qui tombe d'une certaine hauteur; ainsi ce sera cet effet que je prendrai constamment pour mesure de la force; son expression sera toujours pour moi le produit d'une masse par la hauteur qu'elle parcourt, soit en montant, soit en descendant: je prendrai pour unité de force celle nécessaire pour élever 1000 kilogrammes, ou un mètre cube d'eau, à un mètre de hauteur, c'est-à-dire, environ $\frac{1}{112}$ de la force de la journée d'un homme.

§. 3. *La Force a un prix.*

Nos besoins exigent un emploi continuel de force : celle dont nous sommes doués est peu considérable, et elle serait bientôt épuisée, si nous étions obligés de suffire nous-mêmes à tous nos besoins; mais heureusement la nature en a été prodigue, et notre industrie a su s'en emparer là où elle l'a trouvée à sa portée. Les animaux, les rivières, les vents et le feu sont des sources intarissables de force, où nous allons puiser toute celle dont nous avons besoin; ainsi la force ne devrait pas avoir plus de prix pour nous que l'air et la lumière; mais elle ne se trouve pas par-tout en assez grande quantité pour suffire à un grand nombre d'hommes accumulés, ou elle ne s'offre pas de manière à être facilement employée : elle doit donc être rare pour eux, et avoir un prix dans quelques circonstances : ce prix est évidemment proportionné au besoin qu'on aura de la force, et à la difficulté que l'on trouve à en aller chercher ailleurs dans un lieu plus isolé. La force est donc une marchandise comme toutes les autres choses nécessaires à la vie, et nulle part elle ne doit être plus précieuse qu'à Paris, où il s'en trouve peu naturellement.

La force de moindre prix est celle de l'eau courante que l'on emploie à moudre le grain; il paraît que celle exigée pour la mouture d'un setier de blé vaut à-peu-près $\frac{1}{4}$ du prix total de cette opération, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ de franc $=$ $0^{f},5$. l'expression numérique de cette force est égale à 1250 unités (§. 2), dans le cas des roues en dessus, et à 2500 dans

celui des roues en dessous. Si, dans ce dernier cas, 2500 unités de force valent $0^{f},5$, 1000 valent $0^{f},2$.

§. 4. *Valeur de la chute d'eau de Marly.*

On verra à l'article II, que la chute d'eau de Marly donne communément plus de 7.776.000 unités de force par jour; et comme on ne peut y appliquer que des roues en dessous, cette force n'est capable de moudre que $\frac{7776000}{2500} = 3110$ setiers de blé par jour, c'est-à-dire environ ce que la ville de Paris toute entière en peut consommer. Si la force de la mouture d'un setier de blé vaut $0^{f},5$, il est évident que la force de la chute de Marly vaut $3110 \times 0,5 = 1555$ francs par jour, ou environ 550,000 francs par an, dont le capital à 5 pour cent = 11,000,000 francs.

Pour donner une idée du prix de la force, j'ai choisi son emploi le moins cher, la mouture du grain; mais on pense bien que, près d'une grande ville comme Paris, il y a une infinité d'applications plus productives d'une chute d'eau; cependant, à cause du travail qu'il y aurait à faire pour utiliser la chute d'eau de Marly, je consens à en réduire la valeur presqu'à moitié, et par conséquent de ne la prendre que pour un capital de 6,000,000 francs, pouvant donner un revenu net de 300,000 francs.

Tout le monde sait combien la force peut avoir de prix pour une nation industrieuse: qu'on ouvre les yeux sur l'Angleterre, et l'on verra par-tout les travaux les plus immenses entrepris pour s'en procurer à bas prix; on verra des machines à feu s'élever, et donner naissance à deux grandes villes, à Manchester et Birmingham. Après de pareils exemples, voudra-t-on continuer de rendre tout-à-fait inutile pour l'industrie parisienne une aussi immense force que celle de la chute d'eau de Marly, qui se trouve égaler celle de 70,000 hommes environ?

Je crois avoir mis hors de doute que la force est une chose précieuse qu'il faut économiser. Quant au prix principal de construction et à celui d'entretien d'une machine, il est évident que le moindre est le

meilleur; ainsi le problème de la meilleure machine consiste réellement à trouver celle qui remplira le but que l'on se propose avec *la moindre action*, c'est-à-dire, *la moindre mise capitale, soit en force, soit en argent.*

I I.

VALEUR DES ANCIENNES MACHINES HYDRAULIQUES À ROUES ET À POMPES.

§. 1.er *Complication des anciennes Machines.*

ÉLEVER de l'eau a été de tous temps un problème dont la meilleure solution a beaucoup inquiété les mécaniciens; ce qu'ils ont fait est bien peu satisfaisant, et les machines hydrauliques sont, en général, des instrumens très-chers et peu productifs.

J'aurais beaucoup de peine à citer quelques observations bien faites sur des machines hydrauliques destinées à profiter d'une chute d'eau; seulement j'ai recueilli de beaucoup de données éparses, que les meilleures machines à roues et à pompes ne rendaient pas $\frac{1}{10}$ de la force qu'on leur confiait : j'ignore s'il en existe dont le produit réel surpasse celui que j'indique; mais cela ne pourrait avoir lieu que dans des positions très-différentes de celle de Marly, et avec des soins excessifs et très-coûteux.

Il faut remarquer qu'on ne peut appliquer à la chute d'eau de Marly que des roues en dessous, et que, d'après l'expérience (*voyez* les Expériences de *Smeathon*), les meilleures roues de ce genre ne peuvent donner à leur axe que $\frac{3}{10}$ de la force qu'elles dépensent; ainsi, quand le mouvement de la roue a lieu, il y a déjà $\frac{7}{10}$ de la force échappés à la machine. Si, dans le premier effet intermédiaire, il y a une aussi grande quantité de force mal employée, que l'on imagine ce que peuvent devenir les $\frac{3}{10}$ qui restent, quand ils seront appliqués à des manivelles, des pistons, &c. qu'il s'agit de mouvoir fort inutilement.

§. 2. *Effet de l'ancienne Machine de Marly.*

MANQUANT de données précises étrangères à la position de Marly je profiterai de celles que l'on a sur l'ancienne machine, et qui son

M. *Deparcieux*, qui a tenté ce moyen, n'a pu faire parvenir l'eau que jusqu'au pied de la tour qui termine l'aqueduc. Il paraît que, quand la pression qui chargeait les corps de pompes atteignait un certain point, toute l'eau pressée dans la pompe s'échappait entre l'enveloppe et le piston. On conçoit aisément que pour obtenir un succès de ce genre, il ne fallait pas avoir le talent de M. *Deparcieux*, mais bien celui d'un bon ouvrier qui sache introduire dans la pompe un piston tellement exact, que la pression ne puisse faire suinter l'eau entre le piston et la pompe. Mais quand on aurait réussi à élever d'un seul jet, la machine qui l'aurait fait, l'aurait-elle fait long-temps et avec fruit? M. *Borda* avait aussi tenté cette élévation de l'eau à de grandes hauteurs; et il avait réussi à la porter à 460 pieds d'un seul jet. Il ne faudra pas, sans doute, attribuer ce succès à M. *Borda;* il faut le regarder comme plus heureux que M. *Deparcieux*. Il a eu le bonheur de rencontrer dans le pays où il s'est trouvé, un ouvrier plus adroit que celui qu'avait employé M. *Deparcieux;* mais ce talent supérieur d'un ouvrier sur celui d'un autre, pour un succès momentané, ne l'a pas été pour la durée, et M. *Borda* a bientôt renoncé à son succès, qui lui paraissait trop cher, à cause des réparations continuelles qu'exigeaient ses pompes.

On a renouvelé dans ces derniers temps les tentatives de M. *Deparcieux*, et on a été plus heureux que lui : on a porté l'eau au sommet de la tour, dont M. *Deparcieux* n'avait pu atteindre que le pied ; mais ce succès sera-t-il durable, et a-t-on réellement obtenu l'effet que l'on desire? Rappelons-nous qu'il s'agit de faire monter l'eau au sommet de la tour, avec *la moindre action possible;* voyons donc d'abord quelle a été la dépense de force de la machine nouvelle, et quel a été son produit.

D'après plusieurs observations faites par l'élève ingénieur des ponts et chaussées nommé commissaire à cet effet, il résulte que la masse d'eau dépensée s'est trouvée une fois de 947, quand celle montée était 1, puis elle a augmenté jusqu'à 3300, celle montée restant toujours 1. Puisque les hauteurs de chute et d'ascension sont entre elles comme $1^{m},62 : 155^{m},5 :: 1 : 95$, il suit que la force donnée par la machine

était 95, quand celle dépensée était 947 ou 3300 : c'est ici un de ces cas de physique, où, loin de prendre une moyenne entre plusieurs observations, on doit regarder comme constante celle qui donne le moindre produit. En effet, si la pompe a d'abord donné $\frac{95}{1185}$ ou $\frac{8}{100}$ de la force, c'est parce qu'elle était bien graissée, parce que le piston, encore tout neuf, laissait passer peu d'eau entre lui et le corps de pompe; mais cet état favorable n'a lieu qu'un instant, et après quelques momens d'action, le piston formé d'un corps mou a bientôt obéi à l'énorme pression qu'il supporte pour laisser échapper une grande quantité de l'eau qu'il devait refouler vers la tour; de sorte que, pour avoir la même quantité d'eau élevée, il faut hâter le jeu du piston, et par conséquent lever la vanne pour dépenser une plus grande quantité d'eau dans le même temps. Or, je dis que ce dernier état doit être pris pour l'état ordinaire de la machine; trop heureux si elle y persiste, car il doit nécessairement aller toujours en empirant.

S. 4. *Valeur des nouvelles Pompes. La force totale de la rivière ne doit pas suffire pour élever les 50 pouces d'eau que l'on demande.*

J'AI dit que la force utilisée s'était trouvée dans le rapport de 95 à 3300 ou de 28 à 1000, c'est-à-dire, à-peu-près dans le même rapport que dans l'ancienne machine, dont je crois avoir fait apprécier le mérite. Ainsi les nouvelles pompes n'offrent, pour l'emploi de la force, presqu'aucun avantage sur les anciennes. Loin de là, il est certain que si les observations que j'ai citées n'avaient pas eu lieu dans le commencement de l'existence de ces pompes, mais bien pendant dix ans, comme celles que j'ai rapportées sur les produits de l'ancienne machine, il est certain, dis-je, qu'au lieu de trouver ces nouvelles pompes capables d'un effet de $\frac{28}{1000}$, on les aurait trouvées moins productives. Or, l'ancienne machine ne fournissait que 61 pouces d'eau; donc les nouvelles pompes, en employant toute la force de la rivière, ne suffiraient pas probablement pour élever les 50 pouces d'eau dont on a besoin à Versailles.

Si l'on perd sur l'emploi de la force dans l'usage de ces nouvelle pompes, on gagnera assurément sur la dépense d'établissement : mais quelle somme portera-t-on leur entretien, et ne surpassera-t-il pa celui de l'ancienne machine ? C'est ce que l'on peut conjecturer san doute; car, si en élevant d'un seul jet, on épargne tout cet attirail im mense de chaînes communiquant le mouvement, et un grand nombre d pompes; en revanche, on donne à supporter à celles que l'on doit em ployer, une pression destructive beaucoup plus considérable que cell des anciennes.

Je n'ai pas voulu examiner chacun des projets imaginés; je n'ai desi que de donner une idée de ceux que l'on peut employer, et cela m suffira, parce que les avantages du belier hydraulique sont si grands par rapport à ceux des autres machines, qu'il est fort inutile de co tinuer plus long-temps cet examen.

III.

VALEUR DU BELIER HYDRAULIQUE.

Les savans les plus distingués y crurent dès que je l'annonçai; d'autr en doutèrent long-temps : mais plus de deux cents machines en activi sont une preuve assez grande, et on est généralement convaincu. l'on avait consulté, sur le produit du belier, *Huyghens*, *Bernoulli* et to les géomètres qui ont fait usage du principe de la conservation des forc vives, ils n'auraient pas hésité de porter ce produit très-près du *maximu* En effet, la pratique confirme que le produit utile et journalier, pe quelquefois être de $\frac{80}{100}$ de la force développée; qu'il est souvent de $\frac{66}{100}$ et jamais moindre de $\frac{50}{100}$ dans les positions les plus défavorables. T sont les résultats de plus de cinquante observations faites avec soin France, en Prusse et en Angleterre. Mais le belier hydraulique est capable d'élever de grandes masses d'eau à de grandes hauteurs ? Vo la question aujourd'hui indécise.

Il ne se présente que rarement des occasions d'élever de grandes mas

d'e

d'eau à de très-grandes hauteurs; il n'y en a pas d'ailleurs qui soit entièrement semblable à celle de Marly, ainsi je ne peux répondre que par des expériences isolées.

Résultats d'expériences sur le Belier hydraulique.

1.° Le plus grand belier exécuté est celui de MM. *Wat* et *Bouleton*, à Soho en Angleterre : il a un pied de diamètre, et il est mis en action par une chute d'eau de 3 pieds : il élève l'eau à 28 pieds, et rend $\frac{64}{100}$ de la force qu'il emploie. M. le comte *de Rumbfort* a vu ce belier, et je peux d'ailleurs fournir la preuve de son existence, par la correspondance de MM. *Wat* et *Bouleton*. La dépense *maximum* d'un orifice d'un pied de diamètre, sous une pression de 3 pieds, est d'à-peu-près 1660 pouces de fontainier; mais, dans le belier, la dépense n'est que $\frac{1}{10}$ de celle *maximum*, à cause des alternatives. Ainsi le belier de MM. *Wat* et *Bouleton* ne doit dépenser qu'environ $\frac{1660}{10}$ = 166 pouces de fontainier, c'est-à-dire 3170 mètres cubes en vingt-quatre heures; et puisqu'il rend $\frac{64}{100}$ de la force, il doit élever à 28 pieds 11,8 pouces d'eau, ou 224 mètres cubes en vingt-quatre heures.

2.° Il y a environ six ans que j'ai fait une expérience en présence des commissaires de l'Institut, où l'on a vu un belier hydraulique de 2 pouces de diamètre, mis en action par une chute de 10 pieds, vaincre une pression égale à celle d'une colonne d'eau de 1280 pieds de hauteur.

3.° Un usage continuel de plus de vingt mois, n'a en rien dérangé un belier hydraulique qui profite d'une chute d'eau de 6 pieds, pour en élever à 173 pieds. Ce belier est établi chez M. *de Noailles de Poix*, qui en a donné certificat. (*Voyez* la Lettre du Maire de Lyon, *page 317.*)

Ainsi il est constant, par expérience, que le belier peut élever des masses d'eau très-considérables; que la hauteur à laquelle il peut la porter, est au moins de 1280 pieds, et qu'un usage continuel assez long, dans le cas de la plus grande ascension exécutée utilement, ne l'a pas dérangé. Mais ces résultats sont donnés par trois expériences, et il s'agit de savoir si une seule pourrait les réunir; c'est ce qu'un essai peut décider.

IV.

BELIER HYDRAULIQUE CAPABLE D'ÉLEVER DE L'EAU DE LA RIVIÈRE DE SEINE À L'AQUEDUC DE MARLY.

J'AI desiré que l'exécution de ce belier pût ne laisser aucun doute sur la certitude du succès de la totalité de la machine, et en même temps j'ai voulu ne pas m'écarter sensiblement des expériences faites, pour ne pas même courir de chances dans cet essai, et ne pas entraîner à des dépenses importantes; en conséquence, ce belier sera à-peu-près semblable à ceux qu'il faudrait exécuter : il n'aura que 1 pied de diamètre, comme celui de MM. *Wat* et *Bouleton :* il ne sera supposé capable que d'élever à l'aqueduc environ 20 mètres cubes d'eau par jour, il sera construit en grande partie avec des tuyaux de fonte de fer qui sont sans utilité à l'ancienne machine, et on le placerait à-peu-près dans la position qu'a indiquée la commission nommée par S. Ex. le Ministre de l'intérieur, position dans laquelle cet essai ne nuit nullement à l'ancienne machine.

Je donne au belier la forme d'un syphon, afin que ses pièces mobiles soient le plus souvent hors de l'eau, et que l'on puisse les visiter à volonté.

§. 1.er *Description succincte de la Machine* *. (Voy. la Planche.)

CC est une digue qui retient les eaux de la Seine à la hauteur *c'c'*; de sorte qu'il y a ordinairement une différence de $1^m,62$ entre l'amont et l'aval *cc; A* est un radier en maçonnerie et en charpente; *EM* est une espèce de pyramide tronquée creuse, en fonte de fer, dont la petite base est un carré de $0^m,33$ de côté; la grande base porte en avant des rainures, dans lesquelles peut glisser une vanne en bois, destinée à fermer à volonté l'ouverture *B*.

FGHI est un tuyau cylindrique en fonte de fer, de $0^m,33$ de

* Cette description ne donne de la machine que l'idée nécessaire pour en comprendre la théorie, et elle est fort éloignée de celle qui convient pour l'exécution.

iamètre [1 pied]; il est recourbé en *GF*, et se prolonge d'une manière nclinée à l'horizon, sur une longueur d'environ 50 mètres [150 pieds], 10 mètres [30 pieds] de *I*; son épaisseur est de $0^{m},041$ [18 lignes], u lieu de $0^{m},0272$ [1 pouce] qu'elle avait eue jusque-là : ce long ylindre porte le nom de *corps de belier*. *f* est un entonnoir, muni d'un obinet, par lequel on peut emplir d'eau le syphon ; c'est ce que l'on omme *amorcer*. A l'extrémité *I* se trouve la tête de belier ; c'est ici ue sont les soupapes, les seules parties mobiles de toute la machine. Cette tête de belier est un parallélipipède dont la base a $0^{m},33$ de côté ntérieur, sur $1^{m},40$ [$4^{pi}4^{po}$] de longueur ; son épaisseur est de $0^{m},0544$ 2 pouces]; le fond et le dessus sont percés de chacun seize trous ; eux du fond *KK* sont recouverts par autant de soupapes, que je nomme oupapes d'arrêt. La surface des ouvertures nettes qu'elles recouvrent, st égale à 855 centimètres carrés [1 pied circulaire]. Les soupapes sont n cuivre, ajustées sur des cercles de même métal, fixées par des écrous sur e fond de la tête de belier : elles sont habituellement tenues ouvertes par e petits ressorts en spirale, placés le long de leurs tiges ; douze trous u dessus, *IL*, sont fermés par des plaques en fonte de fer, qui laissent asser des tiges vissées en descendant dans l'intérieur de la tête de belier, t destinées à régler le jeu des soupapes d'arrêt. Sur les quatre trous du nilieu s'élève une pièce prismatique *JO*, aussi en fonte de fer ; sur l'un le ses côtés est adapté le tuyau d'ascension *QT*, dont le diamètre a $1^{m},054$ [2 pouces], et qui va rejoindre la conduite continuelle exis- ante de la rivière à l'aqueduc. Cette pièce *JO* est le commencement lu réservoir d'air *R*.

Les quatre trous qu'elle enceint sont fermés par des plaques de cuivre, ortant chacune quatre orifices recouverts de petites soupapes : ces rifices ont environ $0^{m},0294$ de diamètre ; ainsi la surface des seize $= 0^{m.car.},0107 = \frac{1}{8}$ de celle d'une section du corps de belier.

Sur la pièce *JO* s'élève un cylindre creux *R*, terminé par un hémi- phère ; son diamètre est de $0^{m},33$ [1 pied], et sa hauteur de *J* en *P* est de 2 mètres [6 pieds] : il est formé de deux tuyaux semblables à ceux qui

terminent le corps de belier vers la tête, et par conséquent son épaisseur est de $0^m,041$: on pourra le renforcer extérieurement, comme on le desirera, mais cela est inutile.

La tête de belier est fermée en *LK* par une plaque de fonte de même épaisseur qu'elle.

Sous le fond *KK* est appliquée une pièce de fonte de fer pyramidale tronquée : elle a $1^m,33$ [4 pieds], sur $0^m,33$ [1 pied] intérieurement en *VV;* puis elle se rétrécit sur la grande dimension, jusqu'à n'avoir plus que $0^m,50$ [18 pouces], sur 33 centimètres [1 pied] en *V'V'* : sa hauteur est de $0^m,66$ [2 pieds] seulement, et son épaisseur de $0^m,027$ [1 pouce].

U est un tuyau prismatique de fonte de fer, de $0^m,50$ [18 pouces], sur $0^m,33$ [1 pied]; sa longueur, ainsi que celle de la colonne ascendante *EMF*, est à déterminer d'après les observations de la hauteur des eaux à la machine de Marly : il suffit qu'elle soit telle, que la tête de belier se trouve le plus souvent d'environ $0^m,66$ [2 pieds] au-dessus des eaux communes de l'amont. Je crois que pour cela sa hauteur totale de *Y* en *JO* devra être de $2^m,65$ [8 pieds].

U est terminé dans sa partie inférieure par une pièce analogue à celle *EM*, mais qui a une ouverture d'au moins $0^m,183$ [1 pied carré, 5], que peut aussi fermer une vanne en bois; elle porte également sur le radier.

A cette idée de l'ensemble de la machine, il faut ajouter celle de trois choses fort utiles à son succès : 1.° une petite soupape *r*, qui peut s'ouvrir de dehors en dedans, et qui est destinée à introduire, à chaque révolution, une petite quantité d'air sous le diaphragme d'ascension.

2.° Une portion de cet air introduit, reste constamment dans cette position, au moyen de viroles attachées aux orifices d'ascension, qui ne permettent qu'à un excès d'air d'y passer, et il y a ainsi un volume d'air à-peu-près constant, qui forme une espèce de matelas destiné à transmettre aux soupapes d'ascension un mouvement moins brusque.

3.° Enfin il est très-avantageux pour la plus grande solidité de la machine, que les orifices d'ascension soient petits, et dès-lors on court

tuyaux de dépense U pleins d'eau ; les soupapes d'arrêt ouvertes, et celles d'ascension fermées; tout est en repos. Si l'on ouvre les vannes, il s'établira dans l'espèce de syphon que forme ce belier, un courant qui portera les eaux de l'amont à l'aval.

Pression motrice.

La pression motrice sera la différence de niveau entre les eaux supérieures et celles inférieures : elle est ordinairement de $1^m,62$ [5 pieds].

Si la colonne d'eau qui, dans le cylindre U, constitue la pression motrice, obéissait librement à la gravité, sa vîtesse s'accélérerait comme celle de tous les corps, à raison de $9^m,72$ [30 pieds] par seconde. La vîtesse maxime qu'elle pourrait acquérir en tombant de sa hauteur, $1^m,62$ [5 pieds], ne serait que de $5^m,63$ [$17^{Pi}3^{Po}$] par seconde; et comme dans le mouvement uniformément accéléré, les temps sont proportionnels aux vîtesses, celui nécessaire à l'acquisition graduelle de cette vîtesse serait $\frac{17.3\times 1}{30} = 0'',58\left(\frac{5.63\times 1}{972}\right) = 0''58$. Mais cette colonne d'eau motrice n'est pas libre; elle ne peut pas tomber sans entraîner avec elle toute la masse qui remplit le belier depuis E en Y. L'atmosphère oblige l'eau à passer par l'orifice libre B, pour aller remplir le vide que la colonne motrice tend à produire en descendant ; par conséquent le mouvement de celle-ci sera retardé en proportion de la masse inerte qu'elle aura à mettre en mouvement. On démontre cette vérité (aux yeux) pour les corps solides, dans tous les cours de physique, avec la machine d'*Atoowd.*

La vîtesse qui s'établira après un certain temps, sera donc à celle qui s'établirait librement pendant le même temps, comme la masse de la colonne motrice est à la masse totale à mettre en mouvement.

J'ai supposé la colonne motrice de $1^m,62$ [5 pieds], et le corps de belier de 50 mètres [150 pieds]. J'aurai donc cette proportion, la vîtesse acquise : $5.63 :: 1.62 : 50 + 1,62 = 51,62$; d'où je tire

l'acquisition de la vîtesse, de $1^m,41$, serait de $6'',9$; c'est donc après ce temps de $6'',9$ que se fermeraient les soupapes d'arrêt.

Il pourrait paraître difficile d'avoir des soupapes telles, qu'elles se fermassent seulement sous une vîtesse donnée. Mais une longue expérience a prouvé que des soupapes de la forme de celles qu'on se propose d'employer, étaient très-faciles à régler, et qu'elles se ferment presque exactement au moment le plus favorable. Les soupapes d'arrêt seront donc réglées de manière à se fermer à-peu-près sous la vîtesse $1^m,41$ [$4^{pi}3$].

DEUXIÈME ÉPOQUE.

Depuis le moment où la pression motrice a commencé à agir, jusqu'à celui où les soupapes d'arrêt ont été fermées, il s'est écoulé $6'',9$. A cet instant remarquable, toute la masse d'eau qui forme le corps de belier, est animée de la vîtesse de $1^m,41$ par seconde; sa manière d'être est de se mouvoir avec cette vîtesse, et nulle puissance imaginable ne peut l'empêcher de le faire, sans lui laisser produire un effet représentatif de la force qui l'anime, et qui, sous quelque forme qu'il se présente, pourra toujours avoir pour expression le produit de la masse en mouvement, par la hauteur génératrice de sa vîtesse; dans le cas présent, cette hauteur $= 0^m,1016$, la masse du corps de belier $= 4,27$ mètres cubes. La force qui l'anime égale donc $0^m,1016 \times 4,27 = 0,4338$ unités (Art. I, §. 2). C'est ici qu'il faut appliquer le principe de la conservation des forces vives. Il faut se persuader intimement qu'un corps en mouvement a en lui la raison suffisante pour y persister, et qu'il ne peut cesser d'y être, qu'en produisant un effet qui sera lui-même raison suffisante d'une quantité de mouvement égale à la première.

J'ai supposé le belier commençant à jouer, et par conséquent les soupapes d'ascension sans aucune pression; dans ce cas, il entrerait une quantité d'eau très-considérable dans le réservoir d'air à la première révolution; mais ce premier effet n'est pas l'important; nul doute que le belier ne puisse faire monter l'eau aux hauteurs inférieures; c'est quand elle sera arrivée à la plus grande hauteur, qu'il faut observer son action.

l'action s'applique à élever les soupapes d'ascension, et à faire entrer dans le réservoir une portion de l'eau en mouvement.

En continuant d'admettre le principe de la conservation des forces vives, il sera facile de déterminer le *maximum* de la quantité d'eau qui peut s'introduire dans le réservoir. En effet, je suis certain que la force de la masse animée, contenue dans le corps de belier au moment où les soupapes d'ascension se lèvent, est un peu moindre que le nombre 0,4338 auquel j'ai fixé son *maximum (pag. 304)*. Et je remarquerai que pénétrer dans le réservoir, c'est s'élever à $155^{m},5$, c'est-à-dire, à la hauteur de la colonne d'eau qui le presse. Par conséquent, en divisant 0,4338 par 155,5, j'aurai le nombre qui représente la quantité de mètres cubes d'eau dont l'élévation à $155,^{m}5$ serait un effet égal à la totalité de la force acquise. Cette masse d'eau égale $0^{m.cub.},00280$.

Si l'eau entre dans le réservoir, ce ne peut être qu'en vertu d'une pression plus grande que celle qui existe ; et si elle y coulait avec une vîtesse maxime de $1^{m},41$ par seconde, ce serait en vertu de la pression génératrice de cette vîtesse, c'est-à-dire, $0^{m},1016$. La tête de belier éprouverait donc une surcompression de $0^{m},1016$, qui s'ajouterait à celle de $155^{m},5$, dont elle était chargée par le seul fait de la communication établie entre elle et le réservoir ; mais, pour que cette surcompression ne fût que de $0^{m},1016$, il faudrait que la vîtesse maxime de l'introduction ne fût que de $1^{m},41$; et, pour cela, il est nécessaire que la surface des orifices d'ascension soit égale à une section du corps de belier ; car la masse d'eau animée doit continuer son mouvement avec la même vîtesse, si elle ne produit pas d'effet. Cependant ces surfaces sont loin d'être égales ; celle des orifices d'ascension est environ huit fois plus petite que celle d'une section du corps de belier ; par conséquent la vîtesse initiale sera huit fois plus grande que celle de la masse d'eau du corps de belier $= 8 \times 1^{m},41 = 11^{m},28$ par seconde ; et comme les pressions sont entre elles comme les carrés des vîtesses, la pression génératrice de cette vîtesse octuple sera 64 fois plus grande que celle de la première vîtesse ; elle égalera $0,1016 \times 64 = 6^{m},50$. Telle est la

d'employer, éprouvaient à la fin de cette chute une pression incomparablement plus grande que celle de la tête du belier. En effet, la colonne d'eau en mouvement de retour, avait une masse 10 fois plus grande que celle du corps de belier : la hauteur verticale de sa chute était à-peu-près $0,66 = \frac{2}{3}$ de celle que représente la vîtesse du belier. Ainsi la force était presque 7 fois plus considérable que celle qui doit animer le belier; elle était encore augmentée de l'action de l'atmosphère pour remplir le vide qui avait été formé : mais ce n'est pas seulement cette augmentation de force qui rend la pression plus grande. Pour que cette pression ne fût pas plus augmentée, il faudrait qu'à l'extrémité inférieure de la conduite, il y eût, comme dans la tête de belier, un orifice d'échappement; mais il n'y en a pas, et l'élasticité seule du métal et de l'eau doit employer la force de la masse en mouvement. Il est bon de dire que si cette conduite n'était pas élastique, elle casserait immanquablement, quelle que fût son épaisseur.

Que l'on remarque bien que, dans la détermination de la pression éprouvée par la tête de belier, s'il n'y avait pas eu d'orifice d'ascension, et ne connaissant pas d'ailleurs l'élasticité des tuyaux, je n'aurais pu assigner la quantité de cette pression, tant elle aurait été grande. Or, c'est le cas des anciennes conduites de Marly; donc il est vrai de dire que *depuis plus de cent ans elles ont éprouvé journellement une pression incomparablement plus grande que celle de 164,5 mètres d'eau que doit supporter la tête de belier; donc le coup de belier, qui paraît si terrible, est presque infiniment moindre que les coups éprouvés par les tuyaux de l'ancienne machine.*

Au surplus, cette vérité se trouve énoncée presque dans les mêmes termes par M. *de Prony* (Rapports sur les différens projets, &c.); il dit « qu'à chaque coup de piston il se manifeste une force vive, qui agit sur » les tuyaux avec une énergie incomparablement plus grande que la » pression simple; on voit, ajoute-t-il, l'effet de cette force dans plusieurs » tuyaux, qui éprouvent à chaque coup de piston une trépidation très-» sensible» ; ainsi *il est évident que les coups de piston étaient beaucoup plus redoutables que ne le seraient les coups de belier.*

que, d'après ces réflexions, il n'est pas douteux qu'en donnant à la tête de belier une épaisseur plus grande que celle des anciennes conduites de Marly, toutes les inquiétudes qu'on pourrait avoir sur sa solidité doivent être dissipées.

Reprenons la suite de l'histoire du jeu de la machine. Nous avons vu l'eau pénétrer dans le réservoir avec une vîtesse maxime plus petite que $11^{m},28$, finissant par 0 *(pag. 306)*; nous avons déterminé que le *maximum* d'eau qui pouvait y pénétrer, est de $0^{m.cub.}028$. Il doit être très-facile de fixer la durée de cette introduction.

En effet, dire que la force qui anime le corps de belier, est au plus capable d'introduire dans le réservoir $0^{m.cub.}028$, c'est dire qu'après cet effet, elle sera toute entière employée, c'est dire que le corps de belier aura perdu tout mouvement, et que par conséquent, de sa vîtesse maxime $1^{m},41$, il aura passé à celle 0; s'il était libre, et qu'en s'élevant verticalement, il passât ainsi de la vîtesse $1^{m},41$ à 0, il emploierait un temps qui serait à $1''$ :: 1,41 : 9,807. Ce temps égale $\frac{1,41}{9,807} = 0,144$; mais, au lieu de s'élever librement, et de lutter contre sa seule gravité, il est obligé de vaincre en outre une pression égale à 165 mètres d'eau, tandis que sa masse n'a que 50^{m} de longueur, c'est-à-dire, que cette pression $\frac{165}{50} = 3^{fois},3$ plus grande que sa propre pesanteur; il est donc dans le même cas que s'il était dans une planète où la gravité serait $3^{fois},3$ plus considérable: mais là il perdrait sa vîtesse dans un temps 3,3 fois moindre; donc il la perdra également dans un temps aussi court $= \frac{0''.144}{3.3} = 0''043 = \frac{1''}{24}$. Telle est donc la courte durée de cette troisième époque, dans laquelle s'est faite l'application entière de la force à l'objet qu'on avait pour but.

QUATRIÈME ÉPOQUE.

QUAND le corps de belier aura ainsi perdu sa force, la pression éprouvée par l'air contenu dans le réservoir lors de l'entrée de l'eau, étant plus grande que celle qui fait équilibre à la colonne d'eau ascendante, celle-ci devra monter, et l'équilibre se rétablir; mais, tandis qu'il s'élève au bassin supérieur, à l'aqueduc, une quantité d'eau égale à celle qui a passé sous la soupape d'ascension, et celle-ci s'étant par conséquent refermée, l'enveloppe du corps de belier, le matelas d'air et l'eau, déchargés de la pression qu'ils éprouvaient, auront repris leur premier volume, et par conséquent refoulé le trop d'eau que cette compression leur avait fait admettre vers la source, car les soupapes d'arrêt sont fermées : la masse du corps de belier aura donc pris un mouvement rétrograde qu'elle continuera; elle tendra par conséquent à faire un vide que l'atmosphère s'empressera de remplir, soit par les soupapes d'arrêt qui se soulèveront, soit par la petite soupape à air. L'aspiration qui aura lieu introduira alors une petite quantité d'air dans la tête de belier; il ira se réunir au matelas dont j'ai parlé, et l'entretiendra constamment le même : l'excès qui pourra s'y trouver, se plaçant naturellement sous les soupapes d'ascension, servira à leur communiquer le mouvement qu'elles doivent prendre dans la révolution suivante, et il pénétrera le premier dans le réservoir d'ascension, où il ira remplacer celui que la grande compression aura pu faire dissoudre par l'eau, et par conséquent la masse d'air servant de régulateur au mouvement d'ascension de la colonne d'eau, sera toujours la même ou à très-peu de chose près.

La durée du retour du corps de belier vers la source, est aussi difficile à évaluer que celle de la seconde époque, puisqu'elle dépend de l'élasticité des enveloppes, &c.; mais il est facile d'apercevoir que ce temps doit être beaucoup plus long que celui de la compression des enveloppes, &c.; parce que la masse du corps de belier, une fois mise en mouvement de retour, le continue jusqu'à ce que son élévation à la

source ait épuisé sa force : on peut cependant être persuadé que ce temps ne sera pas plus de cent fois plus grand que celui de cette seconde époque, c'est-à-dire, égal à celui de la troisième, ou de $0''043 = \frac{1}{24}$ de seconde.

Nous sommes arrivés à l'ouverture de la soupape d'arrêt, c'est-à-dire, au commencement d'une seconde révolution en tout semblable à la première. Nous avons déterminé à-peu-près la durée de chaque révolution, voyons maintenant si son effet, répété autant de fois qu'il est possible dans la journée, peut réellement fournir au sommet de l'aqueduc une masse d'eau de 20 mètres cubes par jour.

§. 3. *Effet du Belier.*

Nous avons vu qu'une révolution avait quatre époques bien distinctes : la durée de la première est de $6'',9$; celle de la seconde est inappréciable; la troisième et la quatrième sont chacune de $0'',043$; ainsi la durée totale d'une révolution est de $6'',9 + 0,043 \times 2 = 6'',986$: à cause du frottement et de quelques autres causes retardatrices, je la supposerai de $7'',5$.

Voyons quelle est la dépense de force pour chaque révolution. Le calcul dont j'ai parlé dans le détail de la première époque du jeu du belier, et l'expérience, m'ont appris que la dépense réelle de l'eau par un belier n'est que $\frac{1}{10}$ de ce qu'elle devrait être théoriquement, sans avoir égard à la contraction de la veine fluide, si l'orifice était libre : or, la dépense d'un orifice de $0^m,33$ de diamètre, sous une pression constante de $1^m,62$, serait de $0^{m.cub.},45$ par seconde; donc, dans le cas de l'application d'un belier convenable à cet orifice, la dépense ne serait que de $0^{m.cub.},045$, et par conséquent, en $7'',5$ de $0,045 \times 7'',5 = 0^{m.cub.},3375$.

La hauteur de la chute étant de $1^m,62$, la force dépensée dans le même temps sera $0,3375 \times 1^m,62 = 0^{unit.},546$.

La hauteur de l'ascension est de $155^{m},5$, par conséquent l'eau montée sera au *maximum* de $\frac{0,546}{155,5} = 0^{m.cub.}0035$.

Ce *maximum* diffère de celui indiqué dans la troisième époque du jeu du belier, parce qu'il est calculé d'après l'user total de la force, tandis que l'autre est déjà affranchi de la plus grande perte de force que fait le belier, qui est celle de l'eau qui s'échappe par les soupapes d'arrêt. Ce serait donc celui-ci qu'il faudrait adopter, s'il ne fallait y faire encore des réductions pour un grand nombre de petites causes trop minutieuses: il sera plus simple d'admettre, d'après l'expérience la moins avantageuse, que le *minimum* de l'eau montée, et par conséquent de la force obtenue, sera $\frac{1}{2}$ du *grand maximum* $0^{m.cub.}0035$; par conséquent l'eau $= \frac{0,0035}{2} = 1^{lit.},75$.

La force sera $\frac{0,0035 \times 155}{2} = 0,273$.

Comme il y a dans vingt-quatre heures 86400 secondes, il se fera 11520 révolutions, et par conséquent on dépensera dans le même temps $11520 \times 0,546 = 6289$ unités de force, et $11520 \times 0,3375 = 3788$ mètres cubes d'eau.

On élevera à l'aqueduc $1,75 \times 11520 = 20160$ litres d'eau, ou $20^{m.cub.},16$: or, je ne me suis proposé que d'élever $19^{m.cub.},1 = 1$ pouce de fontainier; donc le belier que nous avons examiné est réellement capable de l'effet desiré.

V.

IDÉE GÉNÉRALE DE L'EXÉCUTION ENTIÈRE DU BELIER HYDRAULIQUE À MARLY.

Comme il n'y a pour moi et pour tous ceux qui connaîtront bien la théorie du belier hydraulique, aucune raison valable qui puisse s'opposer à ce qu'au lieu de lui donner $0^{m},33$ de diamètre, on lui en donne $0^{m},40$, j'espère qu'après l'avoir vu réussir dans la première dimension, on

on ne craindra pas de ne pouvoir atteindre la seconde, et alors, au lieu de 50 beliers qui auraient été nécessaires pour élever les 50 pouces d'eau demandés, il n'en faudra plus que 25, dont chacun éleverait 2 pouces d'eau.

Au lieu de placer ces machines dans le sens du courant de la rivière, comme celle que l'on exécuterait pour essai, il serait plus convenable de leur donner une direction perpendiculaire au courant, de manière que les têtes de belier seraient toutes appuyées contre une maçonnerie établie au pied de la montagne, et que la réunion de leurs tuyaux particuliers d'ascension serait très-facile à pratiquer : ils se rendraient tous à deux conduites continues de 6 pouces de diamètre, qu'on aurait grand soin de recouvrir de terre, afin d'éviter les variations de température, si funestes sur une aussi grande longueur que celle d'environ 1600 mètres. Que l'on examine donc cette nouvelle machine de Marly, composée de 30 tuyaux simples de 1 pied $\frac{1}{4}$ de diamètre, terminés par une pièce un peu différente, et où des masses, presque insensibles dans une si grande machine, sont seules mobiles. Deux conduites souterraines sont suffisantes pour élever toute l'eau dont on a besoin; mais il ne suffit pas d'apercevoir cette grande simplicité qui promet une durée extrêmement longue, il faut encore voir cette machine économe de force ; il faut la voir réserver le trésor considérable qu'offre la chute d'eau de Marly, et appeler l'industrie pour l'en faire profiter.

J'ai déterminé, article IV, §. 3, que le belier d'essai, qui peut faire monter sur la tour plus d'un pouce d'eau, devait dépenser 6289 unités de force : donc pour en élever 50 ou 1000 mètres cubes environ, il faudrait dépenser $6289 \times 50 = 341450$ unités. Je suppose encore, contre l'expérience, que cette dépense aille jusqu'à 376000 unités : or, suivant M. *de Prony*, la chute de Marly en offre moyennement 7,776,000 unités par jour, il en restera donc 7,400,000 unités, c'est-à-dire, que l'effet desiré ne coûtera au plus que $\frac{1}{20}$ de la force dont on a à disposer. Puisque j'ai évalué à 300,000 francs le revenu annuel de la force totale, et que les beliers n'en consomment que $\frac{1}{20}$, il est clair que l'on peut en

réserver pour une somme annuelle de 285,000 francs : tel est l'avantage que l'on peut attendre de l'économie de la force.

Celui de la dépense capitale est aussi très-important. Le belier d'essai coûterait environ 20,000 fr. ; mais si on en exécutait tous les beliers de $0^{m},40$, il faut porter à 24,000 francs le prix de chacun; et puisqu'il y en a 25, il est évident que le prix total de la machine entière serait de 600,000 francs, *somme encore inférieure à la valeur des matériaux de l'ancienne machine.*

Il ne faut pas ajouter à cette dépense celle d'établissement des conduites d'ascension, parce qu'elles existent ; il faut seulement supposer que leur nouvel arrangement pourrait porter le prix total à 700,000 fr.

Quant à la dépense d'entretien ; dans aucune machine, elle n'est moindre que dans le belier hydraulique ; ainsi elle serait très-peu de chose, et une très-petite portion du prix de la force réservée suffirait pour y satisfaire.

VI.

RÉSUMONS maintenant les vérités établies dans ce Mémoire.

1.° J'ai d'abord démontré que la meilleure machine à exécuter à la chute d'eau de Marly, était celle qui éleverait l'eau demandée, en dépensant le moins de force et d'argent, ou, pour mieux dire, qui emploierait à son existence le moindre capital possible, soit en valeur d'argent, soit en valeur de force.

2.° J'ai fait voir l'état déplorable des machines hydrauliques employées à l'élévation de l'eau avant l'invention du belier hydraulique ; on a vu que la machine de Marly ne rendait autrefois que $\frac{1}{45}$ de la force qu'elle absorbait, et qu'elle avait coûté des sommes énormes. Les nouvelles pompes valent peut-être moins sous le point de vue de l'économie de la force, et elles suffiront à peine pour élever l'eau demandée à l'aqueduc de Marly, en employant la force de toute la rivière.

3.° J'ai exposé les nombreuses preuves que l'on a de la valeur du belier hydraulique ; il rend toujours $\frac{1}{2}$ de la force qu'on lui confie.

4.° J'ai décrit un belier dont l'essai doit coûter environ 20,000 fr.

5.° Enfin j'ai donné l'idée des avantages du placement du belier hydraulique à Marly. Si on compare cette nouvelle machine à l'ancienne, ne s'étonnera-t-on pas de leur immense différence, et ne croira-t-on pas que l'hydraulique a réellement reçu un grand perfectionnement?

Conclusions.

Si on exécute le belier hydraulique à Marly, le capital employé à son exécution serait,

1.° La mise première, de.....	700,000^{f}
2.° Le capital de la diminution de valeur produite sur la chute, que j'ai portée, revenu annuel, à 15,000 fr., et qui serait par conséquent de.....	300,000.
3.° Le capital d'une diminution analogue pour les frais d'entretien, que je porte au même prix de.....	300,000.
En tout.....	1,300,000.

Le capital employé par les nouvelles pompes, serait la mise première que je ne connais guère, mais qui doit excéder..... 1,200,000^{f}

Le capital de l'entretien, qu'on ne peut évaluer, mais qui serait peut-être plus grand que celui de l'ancienne machine, je le supposerai égal, c'est-à-dire, de 65,000 f. dont le capital est..... 1,300,000.

Il faut encore ajouter le capital entier de la chute d'eau, qui est de..... 6,000,000.

Ce qui fait un total de..... 8,500,000.

Ainsi, avec des machines à roues et à pompes, il faut consacrer à l'élévation de l'eau d'un seul jet ou à plusieurs reprises, un capital de 8,500,000 f., tandis qu'avec le belier il n'en faut qu'un de 1,300,000 f.;

mais je suppose, contre toutes raisons, qu'on n'attache aucune valeur à la force de la chute d'eau : il n'en sera pas moins vrai, qu'en employant les machines anciennes, on dépensera au moins le double que si on se servait du belier hydraulique; que pour lui l'entretien est nul, et que pour elles, il faut y attribuer un capital peut-être de plus de 1,300,000 fr.; enfin que le belier peut réserver le moyen de faire monter sur l'aqueduc une quantité d'eau beaucoup plus grande que celle que l'on desire maintenant. En effet, on pourrait attendre jusqu'à 1000 pouces d'eau du belier, c'est-à-dire, vingt fois plus que des autres machines. Ainsi, sous tous les rapports, c'est le belier hydraulique qui doit être préféré : aux yeux du savant, il est bien la meilleure machine, puisqu'il donne le plus grand effet; aux yeux de l'administrateur, il est encore la meilleure machine, puisque son existence exige le moins de capitaux, et qu'il les réserve pour un autre emploi : il doit donc être adopté, quand l'essai aura confirmé mes assertions.

Puisque le belier hydraulique n'exige qu'une dépense première moindre de la valeur des matériaux de l'ancienne machine, il suit que la simple volonté du Gouvernement peut lui donner une machine neuve, et lui réserver une force immense qui se perd sans aucun fruit, et que l'industrie réclame.

Après la lecture de ce Mémoire, Son Excellence le Ministre de l'intérieur a ordonné l'exécution du Belier d'essai, et on en connaîtrait déjà les résultats, si la mauvaise saison ne l'avait pas retardée. (Décembre 1807.)

Lettre de M. Fay-Sathonay, *Maire de Lyon, à M.* Montgolfier.

Lyon, 7 octobre 1807.

Monsieur,

Si je n'ai pas satisfait plutôt au desir que vous m'avez témoigné de connaître l'effet du belier hydraulique que j'ai fait placer dans ma maison

de Fontaine, c'était pour vous donner les détails les plus exacts sur une invention dont la simplicité augmente le mérite : une commission choisie dans le sein de la Société des Arts, a fait sur cette machine un rapport que sa précision m'engage à vous transmettre.

« L'eau de la source équivaut à 6 pouces $\frac{3}{7}$ de pouce de fontainier; » elle a 32 pieds 8 pouces de chute; elle est conduite au belier par un » tube appelé *coursier*, qui a 100 pieds de long.

» Le tube d'ascension a 700 pieds de long; il élève l'eau à 108 pieds » de hauteur: la quantité d'eau dépensée par la source, est de 90 pintes » par minutes; celle fournie par le tube d'ascension, est de 18 pintes par » minute, de 1,080 par heure, et de 25,920 par jour, ce qui équivaut » à la contenue de 128 tonneaux appelés *Beaujolaises*.

» L'eau obtenue par le belier est exactement le cinquième de celle » fournie par la source. »

Après vous avoir annoncé un produit aussi important, et dont les propriétaires peuvent recueillir des avantages si précieux, je suis naturellement amené à vous parler de l'emploi de cette machine sur des eaux courantes, telles que celles d'une rivière. Un résultat d'une utilité si générale avait déjà fixé votre attention, et tous les calculs théoriques auxquels vous vous étiez livré, semblaient en assurer le succès ; il ne s'agissait que de réaliser cette espérance par une expérience positive : c'est à cette expérience que j'attache aujourd'hui la plus haute importance, puisque sa réussite m'offrirait les moyens de multiplier dans l'intérieur de la ville les fontaines publiques, et sur-tout de porter les eaux du Rhône sur la montagne de la Croix-Rousse, source de fertilité dont ce territoire est privé.

Comme simple propriétaire, je profite de vos travaux, de vos découvertes en hydraulique; mais j'attacherais un plus grand prix à en faire jouir mes concitoyens.

Cet avantage serait un nouveau fruit de vos rares connaissances, il vous assurerait à la reconnaissance publique les droits que vous avez à l'estime des savans.

Agréez, &c.

Calcul du Belier hydraulique établi dans la maison de campagne de M. Fay-Sathonay, *Maire de Lyon.*

La quantité d'eau dépensée par la source, en une minute, est de 90 pintes (la pinte est de $0^{li}93$); elle tombe de $32^{pi}\frac{2}{3}$: le produit des deux nombres 90 et $32\frac{2}{3}$, donne 2,940 qu'on peut prendre pour la mesure de la force dépensée en une minute : or, dans le même temps, le belier élève 18 pintes d'eau à 108 pieds au-dessus du point le plus bas de la chute d'eau provenant de la source; donc la mesure de la force utilisée est 1,944, produit des deux nombres 18 et 108; ainsi le belier donne 1,944, tandis que la source dépense 2,940 : le rapport de ces deux nombres est, à des millièmes d'unités près, $\frac{66}{100}$. Ce résultat, joint à ceux que j'ai rapportés dans le n.° 2 de la Correspondance de l'École polytechnique, confirme ce qui a été avancé dans le Mémoire précédent, article III, que le produit utile et journalier du belier n'est jamais inférieur aux $\frac{50}{100}$ de la force qui lui est confiée.

(*Note de M.* Hachette.)

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DU SON,

Lu à l'Institut le 17 août 1807;

Par M. POISSON.

ON sait depuis long-temps que le son est produit par les vibrations de l'air mis en mouvement par le corps sonore; mais M. *Lagrange* est le premier qui ait soumis ce mouvement à l'analyse mathématique, et qui en ait déduit les points principaux de la théorie du son. Ses belles recherches sur ce sujet, sont assez connues de tous les géomètres, pour qu'il soit inutile de les rappeler ici. A l'époque où elles ont été publiées, le calcul aux différences partielles, d'où dépend la solution de ce genre de questions, était à peine connu; on n'était pas d'accord sur l'usage des *fonctions discontinues*, qu'il est cependant indispensable d'employer pour représenter l'état de l'air à l'origine du mouvement: heureusement les progrès de l'analyse ont fait disparaître ces difficultés, et celles qui subsistent encore tiennent à la nature de la question. Nous sommes loin de penser que nous les ayons toutes surmontées; notre but dans ce mémoire est principalement de démontrer plusieurs théorèmes généraux qui nous ont paru devoir intéresser également les physiciens et les géomètres.

Ces théorèmes sont indépendans des mouvemens particuliers des molécules d'air et de la cause qui a produit le son; ils sont relatifs à sa propagation et à sa réflexion, que nous avons considérées sous un point de vue plus général qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. En conservant à l'air ses trois dimensions, M. *Lagrange* et *Euler* ont supposé que la vîtesse

des molécules d'air ne dépend que de la distance à l'origine du mouvement; ou, autrement dit, que l'intensité du son est la même en tous les points de l'onde sonore, en entendant par *onde sonore*, la partie de l'air en mouvement à chaque instant. Dans ce cas particulier, l'équation connue qui renferme la théorie du son, peut être intégrée sous forme finie, et le problème est susceptible d'une solution qui ne laisse rien à desirer; mais, dans le cas général où l'intensité du son varie d'une manière quelconque d'un point à un autre de l'onde sonore, l'équation du son n'est plus intégrable sous forme finie; cependant nous démontrons par un moyen simple, et sans recourir aux séries, que, dans ce cas général, la vîtesse du son est encore la même sur les différens rayons sonores, ce qui revient à dire que l'onde sonore conserve toujours une figure sphérique, dont le centre est celui de l'ébranlement primitif. La loi suivant laquelle l'intensité du son varie sur une même onde sonore, dépend de la cause qui a produit le son. S'il a été produit en comprimant ou en dilatant une portion de la masse d'air, puis en rétablissant tout-à-coup la communication entre cette portion d'air et la masse entière, il est facile de prouver que l'intensité du son sera la même en tous les points de l'onde sonore, du moins quand cette onde sera parvenue à une grande distance de l'origine du mouvement. En effet, décomposons la portion d'air comprimée ou dilatée en une infinité de parties infiniment petites; chacune de ces particules, si elle était seule comprimée ou dilatée, produirait une ondulation dont cette particule serait le centre, et qui se répandrait également dans tous les sens : or, d'après le principe de *Daniel Bernoulli*, sur la coexistence des petites oscillations, toutes ces ondulations peuvent avoir lieu en même temps, sans se nuire en aucune manière; d'ailleurs, il est visible que, quand les rayons de toutes ces ondes partielles seront devenus fort grands par rapport aux dimensions de la portion d'air comprimée ou dilatée, toutes ces ondes se confondront en une seule : d'où l'on peut conclure que, quelle que soit la figure de la portion d'air dilatée ou comprimée, quelle que soit même la loi de la densité dans l'intérieur de cette portion d'air, l'intensité

du

du son sera bientôt la même en tous les points de l'onde sonore. Mais quand la portion d'air que l'on comprime ou que l'on dilate, reçoit en même temps des vîtesses qui peuvent être différentes en grandeur et en direction, pour toutes les molécules qui la composent, on ne peut plus dire comment un ébranlement de cette espèce se répand dans la masse fluide. Ainsi, par exemple, la portion d'air placée à l'extrémité d'un instrument, tel qu'un porte-voix, est à-la-fois comprimée et mise en mouvement par les vibrations de l'air intérieur: l'expérience prouve que l'intensité du son est la plus grande en avant du porte-voix dans la direction de l'axe; mais quel est le rapport qui existe entre cette intensité et celle qui a lieu dans une autre direction, à même distance de l'origine du mouvement? c'est un problème que nous n'avons pas résolu. Il n'en est pas de même de l'intensité du son sur un même rayon sonore, c'est-à-dire, sur une même ligne droite menée par le centre de l'ébranlement primitif; quel que soit cet ébranlement, les vîtesses des molécules d'air situées sur un même rayon, sont en raison inverse des distances au centre du mouvement, quand ces distances sont très-grandes par rapport aux dimensions de la portion d'air primitivement ébranlée. Si donc on compare le son au choc d'un fluide contre un obstacle fixe, qui est ici l'organe de l'ouie; et si l'on suppose ce choc proportionnel au carré de la vîtesse du fluide, il en résultera que l'intensité du son sur un même rayon sonore, doit décroître proportionnellement au carré de la distance au corps sonore, du moins lorsque cette distance est devenue fort grande. L'angle que fait la direction de la vîtesse d'une molécule d'air avec le rayon sonore qui passe par cette molécule, diminue continuellement à mesure que ce rayon augmente; de sorte que bientôt cet angle peut être regardé comme nul; or, il est naturel de penser que c'est la direction des vîtesses des molécules d'air qui nous fait juger de la direction du son, comme c'est leur grandeur qui détermine son intensité; cela explique donc pourquoi la direction du son nous indique l'endroit d'où il est parti.

Nous avons obtenu ces résultats relatifs à la direction et au décroissement

des vîtesses des molécules d'air, en développant l'intégrale de l'équation du son en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la distance au centre du mouvement. Après avoir trouvé cette série, nous l'avons transformée en une intégrale définie, qui nous a fait découvrir une classe très-étendue d'intégrales particulières sous forme finie, qui satisfont à l'équation du son. Chacune de ces intégrales répond à une hypothèse particulière sur la nature de l'ébranlement primitif; elles ont l'avantage de montrer comment cet ébranlement, produit dans une très-petite portion d'air, peut se répandre dans la masse entière, de manière que la vîtesse des molécules d'air ne soit pas la même dans tous les sens; et l'on peut vérifier sur chacune d'elles, que, malgré cette différence de vîtesse, celle du son est toujours la même sur tous les rayons sonores, comme nous l'avons démontré généralement.

Lorsque la masse d'air est terminée par une surface de position fixe, l'expérience fait voir que le son, parvenu à cette surface, est réfléchi par elle. M. *Lagrange* a considéré cette réflexion du son dans un canal cylindrique infiniment étroit; mais personne encore ne l'a déterminée d'une manière satisfaisante, en conservant à l'air ses trois dimensions, et en supposant la surface réfléchissante coupée sous tous les angles possibles par les rayons sonores. Quand cette surface est un plan indéfini, nous démontrons que la réflexion du son se fait comme celle de la lumière sur un miroir plan, c'est-à-dire, que le son réfléchi est le même pour la direction et pour l'intensité, que si l'ébranlement primitif avait eu lieu derrière le plan, à une distance égale à celle du véritable ébranlement primitif en avant du plan, et de manière que la droite qui joint les deux centres fût perpendiculaire à ce plan. Il résulte de là que chaque molécule d'air est mise en mouvement deux fois différentes; chaque fois elle décrit une petite ligne droite, la première fois sur le rayon direct, et la seconde fois sur le rayon réfléchi; ces deux mouvemens sont séparés par un intervalle de temps qui dépend de la distance de la molécule au plan fixe; et quand la molécule est très-voisine du plan, les deux mouvemens coïncident en partie, le commencement de l'un avec la fin

de l'autre ; par conséquent cette molécule décrit une petite courbe dont la nature dépend de celle de l'ébranlement primitif. On peut supposer cet ébranlement tel que les courbes dont nous parlons aient plusieurs points d'inflexion ; c'est le cas où les molécules d'air font plusieurs allées et venues sur le rayon direct et sur le rayon réfléchi. Mais quelles que soient ces courbes, les molécules qui ne touchent pas le plan, pourront en approcher indéfiniment et ne l'atteindront jamais, et les lignes qu'elles décrivent seront toujours terminées par deux droites, l'une dirigée suivant le rayon direct, l'autre suivant le rayon réfléchi ; au contraire, les molécules qui touchent le plan n'en sortiront point, et leur mouvement aura lieu dans le plan même.

Dans le système de l'émission de la lumière, il suffirait de savoir comment la lumière est réfléchie sur un plan, pour en conclure sa réflexion sur une surface quelconque ; parce que l'on peut considérer isolément chaque rayon lumineux, et substituer à la surface réfléchissante son plan tangent au point où ce rayon vient tomber : ce n'est plus ensuite qu'une simple question de géométrie, de déterminer l'intensité de la lumière réfléchie en un point donné, ou, ce qui est la même chose, le nombre de rayons réfléchis qui viennent se croiser en ce point. Mais, quand on veut savoir comment les ondes produites dans un fluide élastique ou dans un fluide incompressible, sont réfléchis par une surface qui termine ce fluide, il faut nécessairement considérer la réflexion de l'onde entière, et déterminer la figure et la vîtesse de l'onde réfléchie. C'est ce qui fait la difficulté du problème, qui ne peut être résolu que pour chaque surface réfléchissante en particulier.

En supposant que le son parte de l'un des foyers d'un ellipsoïde de révolution, et qu'il soit réfléchi par sa surface, nous démontrons rigoureusement que le son réfléchi forme une onde sonore dont le centre est à l'autre foyer de l'ellipsoïde, et qui se rapproche continuellement de cet autre foyer, en conservant toujours la figure sphérique.

Les rayons de l'onde sonore directe et de l'onde sonore réfléchie, qui aboutissent à un même point de la surface réfléchissante, font donc des

angles égaux avec la normale en ce point ; ainsi l'on peut dire que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, comme dans la réflexion de la lumière, quoique cela ne tienne pas à la même cause. De plus, nous déduisons l'intensité du son réfléchi de celle du son direct ; et le calcul fait voir que le rapport de ces intensités sur deux rayons sonores qui aboutissent à un même point de la surface, est le même que celui qui aurait lieu, dans le même cas, entre la lumière directe et la lumière réfléchie. Sur un même rayon sonore, l'intensité du son réfléchi va en croissant à mesure que l'on s'approche du second foyer de l'ellipsoïde ; de manière que, pour des points voisins de ce foyer, cette intensité est beaucoup plus grande que celle du son direct. Ce résultat est confirmé par l'expérience ; car on sait que si l'on parle à voix basse au foyer d'une voûte elliptique, la voix se fait entendre distinctement à l'autre foyer, tandis qu'elle disparaît en tout autre point. Quant à la vîtesse du son réfléchi, elle est la même que celle du son direct ; d'où il suit que le son parvient en un point quelconque, par une ligne brisée, dans le même temps que le son direct emploierait à parcourir une ligne droite égale en longueur à cette ligne brisée.

Ce qui est démontré par un ellipsoïde de révolution dans lequel la distance des foyers est quelconque, convient également au paraboloïde, en supposant que cette distance devienne infinie. Le son produit au foyer d'un paraboloïde de révolution, sera donc réfléchi par sa surface, parallèlement à son axe, et réciproquement.

Nous avons aussi considéré le son produit à l'un des foyers d'un hyperboloïde de révolution, et réfléchi par sa surface concave ou convexe ; cette réflexion présente des propriétés analogues à celles de la réflexion sur l'ellipsoïde. Enfin, si l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, on trouve que le son produit au foyer d'une section conique, est réfléchi vers l'autre foyer.

Il existe une différence sensible entre la vîtesse du son, calculée d'après la théorie, et celle qui résulte de l'expérience. Tous les physiciens qui ont mesuré directement cette vîtesse, s'accordent à la trouver plus grande

compression, la chaleur rendue sensible ne fût pas la même que quand nous comprimons un volume d'air dans un vaisseau fermé : il est donc impossible de déterminer, *à priori*, l'augmentation de l'élasticité due au développement de chaleur qui accompagne la propagation du son. Quoi qu'il en soit, cet accroissement n'en est pas moins incontestable, et l'on ne saurait douter qu'il n'influe sur la vîtesse du son. La différence qui existe entre le calcul et l'observation, provient-elle de cette seule cause? Il nous semble qu'on sera autorisé à le conclure, si l'on ne peut faire aucune objection contre l'analyse d'où l'on a déduit la vîtesse du son, et si en même temps on a eu égard, dans le calcul de cette vîtesse, à toutes les circonstances physiques qui peuvent avoir quelque influence sur le résultat. En comparant alors la vîtesse calculée à la vîtesse observée, on déterminera la quantité de chaleur rendue sensible dans la production du son, et employée à augmenter l'élasticité de l'air. On trouvera dans la suite de notre Mémoire, le résultat de la comparaison de ces deux vîtesses.

Dans le calcul d'où l'on déduit la vîtesse du son, on considère la vîtesse des molécules d'air comme très-petite, et l'on néglige le carré et les puissances supérieures de cette vîtesse. *Euler* avait pensé que la différence entre le calcul et l'observation tenait à cette circonstance. Selon lui, la vîtesse des molécules d'air qui produit le son, n'est pas assez petite pour qu'on puisse négliger son carré sans erreur sensible, sur-tout quand l'intensité du son est fort grande, comme dans les cas où l'on a déterminé sa vîtesse par l'observation. Pour lever cette difficulté, nous avons considéré la propagation du son dans une ligne d'air, et nous n'avons supprimé aucun terme de l'équation du mouvement: Alors cette équation n'a plus la formelin éaire; elle n'est plus intégrable sous forme finie; mais elle admet, sous cette forme, une intégrale particulière qui renferme une fonction arbitraire, et qui suffit pour déterminer le mouvement de l'air, quand on suppose que la vîtesse des molécules, sans être très-petite, est seulement plus petite que celle du son. Au moyen de cette intégrale, on démontre, en toute rigueur, que

la vîtesse du son est indépendante de celle des molécules d'air, ainsi que de la cause qui a produit le son. Le son, fort ou faible, se transmet donc avec la même vîtesse, ce qui est conforme à l'expérience.

Tout ce que nous venons de dire suppose la température et la densité constantes dans toute la masse d'air; mais comme la vîtesse du son est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité de l'air à sa densité (quand on néglige la correction due au développement de la chaleur), il s'ensuit que toutes les fois que ce rapport ne changera pas, la vîtesse du son ne changera pas non plus ; d'où nous pouvons conclure qu'en supposant toutes les couches de l'atmosphère à la même température, la vîtesse du son doit être la même que si la densité de l'air ne variait pas en passant d'une couche à l'autre ; car dans ce passage l'élasticité varie dans le même rapport que la densité, quelle que soit la loi de la pesanteur. Il n'en sera pas de même si la température varie en même temps que la densité ; alors le son ne se transmettra plus d'un mouvement uniforme, et, de plus, sa vîtesse ne sera pas la même sur tous les rayons sonores ; en sorte que l'onde sonore n'aura pas une figure sphérique, comme dans le cas de la température constante. Supposons, par exemple, que la température décroisse proportionnellement à la hauteur verticale, à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, ce qui a effectivement lieu dans la nature, comme il résulte de la théorie des réfractions comparée à l'expérience (*Voyez* le 10.e livre de la Mécanique céleste). Dans ce cas, si l'on imagine un rayon sonore, partant d'un point élevé dans l'atmosphère et aboutissant à la surface de la terre, la température, et par conséquent le rapport de l'élasticité à la densité de l'air, croîtront sur ce rayon, proportionnellement à sa longueur multipliée par le cosinus de l'angle qu'il fait avec la verticale ; d'où l'on peut conclure que le mouvement du son sur chaque rayon sonore, sera de même nature que celui d'un corps pesant qui glisserait sur ce rayon comme sur un plan incliné, et qui partirait de l'origine du rayon avec une vîtesse donnée. Ainsi, la vîtesse du son sera d'autant plus grande que le rayon sonore s'écartera moins de la verticale, et cette vîtesse sur

un même rayon s'accélérera proportionnellement au temps écoulé depuis l'origine du mouvement.

L'équation aux différences partielles qui renferme la théorie du son, change de forme quand on a égard à la pesanteur de l'air et à la variation de température. Pour en déduire directement la vîtesse avec laquelle le son se propage, il faut employer l'intégrale de cette équation, exprimée au moyen d'une intégrale définie, et l'on est conduit de cette manière à l'expression de la vîtesse que nous ont indiquée les considérations précédentes. Cette même intégrale fournit aussi un moyen de déterminer l'intensité du son produit à différentes hauteurs dans l'atmosphère. Lorsque la température est supposée constante, on parvient à ce résultat remarquable, que l'intensité du son ne dépend que de la distance qu'il a parcourue, et de la densité de la couche de l'atmosphère d'où il est parti; de sorte que cette intensité est la même, dans tous les cas, que si l'atmosphère était homogène et d'une densité égale à celle de cette couche. Il suit de là que les personnes qui s'élèvent en ballon, doivent entendre le bruit qui a lieu à la surface de la terre, aussi bien que si elles fussent restées à cette surface même; tandis que le bruit qu'elles produisent dans une couche élevée de l'atmosphère, est aussi faiblement entendu à la surface de la terre, qu'il le serait dans cette même couche, à distance égale. On s'assure aisément que la variation de température, d'une couche à une autre de l'atmosphère, ne saurait altérer sensiblement ce résultat, qui paraît en effet conforme à l'expérience.

En général, il est facile d'obtenir des intégrales définies qui satisfassent à une équation donnée aux différences partielles; mais ces intégrales ne sont le plus souvent qu'un simple jeu d'analyse, qui n'apprend rien sur la nature de la fonction qu'on veut déterminer, et qui n'avance en rien la solution du problème qu'on se propose de résoudre. Celles dont M. *Laplace* a montré l'usage pour intégrer les équations aux différences partielles du second ordre à trois variables (*Mémoires de l'Académie*, année 1779), ne sont pas dans le même cas; ce sont, au contraire, des intégrales de cette forme qui nous ont donné la vîtesse et l'intensité

du

du son, lorsque la densité et la température de l'air sont supposées variables; et M. *Laplace* s'en était déjà servi pour déterminer la vîtesse du son dans le cas où l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, et où l'on suppose que l'intensité ne dépend que de la distance au centre de l'ébranlement primitif. Beaucoup d'autres questions, comme la transmission du mouvement dans une chaîne pesante, la propagation du son dans un tuyau dont la largeur n'est pas constante, les vibrations des cordes inégalement épaisses, se résolvent au moyen des intégrales définies. Pour en donner un exemple, nous avons résolu, à la fin de notre Mémoire, le problème de la chaîne pesante, en la supposant homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue.

Équations différentielles du Mouvement de l'air.

[1.] POUR prendre la question sous le point de vue le plus général; considérons un fluide élastique dont toutes les molécules sont soumises à l'action de forces quelconques. Soient m une de ces molécules; x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de cette molécule, au bout du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement; u, v, v' les trois vîtesses de m, au même instant, respectivement parallèles aux axes des x, y, z; enfin, soient, toujours au bout du temps t, ρ et p la densité de m et la pression que cette molécule supporte en vertu de son élasticité, cette pression étant rapportée à l'unité de surface. Si la température était la même dans toute la masse fluide, p serait proportionnelle à ρ, d'après la loi de *Mariotte*; généralement p dépendra de la température et de la densité de m; mais nous supposerons le fluide tellement disposé, que les molécules de même densité aient aussi même température, et alors nous pourrons regarder p comme fonction de ρ seulement.

Décomposons toutes les forces appliquées à la molécule m, en trois autres X, Y, Z, dirigées respectivement suivant les coordonnées x, y, z, et tendantes à augmenter ces coordonnées. La formule $Xdx + Ydy + Zdz$

est une différentielle exacte, toutes les fois que les forces appliquées au point m sont dirigées vers des centres fixes ou mobiles, et que chaque force n'est fonction que de la distance du point m au centre vers lequel elle est dirigée; ce qui est le cas de toutes les forces de la nature. Nous pouvons donc faire

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,d\zeta = dq,$$

q étant une fonction de x, y, ζ. Nous supposerons également que la formule $u\,dx + v\,dy + v'\,d\zeta$ soit une différentielle exacte, et nous ferons

$$u\,dx + v\,dy + v'\,d\zeta = d\Phi,$$

Φ désignant une fonction de x, y, ζ, t, et la différentielle $d\Phi$ étant prise seulement par rapport à x, y, ζ. Cette supposition est permise toutes les fois que le fluide ne fait que des oscillations très-petites autour de l'état d'équilibre, et que l'on ne retient dans le calcul que les premières puissances des vîtesses u, v, v'; or, c'est particulièrement ce genre de mouvement que nous nous proposons d'examiner dans la suite de ces recherches. D'ailleurs on démontre que la formule $u\,dx + v\,dy + v'\,d\zeta$ est une différentielle exacte pour toutes les valeurs de t, si cela a lieu pour une seule valeur particulière de cette quantité. Il suffit donc, pour légitimer notre supposition, d'imaginer que l'ébranlement primitif du fluide a été tel, que la formule en question fût alors une différentielle exacte; ce qui comprend le cas où les vîtesses initiales des molécules sont toutes nulles, et une infinité d'autres cas.

Cela posé, les équations du mouvement du fluide se réduisent à deux (*Voyez* la Mécanique analytique), savoir :

$$q - \int \cdot \frac{dp}{\rho} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{d\zeta^2} \right) \ldots (a),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.\rho \frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\zeta} = 0 \ldots\ldots\ldots (b).$$

Comme p est une fonction donnée de ρ, ces deux équations ne renferment que les deux inconnues ρ et φ. En les intégrant, on aurait donc

les valeurs de Φ et ρ en fonctions de x, y, z, t; et, par suite, on aurait celles de u, v, v', au moyen des équations

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad v' = \frac{d\varphi}{dz};$$

par conséquent le problème serait résolu complétement, puisqu'on aurait à chaque instant, et en un lieu quelconque de la masse fluide, la densité, la pression, la vîtesse et la direction du fluide. L'intégration générale de ces équations est impossible; mais elles se simplifient beaucoup, lorsqu'il s'agit de l'espèce particulière de mouvement de l'air qui produit le son; et quoiqu'elles ne deviennent point encore intégrables sous forme finie, on peut cependant en déduire les propriétés les plus importantes de ce mouvement: je veux dire celles qui sont relatives à sa propagation et à sa réflexion.

Propagation du Son dans une masse d'air dont la densité et la température sont constantes.

[2.] Nous ferons abstraction dans cet article de la pesanteur de l'air, et nous supposerons la densité et la température constantes dans toute l'étendue de la masse fluide. Concevons donc une pareille masse d'air en repos; supposons que l'on vienne à en comprimer ou dilater une portion très-petite, et qu'en même temps on communique, par un moyen quelconque, des vîtesses aux molécules qui composent cette portion d'air: cet ébranlement partiel se répandra dans la masse entière, de proche en proche et par ondulations; or, c'est la loi de cette *propagation* qu'il s'agit de découvrir.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la portion d'air primitivement ébranlée soit une sphère dont nous représenterons le rayon par α, et au centre de laquelle nous placerons l'origine des coordonnées x, y, z. La condensation et la vîtesse des molécules varient d'une manière quelconque dans l'intérieur de cette sphère; de sorte que, si la portion d'air ébranlée n'était point une sphère, on pourrait toujours lui supposer

cette figure, pourvu que l'on supposât en même temps que les vîtesses et les condensations sont nulles dans certaines parties de cette sphère. Nous appellerons *onde sonore*, la partie de l'air en mouvement à chaque instant, et *rayons sonores*, les lignes menées du centre de l'ébranlement primitif aux différens points de l'onde sonore. Enfin, nous regarderons comme très-petites les condensations et les vîtesses des molécules d'air qui produisent la sensation du son; et nous supprimerons dans le calcul les produits et les carrés de ces quantités, ainsi que l'ont fait tous les auteurs qui se sont occupés de la théorie du son. Lors même que les condensations et les vîtesses initiales ne seraient pas très-petites, elles ne tarderaient pas à le devenir, puisque l'ébranlement primitif a eu lieu dans une portion d'air dont les dimensions sont très-petites, et qu'il doit se répandre, en tous sens, dans une masse d'air indéfinie.

[3.] Soient D la densité et h la hauteur du baromètre, dans toute l'étendue de la masse d'air, avant que le mouvement ait commencé; faisons $\rho = D(1+\gamma)$, en sorte que γ représentera la condensation, positive ou négative des molécules d'air, pendant le mouvement; en appelant g la gravité, et en prenant pour unité la densité du mercure, on aura gh pour la pression correspondante à la densité D, pression qui est la mesure de l'élasticité de l'air; et d'après la loi de *Mariotte*, la pression deviendrait pendant le mouvement, $p = gh(1+\gamma)$, si la température ne variait pas. Mais ce mouvement étant accompagné d'une compression ou d'une dilatation de l'air, la température doit s'élever ou s'abaisser, et il en doit résulter une variation dans l'élasticité; d'ailleurs la condensation γ étant très-petite, on peut supposer la variation de température proportionnelle à cette condensation; il faudra donc ajouter à la quantité $gh(1+\gamma)$, un terme de la forme $gh.k\gamma$, pour avoir l'élasticité de l'air pendant le mouvement, k étant un coëfficient constant, dont nous déterminerons la valeur dans la suite de ce Mémoire. (*Voyez* l'article ayant pour titre : *Examen des différentes circonstances physiques qui peuvent influer sur la vîtesse du son*).

Ainsi nous aurons $p = gh(1+\gamma+k\gamma)$, et $\int.\frac{dp}{\rho} = a^2.\log.(1+\gamma)$, en faisant, pour abréger, $\frac{gh}{D}.(1+k) = a^2$. Les équations (a) et (b) du n.° 1, deviendront donc

$$a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

en faisant attention qu'on a $q = 0$, puisqu'aucune force n'agit sur les molécules d'air; et en supprimant les termes de seconde dimension par rapport à la condensation γ et aux vîtesses $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$. Éliminant γ entre ces deux équations, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\ldots(1).$$

C'est l'équation connue qui renferme la théorie du son; et quand la fonction φ sera déterminée, ses différences partielles par rapport à x, y, z, feront connaître la vîtesse de la molécule d'air qui répond aux coordonnées x, y, z, respectivement parallèles à ces trois coordonnées, tandis que la différence $\frac{d\varphi}{dt}$ donnera la condensation de la même molécule, en vertu de l'équation $a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0$.

L'équation (1), même en faisant abstraction d'une dimension de l'air, ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right),$$

n'est pas intégrable sous forme finie, c'est-à-dire, que son intégrale générale ne peut être exprimée qu'en série infinie. M. *Legendre* a démontré directement cette proposition (*Mémoires de l'Académie*, année 1787); et d'ailleurs on savait déjà que la dernière équation n'était pas intégrable sous forme finie, dans le cas particulier où φ n'est fonction que de t et $\sqrt{(x^2+y^2)}$; d'où l'on pouvait conclure, à plus forte raison, qu'elle ne l'était pas quand φ est une fonction de t, x, y.

Il est facile d'obtenir des intégrales particulières sous forme finie, qui satisfassent à l'équation (1). Ces intégrales répondent à des hypothèses particulières sur la nature de l'ébranlement primitif; mais, jusqu'à présent, on n'en a trouvé que deux pour lesquelles l'ébranlement primitif soit renfermé dans une portion très-petite de la masse d'air : ce sont les seules qui puissent servir dans la théorie du son, où il s'agit de savoir comment un pareil ébranlement se répand dans la masse entière. Ces deux intégrales se rapportent au cas où l'on fait abstraction de deux dimensions de l'air, et au cas où la quantité φ n'est fonction que de t et $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$; il en existe une infinité d'autres que nous donnerons bientôt.

[4.] TRANSFORMONS les coordonnées x, y, z, en coordonnées polaires qui aient la même origine : soient r le rayon vecteur, u le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe des z, ω l'angle que fait la projection du même rayon sur le plan des x et y, avec l'axe des x; on aura

$$z = ru,\ x = r.\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega,\ y = r.\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega;$$

et l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2.\left(\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{d.(1-u^2)\ \frac{d.r\varphi}{du}}{r^2.du} + \frac{1}{r^2(1-u^2)}.\frac{d^2.r\varphi}{d\omega^2}\right)\ldots(2).$$

On aura, de plus,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dz}.u + \frac{d\varphi}{dx}.\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega + \frac{d\varphi}{dy}.\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega;$$

d'où l'on peut conclure que $\frac{d\varphi}{dr}$ exprimera la vîtesse suivant le rayon r, car les trois termes de la valeur de $\frac{d\varphi}{dr}$, ne sont autre chose que les trois vîtesses $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, décomposées suivant ce rayon.

On trouvera aussi

$$\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} = \frac{d\varphi^2}{dr^2} + \frac{d\varphi^2}{du^2}.\frac{1-u^2}{r^2} + \frac{d\varphi^2}{d\omega^2}.\frac{1}{r^2(1-u^2)};$$

équation qui donnera la valeur de la vîtesse dans sa propre direction ; de sorte que si l'on appelle m, l'angle que cette direction fait avec le rayon r, on aura

$$\cos. m = \frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{dr^2} + \frac{d\varphi^2}{du^2} \cdot \frac{1-u^2}{r^2} + \frac{d\varphi^2}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{r^2(1-u^2)}\right)}}.$$

[5.] En multipliant tous les termes de l'équation (2), par $du\, d\omega$, et intégrant ensuite par rapport à u et à ω, depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$ (π représente le rapport de la circonférence au diamètre), on aura

$$\frac{d^2.rR}{dt^2} = a^2 \frac{d^2.rR}{dr^2},$$

R désignant, pour abréger, l'intégrale $\int. \Phi\, du\, d\omega$. En effet, le terme $\frac{d.(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}}{du}$, multiplié par du, et ensuite intégré par rapport à u, donne $(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}$, quantité nulle aux deux limites $u = 1$ et $u = -1$; et le terme $\frac{d^2.r\varphi}{d\omega^2}$, multiplié par $d\omega$, et ensuite intégré par rapport à ω, donne $\frac{d.r\varphi}{d\omega}$, quantité qui a la même valeur aux deux limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$.

L'intégrale de la dernière équation est

$$R = \frac{f(r-at)}{r} + \frac{F(r+at)}{r},$$

f et F étant les deux fonctions arbitraires. On tire de là

$$r^2 . \frac{dR}{dr} = r.f'(r-at) - f(r-at) + r.F'(r+at) - F(r+at),$$

$$r^2 . \frac{dR}{dt} = ar.F'(r+at) - ar.f'(r-at),$$

en désignant par $f'(r-at)$, $F'(r+at)$, les différentielles de $f(r-at)$, $F(r+at)$, prises par rapport à r, et divisées par dr. Or, si l'on conçoit une surface sphérique dont le rayon soit r, et dont

le centre soit à l'origine des coordonnées, et si l'on décompose la vitesse de chacune des molécules d'air, placées à cette surface, suivant le rayon r qui aboutit à cette molécule; il est évident que $r^2 . \frac{dR}{dr}$ sera la somme de toutes ces vîtesses décomposées, et que $-\frac{r^2}{a^2} . \frac{dR}{dt}$ exprimera la somme des condensations des mêmes molécules. Mais, à l'origine du mouvement, l'air n'a été ébranlé que dans une portion qui s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, autour de l'origine des coordonnées que nous avons placées au centre de l'ébranlement primitif; les deux fonctions $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ doivent donc être nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de r qui surpassent α; condition qui sera remplie, si les fonctions fr et Fr sont nulles pour toutes ces valeurs de r : alors la fonction $f(r - at)$ sera nulle tant qu'on aura $r > at + \alpha$, et la fonction $F(r + at)$ sera nulle toutes les fois qu'on aura $r > \alpha - at$; je dis de plus, que $f(r - at)$ sera aussi nulle, quand on aura $r < at$. En effet, imaginons une sphère dont le rayon soit $\alpha' < \alpha$, et dont le centre soit à l'origine des coordonnées; supposons que les molécules d'air qui font partie de cette sphère, n'aient reçu ni condensations ni vîtesses à l'origine du mouvement, il faudra que $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r < \alpha'$; fr sera donc nulle pour les valeurs de $r < \alpha'$, comme pour les valeurs de $r > \alpha$; donc $f(r - at)$ sera nulle quand on aura $r < at + \alpha'$; et comme cette conclusion a lieu, quelque petit que soit le rayon α', elle subsiste encore quand on a $\alpha' = 0$, et il s'ensuit que $f(r - at)$ sera nulle toutes les fois qu'on aura $r < at$. D'après cela, les valeurs ci-dessus de $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ seront nulles tant qu'on aura $r > at + \alpha$; à l'instant où l'on aura $r = at + \alpha$, les quantités $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ prendront des valeurs autres que zéro, et elles redeviendront nulles aussitôt qu'on aura $r = at$. Les molécules d'air, placées à la distance r de l'origine des coordonnées, ne commenceront donc

donc à s'ébranler que quand on aura $r = at + \alpha$, et leur ébranlement ne pourra durer que jusqu'à ce qu'on ait $r = at$, c'est-à-dire, pendant un temps égal à $\frac{\alpha}{a}$: elles s'ébranleront donc toutes au même instant à très-peu-près, puisque la durée de leur ébranlement sera très-courte, α étant toujours fort petit par rapport à a. Ainsi, de quelque manière que le son ait été produit, *sa vîtesse sera la même sur tous les rayons sonores, l'onde sonore conservera toujours une figure sphérique, et la vîtesse de cette onde sera constante et égale à* a.

Observons que l'on satisfait aux équations $\frac{dR}{dr} = 0$ et $\frac{dR}{dt} = 0$, quand $t = 0$, autrement qu'en prenant $fr = 0$ et $Fr = 0$. En effet, ces équations donnent

$$rf'r - fr + rF'r - Fr = 0,$$
$$F'r - f'r = 0,$$

d'où l'on tire

$$fr = b + cr, \quad Fr = -b + cr,$$

b et c étant des constantes arbitraires. On aurait alors

$$f(r - at) = b + cr - at, \quad f'(r - at) = c,$$
$$F(r + at) = -b + cr + at, \quad F'(r - at) = c;$$

mais en faisant usage de ces valeurs, on trouve que celles de $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ sont nulles pour toutes les valeurs de t, comme si l'on eût pris $fr = 0$, $Fr = 0$. Cependant il était bon de faire cette observation, pour prévenir une difficulté qu'on aurait pu élever contre la rigueur de la démonstration précédente. On pourrait aussi craindre que les fonctions $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dt}$, ne fussent égales à zéro, sans que les vîtesses et les condensations des molécules d'air placées à la distance r de l'origine des coordonnées, fussent nulles ; alors il arriverait que ces molécules seraient ébranlées avant que $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ eussent pris des valeurs, ou après que ces fonctions seraient redevenues nulles, ce qui renverserait notre démonstration.

Mais il est évident que cela ne peut avoir lieu qu'en faisant une supposition particulière sur la nature de l'ébranlement primitif, et en plaçant l'origine des coordonnées d'une manière convenable; d'où il suit qu'en transportant cette origine en un autre point de la portion d'air ébranlée, les fonctions $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dt}$ cesseront de pouvoir être nulles, sans que les vîtesses et les condensations le soient aussi.

[6.] MAINTENANT, si l'on veut connaître la grandeur et la direction de la vîtesse des molécules d'air en chaque point de l'onde sonore, il faut intégrer en série l'équation (2). Pour cela, faisons $x = r - at$, et

$$r\varphi = f(x, u, \omega) + \frac{1}{r} \cdot \int f_1(x, u, \omega)\, dx + \frac{1}{r^2} \cdot \int^2 f_2(x, u, \omega)\, dx^2 + \&c.\ldots. \text{(f)};$$

f, f_1, f_2, &c., désignant des fonctions de x, u, ω, qu'il s'agit de déterminer. Substituons cette série à la place de $r\Phi$, dans l'équation (2), et comparons les termes multipliés par des puissances semblables de r, nous aurons généralement

$$r(n+1) \cdot f_{n+1} = n \cdot n+1 \cdot f_n + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{df_n}{du}}{du} + \frac{d^2 f_n}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{1-u^2},$$

n étant un indice quelconque. De cette équation, on tirera successivement les valeurs de f_1, f_2, f_3, &c., au moyen de f qui restera une fonction arbitraire.

En faisant $x' = r + at$, on satisfera encore à l'équation (2), au moyen de la série

$$r\varphi = F(x', u, \omega) + \frac{1}{r} \cdot \int F_1(x', u, \omega)\, dx' + \frac{1}{r^2} \cdot \int^2 F_2(x', u, \omega)\, dx'^2 + \&c.\ldots \text{(F)},$$

F étant une fonction arbitraire de x', u, ω, et F_1, F_2, F_3, &c., étant d'autres fonctions de x', u, ω, qui se déduisent de la première, d'après l'équation générale,

$$r(n+1) \cdot F_{n+1} = n \cdot n+1 \cdot F_n + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{dF_n}{du}}{du} + \frac{d^2 F_n}{d\omega^2} \cdot \frac{1}{1-u^2},$$

dans laquelle n est un indice quelconque. La somme de ces deux séries donnera l'intégrale complète de l'équation (2).

[7.] L'INTÉGRALE en série de l'équation (2), présentée sous cette forme, est propre à déterminer la vîtesse du son, que nous venons de trouver par un autre moyen. En effet, la portion d'air ébranlée à l'origine du mouvement, étant supposée s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, il faut que les quatre différences partielles $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{d\omega}$, $\frac{d\varphi}{du}$; $\frac{d\varphi}{dr}$, soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de r qui surpassent α; or, on remplit cette condition en supposant,

1.° Que les fonctions $f(r, u, \omega)$ et $F(r, u, \omega)$ sont nulles pour toutes les valeurs de r qui surpassent α, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de u et ω; ce qui fait que les différences partielles de ces fonctions par rapport à u et à ω, et par conséquent toutes les fonctions f_1, f_2, f_3, &c.; F_1, F_2, F_3, &c., seront aussi nulles pour les mêmes valeurs de r;

2.° Que les intégrales $\int . f_1 (r, u, \omega)\, dr$, $\int . F_1 (r, u, \omega)\, dr$, sont prises depuis une valeur de r qui surpasse α, jusqu'à la valeur variable de r; en sorte que ces intégrales seront nulles quand cette seconde valeur de r surpassera aussi α;

3.° Que les doubles intégrales $\int^2 . f_2 (r, u, \omega)\, dr^2$, $\int^2 . F_2 (r, u, \omega)\, dr^2$, sont prises, une première fois, depuis une valeur de r, choisie arbitrairement, pourvu qu'elle surpasse α, jusqu'à la valeur variable de r, et une seconde fois, depuis une valeur de $r > \alpha$, jusqu'à la valeur variable de r; de manière que si cette dernière valeur de r surpasse aussi α, ces doubles intégrales sont nulles; et ainsi de suite.

Tous les termes de la série (f) seront donc nuls, tant qu'on aura $x > \alpha$ ou $r > at + \alpha$; de même tous les termes de la série (F) seront nuls, tant qu'on aura $r + at < \alpha$; donc la fonction φ et ses différences partielles seront nulles, tant que r surpassera $at + \alpha$. Ce sera donc à l'instant où l'on aura $r = at + \alpha$, que les molécules d'air qui sont à la distance r de l'origine des coordonnées, commenceront à se mettre en

mouvement ; ainsi la vîtesse du son sera la même sur tous les rayons sonores, et sur chaque rayon elle sera constante et égale à a, comme nous l'avons déjà vu [n.° 5].

On peut aussi prouver que l'ébranlement des molécules situées à l'extrémité du rayon r, doit cesser quand on aura $r = at$. Il faut, pour cela, imaginer, comme nous l'avons fait plus haut [n.° 5], une sphère qui ait son centre à l'origine des coordonnées, et dont le rayon soit $\alpha' < \alpha$, et supposer que toutes les molécules d'air, comprises dans cette sphère, n'ont reçu ni condensations ni vîtesses à l'origine du mouvement. Dans cette hypothèse, les fonctions f, f_1, f_2, &c.; F, F_1, F_2, &c., devront être nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r < \alpha'$, comme pour les valeurs de $r > \alpha$; et comme cela doit avoir lieu, quelque petit que soit le rayon α', il s'ensuit, quand α' est nul ou infiniment petit, que les fonctions f, f_1, f_2, &c. seront nulles, après un temps quelconque, si la valeur de x, ou de $r - at$, est négative. On conclut de là que tous les termes de la série (f) seront nuls, quand on aura $r < at$; tous les termes de la série (F) seront aussi nuls, si l'on a en même temps $r + at > \alpha$: la fonction Φ et ses différences partielles redeviendront donc égales à zéro, dès l'instant qu'on aura $r < at$.

[8.] En supposant qu'il s'agisse des molécules d'air situées hors des limites de l'ébranlement primitif, et qu'on ait par conséquent $r > \alpha$; il est évident que tous les termes de la série (F) seront nuls, quel que soit le temps t; de sorte que, pour ces molécules, la valeur de $r\Phi$ se réduira à la série (f). De plus, si r est très-grand par rapport à α, ce qui a lieu pour les molécules très-éloignées du lieu où le son a été produit, et si l'on néglige les quantités de l'ordre $\frac{\alpha}{r}$, la série (f) se réduira à son premier terme. En effet, la fonction $f_1(x, u, \omega)$ n'ayant de valeurs que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, il s'ensuit que le terme $\frac{1}{r} \cdot \int \cdot f_1(x, u, \omega)\, dx$ est une quantité de l'ordre $\frac{\alpha}{r}$; de même la fonction $f_2(x, u, \omega)$ étant nulle pour toutes les valeurs de x qui tombent

hors des limites $x = 0$, $x = \alpha$, le terme $\frac{1}{r^2} \cdot f^2 \cdot f_2(x, u, \omega)\, dx^2$ sera une quantité de l'ordre $\frac{\alpha^2}{r^2}$; et ainsi de suite pour les autres termes de la série (f).

On aura donc simplement

$$r\varphi = f(x, u, \omega);$$

divisant par r, et différenciant ensuite par rapport à r, on aura

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, \omega, u)}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot f(x, u, \omega),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{dr},$$

en négligeant le terme divisé par r^2. On trouvera aussi

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{du},$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d.f(x, u, \omega)}{d\omega};$$

et par conséquent [n.° 4],

$$\cos. m = \frac{\frac{df}{dr}}{\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \left(\frac{df}{du}\right)^2 \cdot \frac{1-u^2}{r^2} + \left(\frac{df}{d\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2(1-u^2)}\right]}};$$

où l'on voit qu'à mesure que r augmentera, le cosinus de l'angle m approchera d'être égal à l'unité, c'est-à-dire, que l'angle formé par la direction de la vîtesse de chaque molécule d'air, avec le rayon sonore qui aboutit à cette molécule, diminuera indéfiniment.

Si donc nous considérons la propagation du son à une grande distance du lieu où il a été produit, nous pourrons supposer que les molécules d'air, pendant toute la durée de leur ébranlement, ne sortent pas du rayon sonore sur lequel elles sont placées; alors leur vîtesse sera égale à $\frac{d\varphi}{dr}$, et à cause de $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr}$, on voit que cette vîtesse, pour toutes

les molécules placées sur un même rayon, est en raison inverse de la distance au centre de l'ébranlement primitif; donc si l'on admet que l'intensité du son est proportionnelle au carré de cette vîtesse, il s'ensuivra que cette intensité doit décroître comme le carré des distances augmente, lorsque ces distances sont devenues fort grandes par rapport aux dimensions de la portion d'air primitivement ébranlée. Au reste, cette intensité peut varier d'une manière quelconque, en passant d'un point à un autre d'une même onde sonore, puisque $\frac{df}{dr}$ est une fonction de u et ω, dont la forme dépend de la nature de l'ébranlement primitif, ou de la cause qui a produit le son.

[9.] La série *(f)* peut être exprimée au moyen d'une intégrale définie, relative à une nouvelle variable h. En effet, il est facile de vérifier que l'on a généralement

$$\int^n . f_n(x, u, \omega)\, dx^n = \int . \frac{f_n(x, u, \omega).(x-h)^{n-1}.dh}{1.2.3.....n-1};$$

pourvu qu'on fasse $h = x$, après l'intégration; en prenant donc $\int . f(x, u, \omega)\, dx$, au lieu de $f(x, u, \omega)$, ce qui est permis, et en faisant, pour abréger, $\frac{x-h}{r} = \theta$, la série *(f)* deviendra

$$\int . [f(h, u, \omega) + \theta f_1(h, u, \omega) + \frac{\theta^2}{2} . f_2(h, u, \omega) + \&c.]\, dh.$$

Soit

$$y = f + \theta . f_1 + \frac{\theta^2}{2} . f_2 + \frac{\theta^3}{2.3} . f_3 + \frac{\theta^4}{2.3.4} . f_4 + \&c.$$

Convenons, pour simplifier, d'indiquer par la caractéristique δ, placée devant une fonction quelconque $\downarrow$ de u et ω, cette expression;

$$\delta\downarrow = \frac{d.(1-u^2)\frac{d\downarrow}{du}}{du} + \frac{d^2\downarrow}{d\omega^2} . \frac{1}{1-u^2};$$

nous aurons

$$\delta y = \delta f + \theta . \delta f_1 + \frac{\theta^2}{2} . \delta f_2 + \frac{\theta^3}{2.3} . \delta f_3 + \&c.;$$

équation à quatre variables. Si l'on supposait la fonction Φ indépendante de ω, l'équation (2) ne renfermerait plus que quatre variables, et l'équation (3), d'où dépend la valeur de y, ne serait plus qu'une équation à trois variables : en faisant $\theta = 1 + v$, cette équation prendrait la forme

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dy}{du}}{du} = \frac{d.(1-v^2)\frac{dy}{dv}}{dv};$$

équation fort simple, qui n'est cependant point intégrable sous forme finie.

[10.] Si l'on fait, pour abréger, $\int . y\,du\,d\omega = Y$, l'intégrale étant prise depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, l'équation (3) donnera

$$\frac{d.(2\theta - \theta^2).\frac{dY}{d\theta}}{d\theta} = 0;$$

d'où l'on tire

$$(2\theta - \theta^2)\frac{dY}{d\theta} = \text{const.};$$

mais il faut prendre cette constante arbitraire égale à zéro, sans quoi la valeur de Y ou de $\int y\,du\,d\omega$ renfermerait $\log.\theta$, ce qui ne doit pas être, puisque y représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de θ. On aura donc $\frac{dY}{d\theta} = 0$, et par conséquent Y sera une quantité indépendante de θ; ainsi Y sera une fonction de h, que nous désignerons par $\downarrow h$; mais en ayant seulement égard à la série (f), on a $r\Phi = \int . y\,dh$; d'où il suit $rR = \int . Y\,dh = \int . \downarrow h\,dh$, R représentant, comme plus haut, l'intégrale $\int . \Phi\,du\,d\omega$; et comme on doit faire $h = x = r - at$, après l'intégration, la quantité $\int . \downarrow h\,dh$ sera une fonction de $r - at$, et l'on aura $rR = \text{fonct.}\,(r - at)$. La série (F) donnerait de même $rR = \text{fonct.}\,(r + at)$; par conséquent la valeur complète de rR, sera

$$rR = \text{fonct.}\,(r - at) + \text{fonct.}\,(r + at),$$

comme nous l'avions déjà trouvé [n.° 5].

[11.]

[11.] Les intégrales définies que nous avons substituées aux séries *(f)* et *(F)*, vont nous servir à trouver une classe d'intégrales particulières de l'équation (2), qu'il serait difficile de découvrir en considérant les séries elles-mêmes.

Pour cela, observons que l'on satisfait à l'équation (3), en prenant $y = U.V$, U et V étant des fonctions, la première de u et ω, et la seconde de θ, que l'on déterminera au moyen des équations

$$\frac{d.(2\theta-\theta^2).\frac{dV}{d\theta}}{d\theta} + i.i + 1.V = 0,$$

$$\frac{d.(1-u^2).\frac{dU}{du}}{du} + \frac{d^2U}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2} + i.i + 1.U = 0,$$

dans lesquelles i est un nombre entier et positif, que l'on peut prendre comme on voudra. On pourrait prendre tout autre coèfficient constant, à la place du coèfficient $i.i + 1$; mais en employant un coèfficient de cette forme, les fonctions U et V s'expriment sous forme finie. En effet, si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de l'indéterminée θ, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{[1-2\theta[uu' + \sqrt{(1-u^2)}.\sqrt{(1-u'^2)}.\cos.(\omega-\omega')] + \theta^2}},$$

dans laquelle u' et ω' sont des constantes quelconques, on pourra prendre pour U le coèfficient de la puissance θ^i dans ce développement, lequel coèfficient est une fonction rationnelle et entière de u, $\sqrt{(1-u^2)}.\cos.\omega$, $\sqrt{(1-u^2)}.\sin.\omega$. (*Voyez* la Mécanique céleste, livre III, chapit. II.) D'ailleurs on satisfait à l'équation qui détermine V, en prenant

$$V = A + A_1.\theta + A_2.\theta^2 + A_3.\theta^3 + \ldots + A_i.\theta^i;$$

pourvu qu'on ait entre les coèfficiens A, A_1, A_2, A_3, $\ldots A_i$, l'équation générale

$$2(n+1)^2.A_{n+1} - n.n+1.A_n + i.i+1.A_n = 0,$$

de laquelle on déduira les valeurs de tous ces coèfficiens, au moyen du premier, qui restera une fonction arbitraire de h.

Ainsi l'on aura

$$y = U.(A + A_1.\theta + A_2.\theta^2 + \ldots A_i.\theta^i);$$

et l'on peut admettre cette valeur de y, puisque la relation qui doit exister [n.° 9] entre les valeurs de y et $\frac{dy}{d\theta}$, relatives à $\theta = 0$, a évidemment lieu; car ces valeurs sont $A.U$ et $A_1.U$: or, on a

$$A_1 = -\frac{i.i+1.A}{2}, \quad U = -\frac{\delta U}{i.i+1};$$

d'où il suit

$$A_1.U = \frac{A\delta U}{2} = \frac{\delta.AU}{2}.$$

Maintenant, si l'on remet $\frac{x-h}{r}$, à la place de θ, dans la valeur de y, si l'on multiplie par dh, que l'on intègre par rapport à h, et que l'on fasse $h = x$, après l'intégration; on aura, en supposant la fonction U indépendante de h,

$$r\varphi = U.(fx + \frac{1}{r}.\int f_1 x.dx. + \frac{1}{r^2}.\int^2 f_2 x.dx^2 + \frac{1}{r^3}.\int^3 f_3 x.dx^3 \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{r^i}.\int^i f_i\, x.dx^i),$$

fx étant une fonction arbitraire de x ou de $r - at$, et les fonctions $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 x \ldots\ldots f_i x$, dérivant de la première, d'après l'équation générale

$$2.(n+1)^2.f_{n+1}x - n.n+1.f_n x + i.i+1.f_n x = 0.$$

Comme on peut prendre pour i tel nombre entier et positif que l'on voudra, il s'ensuit qu'on aura une infinité de valeurs particulières de $r\varphi$, qui satisferont à l'équation (2), et la somme d'un nombre quelconque de ces valeurs satisfera encore à la même équation, à cause de sa forme linéaire. On peut aussi prendre pour x, indifféremment $r - at$ ou $r + at$; en sorte qu'on aura deux suites d'intégrales particulières de l'équation (2).

Ces différentes intégrales répondent à des hypothèses particulières

sur la nature de l'ébranlement primitif, qu'on pourra toujours supposer compris dans une portion d'air limitée de toutes parts, comme l'exige la théorie du son. On peut vérifier, sur chacune de ces intégrales, le théorème que nous avons démontré généralement; savoir, que la vîtesse du son est la même sur tous les rayons sonores, quoique son intensité varie en passant d'un rayon à un autre.

[12.] Si l'on donne à i toutes les valeurs possibles en nombres entiers et positifs, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$; que l'on prenne successivement $x = r - at$ et $x = r + at$; enfin, que l'on fasse la somme de toutes ces valeurs particulières de $r\Phi$, en les rangeant suivant les valeurs croissantes de i, on aura l'intégrale complète de l'équation (2), développée en série ordonnée suivant des fonctions rationnelles et entières de u, $\sqrt{(1-u^2)}\,.\,\sin.\,\omega$, $\sqrt{(1-u^2)}\,.\,\cos.\,\omega$, dont la propriété est de satisfaire à l'équation générale,

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dU_i}{du}}{du} + \frac{d^2U_i}{d\omega^2}\,.\,\frac{1}{1-u^2} + i\,.\,i+1\,.\,U_i = 0,$$

dans laquelle i est un indice quelconque.

Nous indiquons cette forme de développement, à cause de son analogie avec la forme du développement que M. *Laplace* a donné pour l'intégrale de l'équation

$$\frac{d.(1-u^2)\frac{dV}{du}}{du} + \frac{d^2V}{d\omega^2}\,.\,\frac{1}{1-u^2} + \frac{rd^2.rV}{dr^2} = 0,$$

et dont il a si heureusement tiré parti dans la théorie des attractions des sphéroïdes et dans celle de la figure des planètes.

En partant de cette propriété des fonctions U_i (Mécanique céleste, liv. III, chap. II), que l'intégrale $\int U_i\,du\,d\omega$, prise depuis $u = 1$ jusqu'à $u = -1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, est égale à zéro, excepté quand on a $i = 0$, on peut aisément retrouver l'équation

$$rR = \text{fonct.}\,(r-at) + \text{fonct.}\,(r+at).$$

Mélange des Sons simultanés.

[13.] La somme des deux séries *(f)* et *(F)* donne la valeur la plus générale de $r\varphi$ qui satisfasse à l'équation (2); cependant quand l'air a été ébranlé dans plusieurs lieux à-la-fois, il serait difficile de déterminer les fonctions arbitraires que ces séries renferment, de manière à représenter l'état de l'air à l'origine du mouvement. On élude cette difficulté, en observant que si l'on transporte l'origine des coordonnées x, y, z en un autre point, et que x', y', z' soient les nouvelles coordonnées, dont on n'a pas changé la direction, l'équation (1) du n.° 3 deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx'^2} + \frac{d^2\varphi}{dy'^2} + \frac{d^2\varphi}{dz'^2}\right);$$

de plus, si l'on désigne par r' le rayon vecteur d'une molécule quelconque, relatif à cette nouvelle origine, par u' le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe des z', par ω' l'angle que la projection du même rayon sur la place des x', y' fait avec l'axe des x', l'équation précédente se changera en

$$\frac{d^2.r'\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2.r'\varphi}{dr'^2} + \frac{d.(1-u'^2)\,\dfrac{d.r'\varphi}{du'}}{r'^2\,.\,du'} + \frac{d^2.r'\varphi}{d\omega'^2}\cdot\frac{1}{r'^2(1-u'^2)}\right),$$

équation que l'on doit regarder comme une transformée de l'équation (2) du n.° 4. On conclut de ce que cette transformée est semblable à l'équation (2) elle-même, que l'on satisfera encore à cette équation (2), en remplaçant dans les séries *(f)* et *(F)* les quantités u, ω, r, respectivement par u', ω', r', ce qui donnera de nouvelles séries que nous désignerons par *(f')* et *(F')*; d'ailleurs, à cause de la forme linéaire de l'équation (2), on peut ajouter ces nouvelles séries aux anciennes, et la somme satisfera également.

Maintenant, si l'air a été ébranlé à-la-fois vers l'origine des coordonnées r', u', ω' et vers celle des coordonnées r', u', ω'; si le premier ébranlement s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, et le second,

puis $r' = 0$ jusqu'à $r' = \alpha'$; on représentera cet état primitif de l'air, supposant que les fonctions arbitraires de $r - at$ et $r + at$ qui trent dans les séries (f) et (f'), sont nulles pour toutes les valeurs ces quantités qui sont négatives, ou qui surpassent α, tandis que s fonctions arbitraires de $r' - at$ et $r' + at$, que renferment les ries (f') et (F'), sont nulles pour toutes les valeurs de $r' - at$ $r' + at$ qui surpassent α', et pour toutes les valeurs négatives de $- at$. D'après cela, il est visible que les deux ébranlemens partiels propageront indépendamment l'un de l'autre, et comme si chacun ux existait seul ; et il en sera de même quand l'air aura été ébranlé plus de deux endroits différens.

En général, désignons par r, u, ω les coordonnées polaires d'une molé- le d'air par rapport à une certaine origine, et représentons par (f) et (F) sommes des séries que nous avons trouvées [n.° 6], pour exprimer la leur de $r\Phi$; désignons de même par r', u', ω' ; r'', u'', ω'', &c., les ordonnées polaires de la même molécule par rapport à d'autres origines ; ient (f'), (f''), (f'''), &c. ; (F'), (F''), (F'''), &c., ce que devien- nt (f) et (F), quand on y remplace les quantités r, u, ω, par leurs alogues r', u', ω' ; r'', u'', ω'' ; r''', u''', ω''', &c. : on satisfera à l'équa- on (2), en prenant

$$\Phi = \frac{(f)}{r} + \frac{(F)}{r} + \frac{(f')}{r'} + \frac{(F')}{r'} + \frac{(f'')}{r''} + \frac{(F'')}{r''} + \text{&c.}$$

ais il est bon d'observer que l'équation

$$\Phi = \frac{(f)}{r} + \frac{(F)}{r},$$

n est pas moins l'intégrale complète de l'équation (2), puisque cette leur de Φ renferme deux fonctions arbitraires ; ainsi l'addition des tres termes n'augmente en rien la généralité de la valeur de Φ, seu- nent cette valeur prend une forme plus convenable pour l'usage que n en veut faire, et nous en allons voir un exemple remarquable dans théorie des *échos*.

Réflexion du Son.

[14.] LORSQUE la masse d'air dans laquelle le son se propage, est terminée par une surface de position fixe, il faut que toutes les molécules adjacentes à cette surface, n'aient aucune vîtesse suivant sa normale ; car il est évident qu'elles ne peuvent que glisser le long de cette surface. Néanmoins, jusqu'à ce que le son soit parvenu à cette surface, il doit se propager absolument comme si elle n'existait pas ; en prenant donc l'origine des coordonnées polaires r, u, ω, au centre de l'ébranlement primitif, il faut que la valeur de Φ renferme d'abord une série de la forme que nous avons trouvée plus haut ; savoir :

$$\Phi = \frac{f(x,u,\omega)}{r} + \frac{1}{r^2}.\int.f_1(x,u,\omega)\,dx + \frac{1}{r^3}.\int^2.f_2(x,u,\omega)\,dx^2 + \&c.;$$

dans laquelle on a fait $x = r - at$, et où f, f_1, f_2, f_3, &c. sont des fonctions de x, u, ω, liées entre elles par une certaine équation, de telle sorte, que la première reste seule une fonction arbitraire [n.° 6]. La forme de cette fonction dépend de la nature de l'ébranlement primitif ; s'il a eu lieu depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$, il faut que la fonction f, et par suite toutes les autres fonctions f_1, f_2, f_3, &c. soient nulles [n.° 7] pour toutes les valeurs de $x < 0$ ou $> \alpha$; par ce moyen, la formule précédente fera connaître la propagation du son, tant qu'il ne sera pas parvenu à la surface de position fixe. Mais pour avoir une formule d'où dépende la propagation du son, quand il aura atteint cette limite, il faut ajouter à la fonction Φ, une autre fonction Φ', que l'on déterminera de manière :

1.° Que cette fonction Φ' soit de même nature que la fonction Φ, c'est-à-dire, qu'elle satisfasse comme elle à l'équation (2) ;

2.° Que, pour chaque molécule adjacente à la surface de position fixe la vîtesse suivant la normale, qui provient de la fonction Φ', soit toujours égale et de signe contraire à la vîtesse suivant la normale, qui provient de la fonction Φ ;

contraire ; par conséquent les molécules adjacentes au plan fixe n'auront jamais de vîtesses perpendiculaires à ce plan.

Après que les deux ondulations seront parvenues au plan fixe, celle qui se fait autour du point c' continuera à se propager au-dessous de ce plan ; les molécules d'air situées au-dessous de ce plan seront donc une seconde fois ébranlées, et le son réfléchi sera évidemment le même que si l'ébranlement primitif qui a produit le son direct, avait eu son centre au point c'. C'est ainsi que la lumière qui part d'un point lumineux placé en avant d'une glace, est réfléchi par cette glace, de manière que la lumière réfléchie est la même en grandeur et en direction, que si elle partait de l'image du point lumineux dans la glace.

Il est donc démontré que quand la surface réfléchissante est un plan indéfini,

1.° Chaque rayon sonore se réfléchit en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion ;

2.° La vîtesse du son réfléchi est la même que celle du son direct ;

3.° L'intensité du son réfléchi à l'extrémité d'un rayon brisé, est précisément celle qui aurait lieu à l'extrémité d'un rayon droit, égal en longueur au rayon brisé, si le son, au lieu de se réfléchir, se fût propagé au-delà du plan fixe.

On voit aisément ce qui aurait lieu, si la masse d'air était comprise entre deux plans indéfinis et parallèles : le son subirait alors une suite infinie de réflexions, semblables à celles de la lumière entre deux glaces parallèles. Nous ne nous arrêterons pas davantage à considérer la réflexion du son sur des surfaces planes ; nous indiquerons seulement un cas particulier où elle se fait d'une manière fort simple ; c'est celui où la masse d'air est terminée par deux plans indéfinis et perpendiculaires entre eux. On déterminera cette réflexion, en plaçant, hors de la masse d'air, des centres fictifs d'ondulations, qui soient tels que les molécules adjacentes aux deux plans ne prennent jamais de vîtesses perpendiculaires à ces plans, soit en vertu du son direct, soit en vertu du son réfléchi par l'un des plans sur l'autre. On trouve qu'il suffit pour

cela

cela de trois centres fictifs ; ainsi il y aura en tout quatre ondulations coexistantes dans la masse d'air, et par conséquent chaque molécule sera ébranlée quatre fois différentes.

[16.] Pour second exemple de la réflexion du son, prenons le cas où le son est produit au foyer d'un ellipsoïde de révolution, et réfléchi par sa surface qui enveloppe de toutes parts la masse d'air. Appelons c et c' les deux foyers de cet ellipsoïde ; plaçons au point c l'origine des coordonnées r, u, ω ; r étant le rayon vecteur, u le cosinus de l'angle que ce rayon fait avec l'axe de révolution, et ω l'angle formé par le plan de ce rayon et de l'axe, avec un méridien de l'ellipsoïde, choisi arbitrairement ; enfin, supposons que le foyer c est le centre de l'ébranlement primitif qui s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a$.

La formule

$$\Phi = \frac{f(x,u,\omega)}{r} + \frac{1}{r^2}.\int f_1(x,u,\omega)\,dx + \frac{1}{r^3}.\int^2 f_2(x,u,\omega)\,dx^2 + \&c.\,;$$

dans laquelle $x = r - at$, fera connaître la propagation du son, telle qu'elle aurait lieu si l'ellipsoïde n'existait pas, et telle qu'elle doit subsister jusqu'à ce que le son ait atteint cette surface. Pour obtenir la formule d'où dépend la propagation du son réfléchi, transportons l'origine des coordonnées au point c' ; l'angle ω restera le même ; nous désignerons par r' le nouveau rayon vecteur, et par u' le cosinus de l'angle qu'il fait avec l'axe de révolution sur lequel sont les deux foyers : de plus, soit b la longueur de cet axe, et faisons, pour abréger, $b - r' - at = x'$; la formule demandée sera

$$\Phi' = \frac{F(x',u',\omega)}{r'} + \frac{1}{r'^2}.\int F_1(x',u',\omega)\,dx' + \frac{1}{r'^3}.\int^2 F_2(x',u',\omega)\,dx' + \&c.,$$

F, F_1, F_2, &c. étant une suite de fonctions qui satisfont à l'équation générale,

$$2.(n+1).F_{n+1} = n(n+1).E_n + \frac{d.(1-u^2)\frac{dF_n}{du}}{du} + \frac{d^2F_n}{d\omega^2}.\frac{1}{1-u^2}\,;$$

de sorte que la première reste seule une fonction arbitraire. Ces fonctions ne sont pas, comme dans l'exemple précédent, de même forme que les fonctions f, f_1, f_2, f_3, &c. qui entrent dans la valeur de Φ; seulement les fonctions F, F_1, F_2, &c. sont nulles pour toutes les valeurs de x' qui surpassent α, ou qui sont négatives, et il existe une certaine relation entre les deux fonctions arbitraires f et F, comme nous le verrons bientôt.

Il s'agit donc de prouver que la valeur de Φ' remplit les conditions énoncées plus haut [n.° 14]; or, cette valeur satisfait à l'équation (2), comme celle de la fonction Φ; de plus, si l'on ajoute la valeur de Φ' à celle de Φ, il y aura dans la masse d'air deux ondulations sphériques, la première s'écartant sans cesse de son centre c, et la seconde se rapprochant continuellement de son centre c'. Cela posé, considérons une molécule m située dans l'intérieur de l'ellipsoïde. Pour cette molécule, $r + r'$ sera plus petit que b; par conséquent, lorsqu'on aura $x = \alpha$, on aura au même instant $x' > \alpha$: la première onde sonore parviendra donc au point m avant la seconde; la molécule m sera donc ébranlée par le son direct, comme si la surface fixe n'existait pas. Maintenant, si la molécule m est adjacente à la surface de l'ellipsoïde, on aura $r + r' = b$; donc on aura à-la-fois $x = \alpha$ et $x' = \alpha$, et de même $x = 0$ et $x' = 0$; donc la molécule sera ébranlée à-la-fois par les deux ondes sonores, et ses deux mouvemens cesseront aussi en même temps. Décomposons donc les deux vîtesses de la molécule m, suivant le plan tangent et suivant la normale à l'ellipsoïde; représentons par V et V' les vîtesses normales : ces vîtesses seront données au moyen des différences partielles des fonctions Φ et Φ'; l'une d'elles sera donc une fonction de x, u, ω, r, et l'autre une fonction de x', u', ω, r'; mais toutes ces variables pourront être réduites à trois, savoir, x', u', ω; car le point u étant à la surface de l'ellipsoïde, on pourra exprimer r, r', u en fonctions de u', et à cause de $r + r' = b$, on aura $x = x'$. En posant donc l'équation

$$V + V' = 0,$$

on peut concevoir qu'elle serve à déterminer la fonction F au moyen de la foncion f, puisque cette équation ne contient pas d'autres variables que les trois x', u', ω, qui entrent dans la fonction F; or, cette fonction étant ainsi déterminée, les molécules adjacentes à la surface de l'ellipsoïde, ne prendront jamais de vîtesses perpendiculaires à cette surface.

Après que les deux ondes sonores seront parvenues à la surface de l'ellipsoïde, à laquelle elles arrivent en même temps, la deuxième onde continuera à se propager, en se rapprochant sans cesse du foyer c'; chacune des molécules situées dans l'intérieur de l'ellipsoïde, sera donc une seconde fois ébranlée. Le second ébranlement de la molécule m commencera quand on aura $x' = b - r' - at = \alpha$, c'est-à-dire, au bout d'un $t = \frac{b - r' - \alpha}{a}$, et il durera jusqu'à ce qu'on ait $t = \frac{b - r'}{a}$; or, si l'on prolonge le rayon r' jusqu'à la surface de l'ellipsoïde, que l'on désigne par h la distance du point de rencontre au foyer c, et par k la distance du même point à la molécule m, on aura $h + k = b - r'$; donc le son réfléchi parviendra à la molécule m par le rayon brisé $h + k$, dans le même temps que le son direct emploie à parcourir une ligne droite, égale en longueur à $h + k$, savoir, dans un temps égal à $\frac{h + k - \alpha}{a}$.

En général, si l'on décrit deux sphères des points c et c' comme centres, la première avec un rayon $at + \alpha$, et la seconde avec un rayon $b - at - \alpha$; que l'on retienne seulement les portions de ces surfaces comprises dans l'intérieur de l'ellipsoïde, ces deux portions de sphères contiendront toutes les molécules qui commencent à s'ébranler au bout du temps t, soit en vertu du son direct, soit en vertu du son réfléchi.

[17.] La vîtesse des molécules d'air, d'où dépend l'intensité du son réfléchi, étant donnée au moyen des différences partielles de φ', on voit clairement que cette intensité doit croître à mesure que le son réfléchi

parvient à des points plus voisins du foyer c', puisqu'alors r' diminue. Mais quel est le rapport qui existe entre le son direct et le son réfléchi? Pour le déterminer, il faut résoudre l'équation $V+V'=o$, par rapport à F, afin d'en déduire la valeur de F au moyen de celle de f, qui est censée donnée, et qui dépend de la nature de l'ébranlement primitif. On y parvient aisément, quand on suppose les distances des foyers c et c', aux différens points de la surface de l'ellipsoïde, très-grandes par rapport à α, ce qu'on peut regarder comme généralement vrai; alors la valeur de Φ se réduit à son premier terme [n.° 8], la vîtesse des molécules d'air devient

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx},$$

et cette vîtesse est dirigée suivant le rayon r. De même, la vîtesse des molécules d'air qui provient du son réfléchi, sera dirigée suivant le rayon r', et se réduira à

$$\frac{d\varphi'}{dr'} = -\frac{1}{r'} \cdot \frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'}.$$

Or, les deux rayons vecteurs r et r' qui aboutissent à un même point de la surface de l'ellipsoïde, faisant des angles égaux avec la normale en ce point, il suffira que les vîtesses $\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d\varphi'}{dr'}$ soient égales et de signes contraires pour que la vîtesse normale soit nulle; on aura donc, à tous les points de l'ellipsoïde,

$$\frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx}.$$

Mais, pour tous ces points, $\frac{r'}{r}$ est une certaine fonction de u' que je représenterai par U', u est une autre fonction de u' que je désignerai par $u_{,}$, et x est égal à x'; en supposant donc $\frac{d \cdot f(x, u, \omega)}{dx} = \downarrow (x, u, \omega)$, on aura

$$\frac{d \cdot F(x', u', \omega)}{dx'} = U' \cdot \downarrow (x', u_{,}, \omega).$$

La vîtesse des molécules d'air qui provient du son réfléchi, sera donc égale à $-\frac{U'}{r'} \cdot \downarrow (x', u_{,}, \omega)$, tant qu'il s'agira de molécules éloignées du foyer c'; mais, quand on voudra avoir la vîtesse d'une molécule voisine de ce foyer, il faudra substituer la valeur de $F(x', u', \omega)$, c'est-à-dire, $U' \cdot \int \cdot \downarrow (x', u_{,}, \omega)\, dx'$, dans la série qui donne la valeur de φ'; ne négliger aucun terme de cette série, en prendre les différences partielles, par rapport à x', u', ω, au moyen desquelles on déterminera la grandeur et la direction de la vîtesse demandée, qui ne sera plus dirigée suivant le rayon r'.

[18.] Le son étant réfléchi par une surface concave, son intensité doit être augmentée après la réflexion, c'est-à-dire, qu'elle doit surpasser celle qu'aurait eue le son direct, s'il se fût propagé à même distance au-delà de la surface réfléchissante. Pour connaître le rapport de ces deux intensités, appelons h et $b - h$ les deux rayons vecteurs qui partent des foyers c et c' et qui aboutissent en un point quelconque de l'ellipsoïde; soit $\frac{A}{r}$ la vîtesse, relative au son direct, de la molécule d'air placée sur le rayon h, à la distance r du foyer c. D'après ce qu'on vient de trouver [n.° précédent], on aura $-\frac{A(b-h)}{hr'}$ pour la vîtesse, relative au son réfléchi, de la molécule d'air placée sur le rayon $b - h$ à la distance r' du foyer c'; par conséquent l'intensité du son réfléchi en ce point sera représentée par $\frac{A^2(b-h)^2}{h^2 r'^2}$. Le son ayant été produit au foyer c, aura parcouru une ligne brisée, égale en longueur à $b - r'$, quand il sera parvenu à l'extrémité du rayon r'; or, si l'on imagine le rayon h prolongé au-delà de la surface de l'ellipsoïde jusqu'à ce qu'il soit égal à $b - r'$, on aura $\frac{A^2}{(b-r')^2}$ pour l'intensité du son direct parvenu à cette distance du point c; donc le rapport de l'intensité du son réfléchi à celle du son direct, sera exprimé par

$$\frac{(b-r')^2 \cdot (b-h)^2}{h^2 \cdot r'^2};$$

quantité qui surpassera toujours l'unité, puisqu'on a $b - r' > h$ et $b - h > r'$. On vérifie aisément, au moyen des formules de la catoptrique (*Voyez* le Mémoire de M. *Malus*, imprimé au commencement de ce volume), que ce rapport est égal à celui qui aurait lieu dans les mêmes circonstances, entre l'intensité de la lumière réfléchie et celle de la lumière directe; d'où l'on peut tirer cette conclusion importante, que, relativement à son intensité, aussi bien qu'à sa direction, le son produit au foyer d'un ellipsoïde et réfléchi par sa surface concave, suit les mêmes lois que la lumière dans l'hypothèse de l'émission.

[19.] Lorsque le son réfléchi sera parvenu au foyer c, ce qui aura lieu au bout d'un temps égal à $\frac{b-a}{a}$, l'onde sonore réfléchie s'évanouira; il lui en succédéra une autre dont le centre sera au point c', et qui s'écartera indéfiniment de ce centre : celle-ci atteindra la surface de l'ellipsoïde; elle sera réfléchie par cette surface vers le foyer c; elle s'évanouira quand elle aura atteint ce foyer; il lui en succédera une nouvelle dont le centre sera au point c; et ce mouvement alternatif continuera indéfiniment, chaque oscillation ayant lieu dans un temps qui sera le même pour toutes, et égal à $\frac{b-a}{a}$. En effet, si l'on décrit une sphère du point c' comme centre et d'un rayon a, il est évident qu'à l'instant où la molécule qui occupe le foyer c' sera mise en mouvement par le son réfléchi, toute la masse d'air sera en repos, excepté la partie comprise dans cette sphère : ce sera donc comme si l'on produisait un ébranlement partiel autour du point c', et cet ébranlement devra se répandre dans la masse entière, de la même manière que l'ébranlement initial qui a eu lieu autour du point c.

[20.] La distance des deux foyers c et c' ayant été supposée quelconque, le point c peut s'éloigner à l'infini, auquel cas l'ellipsoïde se changera en un paraboloïde. Nous pouvons donc conclure de l'analyse précédente, que si le son est produit au foyer d'un paraboloïde de

révolution, il sera réfléchi, à la rencontre de cette surface, parallèlement à l'axe; toutes les molécules situées sur un même plan perpendiculaire à cet axe, seront ébranlées en même temps par le son réfléchi, et elles commenceront à se mettre en mouvement au bout d'un temps égal à celui que le son direct emploierait pour parcourir la distance du sommet du paraboloïde à ce plan, plus la distance du sommet au foyer. On pourrait déterminer directement la réflexion du son sur le paraboloïde; mais il est plus simple de la considérer, ainsi que nous le faisons, comme un cas particulier de la réflexion sur l'ellipsoïde.

Pour ne pas répéter les raisonnemens que nous venons de faire, nous nous contenterons d'indiquer la réflexion du son sur l'hyperboloïde engendré par une branche d'hyperbole, tournant autour de la ligne qui joint les deux foyers. Si le son part du foyer extérieur, il sera réfléchi par la surface convexe de l'hyperboloïde; l'onde sonore réfléchie conservera toujours la figure sphérique; elle aura son centre au foyer intérieur, dont elle s'écartera indéfiniment. Réciproquement, quand le son sera produit au foyer intérieur, il sera réfléchi par la surface concave, et l'onde sonore réfléchie conservera toujours la figure sphérique, en s'écartant continuellement de son centre placé au foyer extérieur. Dans l'un et l'autre cas, le son parvient à une molécule d'air par un rayon brisé, dans le même temps que le son direct emploierait à parcourir une ligne droite égale en longueur à cette ligne brisée. Ces propositions se démontrent au moyen de l'analyse précédente, à laquelle on fait quelques modifications qu'il est facile d'imaginer.

Enfin, si l'on fait abstraction d'une dimension de l'air, c'est-à-dire, si l'on considère la propagation du son dans un plan, on pourra déterminer, d'après les principes que nous venons d'établir [n.° 14], la réflexion du son sur une section conique, pourvu qu'il ait été produit à l'un des foyers de cette courbe. Les résultats sont analogues à ceux que présente la réflexion sur une surface du second degré; mais les démonstrations sont plus compliquées, quoiqu'elles soient fondées sur

les mêmes principes. Nous n'entreprendrons pas de les donner ici, dans la crainte que ce Mémoire ne devienne beaucoup trop long.

Examen des différentes Circonstances physiques qui peuvent influer sur la vîtesse du Son.

[21.] Nous avons représenté [n.° 3] par D et gh la densité et l'élasticité de l'air avant que le mouvement ait commencé, et par $D(1+\gamma)$ et $gh(1+\gamma+k\gamma)$, ce que deviennent cette densité et cette élasticité pendant le mouvement, le terme $gh.k\gamma$ étant l'augmentation d'élasticité due au développement de chaleur qui accompagne la compression de l'air; ensuite nous avons fait, pour abréger, $\frac{gh}{D}.(1+k)=a^2$, et c'est cette quantité a qui représente la vîtesse du son. Il s'agit donc d'examiner les variations que cette quantité peut subir, puis de calculer sa valeur numérique, pour la comparer à la vîtesse du son déterminée par l'observation.

La densité D diminuant à mesure que la température augmente, il en faut conclure que la vîtesse du son doit augmenter avec la température; ainsi cette vîtesse doit être généralement plus grande en été qu'en hiver: le calcul suivant nous fera juger de ce que peut être cette différence.

En désignant par D la densité de l'air à la température de la glace fondante, et sous une pression quelconque, cette densité devient $\frac{D}{1+n(0{,}00375)}$ sous la même pression et à une température de n degrés centigrades; car les expériences de M. *Gai-Lussac* ont prouvé que l'air se dilate uniformément depuis 0 jusqu'à 100°, et que son augmentation de volume pour chaque degré, est égale à 0,00375 de son volume à zéro. La vîtesse du son, relative à cette température, deviendra donc

$$\sqrt{\left(\frac{gh}{D}\right)}.[1+n(0{,}00375)].\sqrt{(1+k')},$$

k' désignant ce que devient k à la même température. Si l'on prend,

par

par exemple, $n = 30°$, on trouve à-peu-près $\sqrt{[1 + n.(0{,}00375)]} = 1 + \frac{1}{16}$; d'où il suit que quand la température passe de zéro à 30°, la vîtesse du son varie d'environ $\frac{1}{16}$ de sa valeur à zéro, en négligeant toutefois la variation inconnue de la quantité k. Cette variation de vîtesse doit être appréciable dans des expériences comparatives et bien faites, et ces expériences offriraient aussi un moyen de reconnaître si la quantité k varie sensiblement avec la température de l'air.

Il n'en est pas de l'état hygrométrique de l'air comme de sa température : l'expérience a prouvé que cet état n'a pas d'influence sur la vîtesse du son ; car les physiciens qui ont mesuré cette vîtesse, ont observé qu'elle est la même dans un temps serein et dans un temps pluvieux. Cela vient, d'une part, de ce que la densité de la vapeur d'eau ne diffère pas beaucoup de celle de l'air, à la même température et sous la même pression ; et, en second lieu, de ce que la quantité de vapeur suspendue dans l'atmosphère, est toujours fort petite relativement à la masse de l'air. En effet, *Saussure* a trouvé (*voyez* l'Essai sur l'Hygrométrie) que sous la même pression et à la même température, la densité de la vapeur d'eau est à celle de l'air comme 5 est à 7 ; d'ailleurs, quand l'hygromètre marque le point de la saturation, on peut évaluer, d'après les expériences du même physicien, à environ $\frac{1}{72}$ de la masse totale, la quantité de vapeur suspendue dans un volume d'air à 15° du thermomètre de *Réaumur*, et sous la pression ordinaire de l'atmosphère : or, il est facile, au moyen de ces données, de s'assurer que l'état hygrométrique de l'air ne saurait faire varier la vîtesse du son, d'un *cinq centième* de sa valeur relative au point de la plus grande sécheresse.

[22.] Calculons maintenant la valeur numérique de la vîtesse du son. En prenant pour unité la seconde sexagésimale, on a $g = 9^m,7979$; la hauteur du baromètre la plus commune en nos climats, est de $0^m,76$;

sous cette pression et à la température de la glace fondante, le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, est égal à 10475,68, selon MM. *Biot* et *Arago* (*Physique* de M. *Haüy*, page 299) : au moyen de ces données, on trouve $\sqrt{\cdot \frac{gh}{D}} = 279^{m},395$. Ce serait la vîtesse du son, relative à la température zéro, si l'on négligeait la quantité k; par conséquent, en multipliant ce nombre de mètres par $\sqrt{[1+n(0,00375)]}$, on aurait la vîtesse du son, l'air étant à la température n. En prenant, par exemple, $n = 6°$, on trouve $282^{m},42$ pour la vîtesse du son, relative à cette température.

Or, les membres de l'Académie des Sciences ont conclu (*Mémoires* de cette Académie, pour l'année 1738) d'une suite d'expériences faites sur une ligne d'environ 29000^{m}, le thermomètre marquant 6° centigrades, terme moyen, que le son parcourt $337^{m},18$ par seconde, quantité qui surpasse d'un cinquième la vîtesse $282^{m},42$, qui aurait lieu si l'on négligeait la quantité k. Cette différence est trop grande pour qu'on puisse l'attribuer aux erreurs de l'observation, ou à l'inexactitude des données qui servent de base au calcul; il est donc indispensable d'avoir égard, dans le calcul de la vîtesse du son, au développement de chaleur produit par la compression de l'air. Pour accorder le calcul et l'observation, il suffit de faire

$$(282^{m},42) \cdot \sqrt{(1+k)} = 337^{m},18,$$

équation d'où l'on tire $k = 0,4254$. Voyons maintenant quelle est l'augmentation de température que suppose cette valeur de k.

Pour cela, concevons un volume d'air dont la densité soit D, la pression gh, et la température θ; supposons que l'on comprime cet air de manière que sa densité devienne $D(1+\gamma)$, et soit ω le nombre de degrés dont cette compression ferait monter le thermomètre, si la masse de cet instrument n'était pas comparable à celle de l'air : il s'agit de déterminer l'élasticité correspondante à la densité $D(1+\gamma)$ et à la température $\theta+\omega$.

On a d'abord $gh(1+\gamma)$ pour la pression qui correspond à la densité

$D(1+\gamma)$ et à la température θ. Si l'on échauffe l'air soumis à cette pression, jusqu'à ce que sa température soit devenue $\theta+\omega$, il se dilatera, et d'après la loi donnée par M. *Gai-Lussac*, sa densité deviendra

$$\frac{D\cdot(1+\gamma)\cdot[1+\theta\cdot(0{,}00375)]}{1+(\theta+\omega)\cdot(0{,}00375)}.$$

Enfin, l'air étant dans cet état, si nous imaginons qu'on le comprime lentement, de manière à lui faire reprendre la densité $D(1+\gamma)$, sans augmenter sa température, nous aurons

$$\frac{gh\cdot(1+\gamma)[1+(\theta+\omega)\cdot(0{,}00375)]}{1+\theta(0{,}00375)},$$

pour la pression correspondante à la densité $D(1+\gamma)$ et à la température $\theta+\omega$.

Dans la propagation du son, la compression ou la dilatation qui a lieu successivement dans toute l'étendue de la masse d'air, étant supposée très-petite, on peut regarder l'augmentation ou la diminution de température, due à ce changement de densité, comme lui étant proportionnelle; faisons donc $\omega = m\gamma$, et alors, en négligeant le carré de γ, nous aurons

$$gh\cdot\left[1+\gamma+\frac{(0{,}00375)\cdot m}{1+\theta\cdot(0{,}00375)}\cdot\gamma\right],$$

pour la pression que nous avons désignée dans le n.° 3, par $gh.(1+\gamma+k\gamma)$. On aura donc

$$k = \frac{(0{,}00375)\cdot m}{1+(0{,}00375)\cdot\theta};$$

d'où l'on tire $m = 115°{,}99$, en prenant $\theta = 6°$, et $k = 0{,}4254$; par conséquent, si la dilatation ou la compression a été de $\frac{1}{116}$, la température a dû s'abaisser ou s'élever d'un degré centigrade; et généralement si une couche d'air éprouve une condensation très-petite et désignée par γ, entre deux autres couches d'air, la température de la première devra s'élever de $(116°).\gamma$. En admettant ce résultat, qu'on ne peut vérifier par aucune expérience directe, on fera disparaître la différence

que *Newton* a remarquée, le premier, entre la vîtesse du son donnée par le calcul, et celle qui résulte de l'observation.

Mouvement d'une Ligne d'air dans le cas où les Vîtesses des molécules ne sont pas supposées très-petites.

[23.] En supposant que la masse d'air se réduise à une simple ligne, et en prenant cette ligne pour l'axe des abscisses x, les quantités ρ et φ ne seront plus fonctions que de x et t; et si l'on fait abstraction de la pesanteur, les équations (a) et (b) du n.° 1 deviendront

$$\int . \frac{dp}{\rho} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho . \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\rho}{dx} . \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Si l'on suppose de plus la température constante dans toute la ligne d'air, la pression p sera proportionnelle à la densité ρ, et l'on aura $p = a^2 . \rho$, a étant un coëfficient constant qui représente la racine carrée du rapport de l'élasticité de l'air à la densité, avant que le mouvement ait commencé. La première de ces équations deviendra donc

$$a^2 . \log. \frac{\rho}{D} + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0, \qquad (1)$$

D étant la densité de l'air avant le mouvement; éliminant ρ entre celle-ci et l'équation précédente, on trouve

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dx} . \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + \frac{d\varphi^2}{dx^2} . \frac{d^2\varphi}{dx^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \qquad (2)$$

L'intégrale complète de cette équation est impossible sous forme finie. Il est facile de s'en assurer, en lui appliquant la méthode que M. *Laplace* a donnée pour intégrer les équations aux différences partielles du second ordre, après l'avoir ramenée à la forme linéaire, que cette méthode suppose, au moyen d'une transformation connue que l'on doit à M. *Legendre*. Cette transformée linéaire est comprise parmi les équations que M. *Laplace* a intégrées, par le moyen d'une intégrale

définie (*Voyez* le Calcul intégral de M. *Lacroix*, où sont exposées toutes les méthodes d'intégration que nous citons); mais cette forme d'intégrale ne peut servir à rien pour déterminer le mouvement de la ligne d'air que nous considérons : heureusement l'équation (2) admet une intégrale particulière sous forme finie, qui renferme une fonction arbitraire, et qui suffit, comme nous le ferons voir, pour déterminer la loi suivant laquelle ce mouvement a lieu, pourvu que l'on suppose les vîtesses des molécules d'air plus petites que la vîtesse a, pendant toute la durée du mouvement et dans toute l'étendue de la ligne d'air.

[24.] POUR trouver cette intégrale, j'observe que l'on satisfait à l'équation (2), au moyen de celle-ci,

$$\frac{d\varphi}{dt} - a.\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2} = fk; \qquad (3)$$

fk étant une fonction arbitraire de la quantité k, qui est telle que l'on ait

$$\frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dx}.\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0.$$

En effet, en différenciant l'équation (3) successivement par rapport à t et à x, en multipliant la seconde différence partielle par $a + \frac{d\varphi}{dx}$, et l'ajoutant ensuite à la première, on retrouve l'équation (2). On y satisfait également au moyen de cette seconde équation,

$$\frac{d\varphi}{dt} + a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2} = Fk; \qquad (4)$$

Fk, étant une fonction arbitraire de la quantité k, qui est telle que l'on ait

$$\frac{dk}{dt} - \frac{dk}{dx}.\left(a - \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0.$$

Or, $\frac{d\varphi}{dx}$ et k étant des fonctions de x et t, on peut regarder $\frac{d\varphi}{dx}$ comme une fonction de t et k; faisant donc $\frac{d\varphi}{dx} = \psi(k, t)$, et intégrant

l'équation

$$\frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dx} \cdot [a + \downarrow (k, t)] = 0,$$

par les méthodes connues, on aura

$$k = \text{fonct.}\,[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt],$$

l'intégrale $\int . \downarrow (k, t)\, dt$ étant prise en regardant k comme une constante, et si l'on veut, de manière qu'elle soit nulle quand $t = 0$. On aura de même

$$k_{,} = \text{fonct.}\,[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt],$$

en supposant $\frac{d\varphi}{dx} = \downarrow_{,} (k_{,}, t)$; l'intégrale $\int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt$ étant prise de manière qu'elle soit nulle quand $t = 0$, et en regardant la quantité $k_{,}$ comme constante. Les équations (3) et (4) deviendront donc

$$\frac{d\varphi}{dt} - a \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{dx^2} = f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt];$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + a \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{dx^2} = F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt],$$

d'où l'on tire, à cause de l'équation (1),

$$\left.\begin{aligned} 2a \cdot \frac{d\varphi}{dx} &= F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t) dt] - f[x - at - \int . \downarrow (k, t) dt], \\ 2a^2 . \log . \frac{\varphi}{D} &= - F[x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t) dt] - f[x - at - \int . \downarrow (k, t) dt]. \end{aligned}\right\} (5).$$

Maintenant, supposons que l'ébranlement primitif de la ligne d'air s'étendait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$. Il faudra donc que la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ soit nulle et la densité ρ égale à D, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de x qui surpassent α ou qui sont négatives; d'où il suit, à cause des équations (5), que, pour toutes ces valeurs de x, les fonctions fx et Fx doivent être nulles. Cela posé, si nous considérons, au bout d'un temps quelconque, une molécule correspondante à une abscisse x positive et plus grande que α, nécessairement la quantité $x + at - \int . \downarrow_{,} (k_{,}, t)\, dt$ sera plus grande que x, et par conséquent plus grande que α; de sorte

aura

$$F[x + at - \int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt] = Fk_1 = 0.$$

t, l'intégrale $\int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt$, qui est nulle quand $t = 0$, ne peut devenir plus grande, abstraction faite du signe, que Vt, V étant grande valeur que puisse avoir la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, pendant toute la lu mouvement et dans toute l'étendue de la ligne d'air ; mais cette ayant été supposée plus petite que a, on a $Vt < at$, et par con- t $\int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt < at$; d'où il suit que $x + at - \int . \downarrow_1 (k_1, t)\, dt$ est antité plus grande que α, pour toutes les valeurs de x, positives grandes que α.

si, en considérant le mouvement dans la partie de la ligne d'air ond aux abscisses positives, la première des équations (5) se à

$$= -\frac{1}{2a} . f[x - at - \int . \downarrow (k, t)\, dt] = -\frac{1}{2a} . fk ;$$

résulte que $\frac{d\varphi}{dx}$, ou $\downarrow (k, t)$, sera seulement fonction de k ; n aura $\int . \downarrow (k, t)\, dt = \frac{d\varphi}{dx} . t$, puisque cette intégrale doit ise en considérant la quantité k comme une constante ; et à cause lésigne une fonction arbitraire, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x - at - \frac{d\varphi}{dx} . t). \qquad (a)$$

doit observer que cette équation seule ne satisferait pas à l'équa-); il faut y joindre l'équation (4), qui se réduit à

$$\frac{d\varphi}{dt} + a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2} . \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0, \qquad (b)$$

de $Fk_1 = 0$.

t facile de vérifier que le système de ces deux équations satisfait ution (2), et que les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ que l'on déduit de

ces équations, savoir,

$$\frac{d\varphi}{dx} = f, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -af - \frac{1}{2} \cdot f^2,$$

satisfont aussi à la condition d'intégrabilité

$$\frac{d \cdot \frac{d\varphi}{dx}}{dt} = \frac{d \cdot \frac{d\varphi}{dt}}{dx},$$

quelle que soit la forme de la fonction de $x - at - \frac{d\varphi}{dx} \cdot t$, que l'on désigne par f. Si donc on donne à la fonction f une forme déterminée, on pourra déduire des équations (a) et (b) les valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonctions de x et t, et par suite on aura la valeur de φ, en intégrant la formule

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} \cdot dx + \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt.$$

Cette valeur de φ sera une intégrale seconde, sans fonction abitraire, de l'équation (2); on doit donc regarder l'ensemble des équations (a) et (b), comme représentant une intégrale seconde de l'équation (2), d'une forme singulière; mais comme cette intégrale seconde ne renferme qu'une seule fonction arbitraire, il s'ensuit qu'elle n'est qu'une intégrale particulière.

On est encore loin de connaître toutes les formes différentes sous lesquelles peuvent se présenter les intégrales des équations aux différences partielles d'un ordre supérieur au premier. Il ne paraît pas que personne ait encore eu l'occasion de remarquer que ces intégrales pouvaient être données, par un système d'équations entre les variables et les différences du premier ordre, en même nombre que ces différences, mais dont on ne saurait déduire les valeurs de ces mêmes différences, sans déterminer les fonctions arbitraires.

[25.] Il s'agit actuellement de conclure de l'équation (a), la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans le sens des abscisses positives.

positives. Si l'on considérait le mouvement dans le sens des abscisses négatives, on aurait de même, pour le déterminer, les équations

$$\frac{d\varphi}{dx} = F\left[x + t\left(a - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} - a.\ \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{2}\ .\ \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0\ ;$$

dont le système est également une intégrale particulière de l'équation (2). Il suffira d'examiner la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ relative aux abscisses positives ; la seconde présenterait les mêmes résultats.

Puisque la fonction fx est nulle tant qu'on a $x > \alpha$ ou $x < 0$, il s'ensuit que la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ donnée par l'équation (a), sera aussi nulle tant qu'on aura

$$x > t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha, \text{ ou } x < t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right).$$

La molécule qui correspond à l'abscisse $x > \alpha$, commencera donc à s'ébranler, à l'instant où l'on aura $x = t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \alpha$, ou simplement $x = at + \alpha$, parce que la vîtesse naissante $\frac{d\varphi}{dx}$ doit être regardée comme infiniment petite ; et la même molécule cessera de se mouvoir, quand on aura $x = t\left(a + \frac{d\varphi}{dx}\right)$, ou simplement $x = at$, parce que la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ doit être infiniment petite à l'instant où le mouvement cesse, comme à celui où il commence.

Nous voyons donc clairement que l'ébranlement primitif se transmettra uniformément et avec une vîtesse égale à a; cette vîtesse sera indépendante de la nature de l'ébranlement primitif et de la grandeur des vîtesses des molécules d'air ; la durée de l'ébranlement sera la même pour toutes les molécules, et égale à $\frac{\alpha}{a}$; enfin la largeur de l'onde mobile, de part et d'autre de l'origine, restera constamment égale à α.

Jusqu'à présent, ces propositions n'avaient été démontrées que dans

le cas où les vîtesses des molécules d'air sont supposées très-petites. Ordinairement, on néglige dans le calcul les puissances de ces vîtesses supérieures à la première, et l'on trouve $\frac{d\varphi}{dx} = f(x - at)$, comme il résulte de l'équation (a), en négligeant dans le second membre la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$ par rapport à la vîtesse a. M. *Lagrange* a poussé plus loin l'approximation; il a conservé dans le calcul, le carré de la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, et il a trouvé (*Mémoires de Turin*, tome II) une équation qui revient à celle-ci,

$$\frac{d\varphi}{dx} = f[x - at - t \cdot f(x - at)];$$

d'où il a conclu, comme nous, que la grandeur des vîtesses des molécules d'air n'a pas d'influence sur la vîtesse du son. La formule de M. *Lagrange* se déduit de l'équation (a), en substituant dans le second membre de cette équation, à la place de $\frac{d\varphi}{dx}$, sa valeur approchée $f(x - at)$; on en déduirait de même pour la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, d'autres valeurs de plus en plus approchées.

Propagation du Son, lorsque la température et la densité de l'air sont supposées variables.

[26.] CONSERVONS les notations du n.° 1; pour simplifier la question, regardons la pesanteur comme une force constante et de direction parallèle dans toute l'étendue de la masse d'air où le son se propage; représentons cette force par g, et prenons les ordonnées z verticales et dirigées de haut en bas : nous aurons $q = gz$. Soient p' et ρ' la pression et la densité dans l'état d'équilibre, ces quantités seront des fonctions de z, et l'on aura, en vertu de l'équation (a) du n.° 1,

$$gz - \int \cdot \frac{dp'}{\rho'} = 0.$$

Représentons par D la valeur de ρ' dans la couche d'air qui répond à

$z = 0$, par h la hauteur du baromètre dans la même couche, par a^2 la quantité $\frac{gh}{D}$, et enfin prenons pour unité la densité du mercure; on aura $p' = a^2 \rho'$, si l'on considère d'abord le cas particulier où la température est constante, et où la densité varie seule d'une couche à une autre de la masse d'air. Substituant cette valeur de p' dans l'équation précédente, et différenciant par rapport à z, on trouve

$$g - a^2 . \frac{d\rho'}{\rho' dz} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\rho' = De^{\frac{g}{a^2} . z},$$

en désignant par e la base du système de logarithmes dont le module est l'unité, et en faisant attention qu'on doit avoir $\rho' = D$, quand $z = 0$.

Maintenant, soit $\rho = \rho'(1 + \gamma)$, γ étant la condensation de l'air pendant le mouvement; en faisant abstraction de la chaleur rendue sensible par la compression, on aura $p = p' + a^2 \rho' \gamma$, et par conséquent

$$\int . \frac{dp}{\rho} = \int . \frac{dp'}{\rho'} + a^2 . \gamma,$$

en négligeant le carré et les puissances supérieures de γ. Les équations (a) et (b) du n.° 1, deviendront donc

$$\frac{d\varphi}{dt} + a^2 . \gamma = 0;$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \frac{d\rho'}{\rho' dz} . \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

en y supprimant les termes de seconde dimension par rapport aux vîtesses et à la condensation. Substituant dans la seconde équation, à la place de $\frac{d\rho'}{\rho' dz}$, sa valeur $\frac{g}{a^2}$, et éliminant γ au moyen de la première, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + g\frac{d\varphi}{dz} .$$

On fait disparaître la différence du premier ordre que cette équation renferme, en faisant $\Phi = \Phi_{,} e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}$; cette équation devient alors

$$\frac{d^2\varphi_{,}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi_{,}}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_{,}}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_{,}}{d\zeta^2}\right) - \frac{g^2}{4a^2}\cdot\Phi_{,},$$

et par conséquent

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dr^2} + \frac{d.(1-u^2)\,\frac{d.r\varphi_{,}}{du}}{rd^2u} + \frac{d^2.r\varphi_{,}}{d\omega}\cdot\frac{1}{r^2(1-u^2)}\right) - \frac{g^2}{4a^2}\cdot r\Phi_{,},$$

en transformant les coordonnées x, y, ζ, en coordonnées polaires r, u, ω, comme dans le n.° 4.

Afin de ne pas nous jeter dans de trop longs calculs, supposons la fonction Φ, indépendante de u et de ω, l'équation précédente se réduira simplement à

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dt^2} = a^2\cdot\frac{d^2.r\varphi_{,}}{dr^2} - \frac{g^2}{4a^2}\cdot r\Phi_{,}; \qquad (1)$$

et celle-ci n'est point encore intégrable sous forme finie.

[27.] POUR obtenir son intégrale en série, soient $r - at = s$, $r + at = s_{,}$, et pour abréger $\frac{g^2}{16a^4} = m$, nous aurons

$$\frac{d^2.r\varphi_{,}}{ds\,ds_{,}} = m\cdot r\Phi_{,};$$

équation dont l'intégrale complète est la somme de deux séries infinies, savoir :

$$r\Phi_{,} = fs + ms_{,}\cdot\int fs\,ds + \frac{m^2s_{,}^2}{2}\cdot\int^2 fs\,ds^2 + \frac{m^3s_{,}^3}{2.3}\cdot\int^3 fs\,ds^3 + \&c.$$

$$+ Fs_{,} + ms\cdot\int Fs_{,}\,ds_{,} + \frac{m^2s^2}{2}\cdot\int^2 Fs_{,}\,ds_{,}^2 + \frac{m^3s^3}{2.3}\int^3 Fs_{,}\,ds_{,}^3 + \&c.,$$

fs et $Fs_{,}$ étant les deux fonctions arbitraires.

Chacune de ces deux séries peut être transformée en une intégrale

définie relative à une nouvelle variable h. En effet, on a généralement

$$\int^n . fs\,ds^n = \frac{1}{1.2.3\ldots n-1} . \int . (s - h)^{n-1} . fh\,dh,$$

pourvu que l'on remplace h par s après l'intégration ; si donc on prend $\int . fs\,ds$ et $\int . Fs_1\,ds_1$ au lieu de fs et Fs_1, ce qui est permis, et si l'on fait

$$H = 1 + (s-h) . hs_1 + \frac{(s-h)^2 . h^2 s^2_1}{2.2} + \frac{(s-h)^2 . h^3 s^3_1}{2.3.2.3} + \&c.,$$

$$H_1 = 1 + (s-h) . hs + \frac{(s_1-h)^2 . h^2 s^2}{2.2} + \frac{(s_1-h)^3 . h^3 s^3}{2.3.2.3} + \&c.,$$

on aura

$$r\Phi_1 = \int . Hfh\,dh + \int . H_1 Fh\,dh;$$

la première intégrale étant prise depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s$, et la seconde, depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s$.

On peut déduire de cette valeur de $r\Phi_1$, les différences partielles $\frac{d . r\varphi_1}{dr}$, $\frac{d . r\varphi_1}{dt}$; mais comme il nous suffira de connaître la forme de ces quantités, nous observerons qu'elle est la même que celle de la fonction $r\Phi_1$; car en différenciant l'équation (1) par rapport à t ou à r, on aura pour déterminer $\frac{d . r\varphi_1}{dt}$ ou $\frac{d . r\varphi_1}{dr}$, une équation de même forme que l'équation (1) elle-même. De là on conclut aisément que l'on doit avoir

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{1}{r} . \int . Hf_1 h\,dh + \frac{1}{r^2} . \int . Hf_2 h\,dh$$
$$+ \frac{1}{r} . \int . H_1 F_1 h\,dh + \frac{1}{r^2} . \int . H_1 F_2 h\,dh,$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{r} . \int . Hf' h\,dh + \frac{1}{r} . \int . H_1 F' h\,dh;$$

pourvu que, après les intégrations, on fasse $h = s$ dans les trois intégrales $\int . Hf_1 h\,dh$, $\int . Hf_2 h\,dh$, $\int . Hf' h\,dh$, et $h = s_1$, dans les trois autres ; les fonctions $f_1 h, f_2 h, f' h$, dérivent de la fonction arbitraire fh, et les fonctions $F_1 h, F_2 h, F' h$, dérivent de Fh.

La série H dépend d'une équation différentielle du second ordre ; car si l'on fait $(h - s) . ms_1 = 0$, il est facile de voir, d'après la forme

de la série, que l'on aura

$$\frac{d.\theta\,\frac{dH}{d\theta}}{d\theta} + H = 0;$$

équation d'où l'on tirera une valeur de H contenant deux constantes arbitraires, que l'on déterminera de manière qu'on ait $H = 1$, $\frac{dH}{d\theta} = -1$, quand $\theta = 0$. Cette équation n'est intégrable, sous forme finie, par aucune des méthodes connues; mais elle est comprise parmi celles qu'*Euler* a intégrées au moyen des intégrales définies (*Traité des différences et des séries* de M. *Lacroix*, page 491). On y satisfait en prenant

$$H = A.\int.\frac{\cos.h'\sqrt{\theta}\,.\,dh'}{\sqrt{(4-h'^2)}},$$

A étant une constante arbitraire, et l'intégrale relative à h', étant prise depuis $h' = 0$ jusqu'à $h' = 2$. En effet, en substituant cette valeur de H dans le premier membre de l'équation précédente, et effectuant les intégrations par rapport à h', qui deviennent possibles après cette substitution, on trouve

$$\frac{d.\theta\frac{dH}{d\theta}}{d\theta} + H = \frac{A}{4\sqrt{\theta}}\,.\sqrt{(4-h'^2)}\,.\,\sin.h'\sqrt{\theta},$$

quantité nulle aux deux limites $h' = 0$, $h' = 2$. D'ailleurs les conditions $H = 1$ et $\frac{dH}{d\theta} = -1$, quand $\theta = 0$, sont remplies en prenant $A = \frac{2}{\pi}$; car on a pour cette valeur de θ, $H = \frac{A\pi}{2}$ et $\frac{dH}{d\theta} = -\frac{A\pi}{2}$; on aura donc

$$H = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2.2} - \frac{\theta^3}{2.3.2.3} + \&c. = \frac{2}{\pi}\,.\int.\frac{\cos.h'\sqrt{\theta}\,.\,dh'}{\sqrt{(4-h'^2)}},$$

Cette formule donnera également la valeur de la série $H_{,}$, en y faisant $\theta = (h - s_{,})\,.\,ms$, et de cette manière la valeur de $\Phi_{,}$ sera complétement exprimée par des intégrales définies.

[28.] A cause de $\varphi = \varphi_{,} \cdot e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}$, et de $a^2\gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0$, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = -\frac{g}{2a^2} \cdot \frac{e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}}{r} \cdot (\int . Hfhdh + \int . H_{,}Fhdh),$$

$$\gamma = -\frac{e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}}{a^2 r} \cdot (\int . Hf'hdh + \int . H_{,}F'hdh),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}}{r}\left(\int . Hf_{,}hdh + \int . H_{,}F_{,}hdh + \frac{\int . Hf_{,}hdh}{r} + \frac{\int . H_{,}F_{,}hdh}{r}\right);$$

il s'agit donc de déduire de ces formules, la loi suivant laquelle le son se propage.

Supposons pour cela que l'ébranlement primitif s'étendait depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \alpha$ autour de l'origine des coordonnées; il faudra que les différences partielles $\frac{d\varphi}{d\zeta}$, $\frac{d\varphi}{dr}$ et la condensation γ soient nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $r > \alpha$; or, on satisfait à cette condition, en supposant que les fonctions arbitraires fh, Fh, $f'h$, &c. sont nulles pour toutes les valeurs de $h > \alpha$, et que les intégrales $\int . Hfh$, $\int . H_{,}Fhdh$, $\int . Hf'hdh$, &c. commencent à $h = \alpha$; car ces intégrales devant se terminer à $h = r$, quand $t = 0$, il en résulte que si r surpasse α, les quantités Hfh, $H_{,}Fh$, $Hf'h$, &c., seront nulles dans toute l'étendue des intégrales, et par conséquent ces intégrales seront aussi nulles. Cela posé, au bout d'un temps quelconque, ces mêmes intégrales seront encore nulles tant qu'on aura $s > \alpha$ et $s_{,} > \alpha$, c'est-à-dire, $r - at > \alpha$ et $r + at > \alpha$; le mouvement atteindra donc les molécules situées à la distance r du centre de l'ébranlement primitif, à l'instant où l'on aura $r - at = \alpha$: donc la vîtesse du son sera constante, la même sur tous les rayons sonores, et égale à a, comme si la masse d'air était composée de couches de même densité.

La vîtesse des molécules d'air d'où dépend l'intensité du son, sera

égale à $\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)}$; or, si l'on considère des molécules situées à une grande distance de l'origine du mouvement, on aura

$$\int.H_1Fhdh=0,\ \int.H_1F_1hdh=0,\ \int.H_1F_2hdh=0;$$

et en négligeant les termes divisés par r^2, il viendra

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)}=\frac{e^{-\frac{g}{2a^2}\cdot\zeta}}{r}\cdot A;$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{g^2}{4a^2}\cdot\left[(\int.Hfhdh)^2+(\int.Hf_1hdh)^2\right]=A^2.$$

Nous avons regardé l'intensité du son comme proportionnelle au carré de la vîtesse des molécules d'air qui choquent l'organe de l'ouie, quand la densité de ce fluide ne change pas; mais si l'on veut comparer cette intensité dans différentes couches d'air, il faudra la supposer proportionnelle à la densité de la couche d'air où le son est entendu : ainsi cette intensité sera représentée par $\rho'\left(\frac{d\varphi^2}{d\zeta^2}+\frac{d\varphi^2}{dr^2}\right)$, c'est-à-dire, par $\frac{D.A^2}{r^2}$, à cause de $\rho'=D.e^{\frac{g}{a^2}\cdot\zeta}$ [n.° 26]. Or, θ est une quantité extrêmement petite entre les limites des intégrales $\int.Hfhdh$, $\int.Hf_1hdh$; ces intégrales reprendront donc à très-peu près les mêmes valeurs pour des valeurs égales de s ou de $r-at$; d'où il suit que l'intensité du son, ou la quantité $\frac{D.A^2}{r^2}$, décroîtra en raison inverse du carré de la distance r, de même que dans le cas où la densité est constante dans toute la masse d'air. On voit de plus que cette intensité, à distance égale, sera proportionnelle à la densité D de la couche d'air où le son a été produit. En effet, la quantité A est indépendante de cette densité; car d'abord la vîtesse a est égale à la racine carrée du rapport de l'élasticité à la densité, rapport qui est le même pour toutes les couches de la masse d'air, puisque l'on a supposé la température constante; et, de plus, si l'on voulait déterminer les fonctions arbitraires

que

que A renferme, au moyen des vîtesses et de la condensation à l'origine, on aurait, pour déterminer ces fonctions, des équations où D n'entrerait pas. Ainsi l'intensité du son produit par une même cause, dépend seulement de la densité de l'air à l'endroit où il a été produit, et de la distance qu'il a parcourue ; et, à distance égale, cette intensité est d'autant plus faible que le son est parti d'un point plus élevé dans l'atmosphère.

[29.] Il résulte de la théorie des réfractions, comparée à l'expérience, que la température décroît dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, proportionnellement à la hauteur verticale (*Mécanique céleste*, livre X). Dans l'état d'équilibre, au lieu d'avoir simplement $p' = a^2 \rho'$, comme dans le n.° 26, nous aurons donc $p' = a^2 \rho' . (1 + bz)$, b étant un coëfficient constant et positif. Substituant cette valeur dans l'équation $\int . \frac{dp'}{\rho'} - gz = 0$, et différenciant par rapport à z, on trouve

$$(g - a^2 . b) . dz - a^2 (1 + bz) . \frac{d\rho'}{\rho'} = 0 ;$$

d'où l'on tire

$$\rho' = D(1 + bz)^{\frac{g - a^2 b}{a^2 b}},$$

en observant qu'on a $\rho' = D$, quand $z = 0$. Pendant le mouvement la densité deviendra $\rho = \rho' (1 + \gamma)$, et la pression $p = p' + a^2 . (1 + bz) . \rho' \gamma$, si l'on fait abstraction de la chaleur rendue sensible par la compression. Nous ignorons si cette quantité de chaleur dépend de la densité et de la température primitives de l'air que l'on comprime, et par conséquent si la quantité k du n.° 1 varie ou reste constante en passant d'une couche à une autre de l'atmosphère. Quoi qu'il en soit, les variations de k auront peu d'influence sur celles de la vîtesse du son, parce que la correction due au développement de chaleur n'est que la moindre partie de cette vîtesse ; c'est pour cette raison que nous négligeons d'avoir égard à cette quantité k dans la question qui nous occupe.

En négligeant les termes de seconde dimension par rapport aux vîtesses des molécules d'air et à leur condensation, on aura

$$\int.\frac{dp}{\rho}=\int.\frac{dp'}{\rho'}+a^2.\int.(1+bz)\,d\gamma,$$

et les équations (a) et (b) du n.° 1 deviendront

$$\frac{d\varphi}{dt}+a^2.\int.(1+bz)\,d\gamma=0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d\rho'}{\rho'.dz}.\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Différenciant la première par rapport à z, et substituant dans la seconde, à la place de $\frac{d\rho'}{\rho'dz}$, sa valeur, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dtdz}+a^2.(1+bz).\frac{d\gamma}{dz}=0,$$

$$\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{a^2}.\frac{g-a^2b}{1+bz}.\frac{d\varphi}{dz}=0;$$

éliminant γ entre ces deux équations, et faisant $\frac{d\varphi}{dz}=\downarrow$, on trouve

$$\frac{d^2\downarrow}{dt^2}=a^2(1+bz).\left(\frac{d^2\downarrow}{dx^2}+\frac{d^2\downarrow}{dy^2}+\frac{d^2\downarrow}{dz^2}\right)+(g-a^2b).\frac{d\downarrow}{dz}-\frac{(g-a^2b)}{1+bz}.b\downarrow.$$

On peut faire disparaître la différence du premier ordre que cette équation renferme, en prenant $\downarrow=\downarrow_{,}.(1+bz)^{\frac{a^2b-g}{2a^2b}}$; si l'on transforme en même temps les coordonnées x, y, z en coordonnées polaires r, u, ω, comme on a fait dans le n.° 4, et si l'on suppose, pour simplifier la question, la fonction $\downarrow_{,}$ indépendante de l'angle ω, on aura

$$\frac{d^2.r\downarrow_{,}}{dt^2}=a^2(1+bru).\left(\frac{d^2.r\downarrow_{,}}{d^2r}+\frac{d.(1-u^2)\frac{d.r\downarrow_{,}}{du}}{r^2du}\right)-\frac{B.r\downarrow_{,}}{1+bru},$$

B étant un coëfficient constant, et u le cosinus de l'angle que le rayon r fait avec la verticale z.

On ne peut pas supposer la fonction ψ, indépendante de la variable ; car si l'on faisait cette supposition, l'équation précédente se réduirait à

$$\frac{d^2.r\psi}{dt^2} = a^2(1+bru)\frac{d^2.r\psi}{dx^2} - \frac{B.r\psi}{1+bru},$$

n sorte qu'elle contiendrait encore la variable u, ce qui serait une ontradiction. Cette équation n'est point intégrable sous forme finie ; on intégrale en série, ou exprimée par des intégrales définies, paraît op compliquée pour qu'on en puisse déduire la vîtesse du son dans cas de la température variable : nous renoncerons donc à déterminer ette vîtesse, en conservant à l'air ses trois dimensions, et nous nous ornerons à considérer le cas particulier où la masse d'air est réduite un canal infiniment étroit.

[30.] Concevons donc un pareil canal, de figure quelconque, empli d'un fluide dont la température et la densité varient dans toute étendue du canal. Soit X la largeur du canal, à une distance x d'une rigine fixe, choisie arbitrairement sur le canal, la distance x étant omptée sur sa longueur. Dans l'état d'équilibre, représentons par ρ' la ensité du fluide à la distance x de l'origine, par p' la pression en ce oint rapportée à l'unité de surface, par q la pesanteur au même point écomposée suivant la direction du canal. La masse de la molécule qui pond à la distance x, sera égale à $X\rho'.dx$; son poids, décomposé uivant la direction du canal, sera par conséquent $X\rho' q.dx$; elle prouvera sur sa base X une pression $p'X$; cette pression, transmise sur autre base $X+dX$, deviendra $p'.(X+dX)$; en y ajoutant le poids $X\rho'.q.dx$, on aura la pression totale qu'éprouve la base $X+dX$, avoir, $p'.(X+dX)+X\rho' q.dx$. Mais à la distance $x+dx$, la nction p' devient $p'+dp'$: la pression qu'éprouve la base $X+dX$ doit onc être exprimée par $(X+dX).(p'+dp')$; donc on aura

$$(X+dX).(p'+dp') = p'.(X+dX)+X\rho' q.dx,$$

ou bien, en réduisant,

$$\frac{dp'}{dx} = \rho' q.$$

C'est l'équation d'équilibre du fluide; et comme on a $p' = \rho' . K$, K étant un coëfficient constant, quand la température est constante dans toute l'étendue du canal, et une fonction donnée de x, quand la température varie suivant une loi connue, cette équation deviendra,

$$K . \frac{d\rho'}{\rho' dx} + \frac{dK}{dx} - q = 0.$$

Représentons maintenant par ρ, p et v, la densité, la pression et la vîtesse de la molécule fluide qui répond à la distance x, au bout d'un temps quelconque t écoulé depuis l'origine du mouvement. L'instant suivant, la même molécule répondra à la distance $x + v\,dt$, par conséquent sa vîtesse sera devenue $v + \frac{dv}{dt} . dt + \frac{dv}{dx} . v\,dt$; sa force motrice, au bout du temps t, sera donc égale à $\rho X dx . \left(\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx} . v\right)$. Or, d'après le principe de *d'Alembert*, l'équilibre doit exister dans le fluide, entre les forces motrices dont les molécules sont animées, prises en sens contraire de leurs directions, les poids de ces molécules et les pressions qu'elles éprouvent; substituant donc dans l'équation $\frac{dp'}{dx} = \rho' q$, ρ à ρ', p à p', $q - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} . v$ à q, on aura

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(q - \frac{dv}{dt} - v . \frac{dv}{dx}\right),$$

pour l'une des équations du mouvement.

Si l'on fait $\rho = \rho' . (1 + \gamma)$, $p = p' + \rho' K \gamma$, et si l'on néglige les termes de seconde dimension par rapport à la condensation γ et à la vîtesse v, cette équation deviendra

$$K . \frac{d\gamma}{dx} + \frac{dv}{dt} = 0. \qquad (a)$$

Comme on a deux inconnues γ et v à déterminer, il faut une seconde équation; on la trouvera en observant que la masse de la molécule qui

répond au bout du temps t, à la distance x, ne doit pas varier avec le temps; or, cette masse est égale à $X\rho.(x'-x)$, en désignant par x' la distance $x+dx$; l'instant d'après, x, x', X, ρ deviennent $x+vdt$, $x'+vdt+\frac{dv}{dx}.dxdt$, $X+\frac{dX}{dx}vdt$, $\rho+\frac{d\rho}{dt}.dt+\frac{d\rho}{dx}.vdt$; il faudra donc qu'on ait

$$X\rho.(x'-x)=(X+\frac{dX}{dx}.vdt).(\rho+\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dx}.vdt).(x'-x+\frac{dv}{dx}.dxdt),$$

équation qui se réduit à

$$\frac{dX}{dx}.\rho v+\frac{d\rho}{dx}.Xv+X.\frac{d\rho}{dt}+X\rho.\frac{dv}{dx}=0.$$

En mettant dans cette équation, $\rho'(1+\gamma)$ au lieu de ρ, et en négligeant les termes de seconde dimension par rapport à γ et v, elle devient

$$\frac{d.\log.X\rho'}{dx}.v+\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dv}{dx}=0;$$

éliminant γ entre celle-ci et l'équation (a), on trouve

$$\frac{d^2.v}{dt^2}=K\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}.\frac{d.\log.\rho'X}{dx}+v.\frac{d^2.\log.\rho'X}{dx^2}\right). \qquad (b)$$

[31.] On peut faire une infinité d'hypothèses sur la forme des fonctions K, ρ', X, qui rendent cette équation intégrable sous forme finie; le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose la densité ρ' en raison inverse de la largeur X et la température constante : l'équation (b) se réduit alors à

$$\frac{d^2v}{dt^2}=K.\frac{d^2v}{dx^2},$$

K étant un coëfficient constant; d'où l'on peut conclure que, dans ce cas, la propagation du son a lieu comme si la densité était constante et que le canal fût cylindrique.

Si l'on imagine que le canal fait partie de l'atmosphère ; qu'il est d'une largeur égale dans toute son étendue, et qu'il fait avec la verticale un angle dont le cosinus est égal à u, on aura [n.° 29] $K = a^2.(1+bxu)$, $q = gu$, $X = \text{const.}$, en supposant l'origine des x au-dessus de la surface de la terre et les valeurs positives de cette variable, dirigées vers cette surface. L'équation d'équilibre deviendra

$$\frac{dp'}{p'dx} = \frac{(g-a^2b).u}{a^2.(1+bu.x)},$$

et l'équation (b)

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2(1+bu.x).\frac{d^2v}{dx^2} + (g+a^2b)u.\frac{dv}{dx} - \frac{(g-a^2b).bu^2}{1+bu.x} - v.$$

Pour intégrer cette équation, soit d'abord $\sqrt{(1+bu.x)} = y$; elle deviendra

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{a^2b^2u^2}{4}.\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{(2g-3a^2b).bu^2}{4y}.\frac{dv}{dy} - \frac{(g-a^2b).bu^2}{1+bu.x}.v;$$

faisant ensuite $v = v_1.y^{\frac{3a^2b-2g}{2a^2b}}$, la différence du premier ordre disparaîtra, et l'on aura

$$\frac{d^2v_1}{dt^2} = \frac{a^2b^2u^2}{4}.\left(\frac{d^2v_1}{dy^2} - \frac{mv_1}{y^2}\right);$$

m étant un coëfficient constant ; enfin soient $y - \frac{abu}{2}t = s$, $y + \frac{abu}{2}.t = s_1$, cette dernière équation deviendra

$$\frac{d^2v_1}{ds\,ds_1} = \frac{mv_1}{(s+s_1)^2}.$$

L'intégrale complète de cette équation est la somme de deux séries infinies ; savoir,

$$v_1 = fs - \frac{m}{s+s_1}.\int fs\,ds + \frac{m_1}{2.(s+s_1)}.\int^2 fs\,ds^2 - \frac{m_{11}}{2.3.(s+s_1)^2}.\int^3 fs\,ds^3 + \&c.$$

$$+ Fs_1 - \frac{m}{s+s_1}.\int Fs_1\,ds_1 + \frac{m_1}{2.(s+s_1)^2}.\int^2 Fs_1\,ds_1^2 - \frac{m_{11}}{2.3.(s+s_1)^3}.\int^3 Fs_1\,ds_1^3 + \&c.;$$

fs et $Fs_{,}$ étant les deux fonctions arbitraires; $m_{,}$, $m_{,,}$, &c. désignant des coëfficiens constans et déterminés. On peut transformer chacune de ces séries en une intégrale définie, relative à une nouvelle variable h, comme on a fait dans le n.° 28; et si l'on fait

$$H = 1 + \frac{(h-s).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s)^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.,$$

$$H_{,} = 1 + \frac{(h-s_{,}).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s_{,})^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s_{,})^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.$$

on aura

$$v_{,} = \int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh;$$

pourvu qu'après les intégrations, on mette à la place de h, s dans la valeur de $\int.Hfhdh$, et $s_{,}$ dans celle de $\int.H_{,}Fhdh$. Les séries H et $H_{,}$ dépendent d'équations différentielles du second ordre qu'on ne sait pas intégrer sous forme finie.

On aura donc

$$v = (1 + bu.x)^{\frac{3a^{2}b-2g}{2a^{2}b}}.(\int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh);$$

par conséquent, si l'on suppose que l'ébranlement primitif a eu lieu depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, il sera facile de conclure de cette formule, sans que nous soyons obligés de répéter ce qui a été dit plus haut [n.° 28], que la molécule d'air qui répond à la distance x positive et plus grande que α, commencera à s'ébranler à l'instant où l'on aura

$$\sqrt{(1 + bu.x)} = \frac{abu}{2}.t + \sqrt{(1 + bu.\alpha)};$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et divisant par bu,

$$x = \alpha + at.\sqrt{(1 + bu.\alpha)} + \frac{a^{2}bu}{4}.t^{2}.$$

Ainsi, le son se propagera dans le sens des x positives, d'un mouvement uniformément accéléré; sa vîtesse à chaque instant sera la même que celle d'un corps animé d'une force accélératrice constante, égale à $\frac{a^{2}b}{2}$, et dirigée verticalement; lequel corps glisserait le long du

canal en vertu de cette force accélératrice décomposée, et d'une vîtesse initiale égale à $a.\sqrt{(1+bu.\alpha)}$, ou simplement à a, à cause que la quantité α peut être négligée. On peut remarquer que cette vîtesse initiale est indépendante de la direction du canal, et qu'elle est la vîtesse constante du son quand le canal est horizontal.

Il résulte de la formule qui donne la valeur de v, que le son se propage également dans le sens des abscisses négatives. La molécule qui répond à la distance $-x$, commence à s'ébranler à l'instant où l'on a

$$\sqrt{(1-bu.x)}+\frac{abu}{2}.t=1,$$

c'est-à-dire,

$$x=at-\frac{a^2bu}{4}.t^2;$$

de sorte qu'en s'éloignant de la surface de la terre, ou dans le sens des x négatives, le son se propage d'un mouvement uniformément retardé, la vîtesse initiale et la force retardatrice étant les mêmes, au signe près, que dans le sens des x positives. Ces résultats confirment ce qui a été dit au commencement de ce Mémoire.

[32.] Au reste, il est bon d'observer que la vîtesse du son varie très-lentement, à cause de la petitesse de la quantité b. Pour le montrer par un exemple, supposons le canal cylindrique vertical, et le son produit à la surface de la terre; comparons sa vîtesse en ce point, à sa vîtesse à la hauteur de 6980^m à laquelle M. *Gai-Lussac* s'est élevé en ballon; désignons par a' cette dernière vîtesse, et par n le nombre de secondes sexagésimales que le son emploie à parvenir à cette hauteur; nous aurons

$$a'=a-\frac{a^2b}{2}.n, \qquad 6980^m=an-\frac{a^2b}{4}.n^2;$$

d'où l'on tire

$$a'^2=a^2[1-b.(6980^m)].$$

Or, à cette même hauteur, la température observée par M. *Gai-Lussac*, était

était de $-9°,5$ centigrades, tandis qu'à la surface de la terre, elle était de $30°,75$; le rapport de l'élasticité de l'air à la densité à cette hauteur, est donc [n.° 22] égal à

$$a^2.\left(\frac{1-(40,25).(0,00375)}{1+(30,75).(0,00375)}\right);$$

et comme nous avons désigné ce rapport à la hauteur quelconque x, par $a^2.(1+bx)$, on trouvera, en prenant $x=-6980^m$,

$$b.(6980^m)=\frac{71.(0,00375)}{1+(30,75).(0,00375)}=0,23852.$$

On aura donc

$$a'=a\sqrt{(1-0,23852)}=a.(0,87262),$$

d'où il suit que la vîtesse du son, quand il s'est élevé à une hauteur de 6980^m dans l'atmosphère, est à peine diminué d'un *huitième* de sa valeur à la surface de la terre.

Nous remarquerons encore que le son s'élevera, quelle que soit l'inclinaison du canal, jusqu'au point de l'atmosphère où son élasticité devient nulle en vertu du décroissement de chaleur, et où l'on a par conséquent $1-bu.x=0$. En effet, il doit s'élever jusqu'à ce que la vîtesse variable avec laquelle il se propage soit devenue nulle; or, si l'on calcule la hauteur où cela arrive, on trouve $x=\frac{1}{bu}$, comme à la limite de l'atmosphère.

Mouvement d'une Chaîne pesante.

[33.] Considérons une chaîne pesante, suspendue verticalement par l'une de ses extrémités. Supposons que l'on fasse prendre à une portion de cette chaîne, une figure quelconque qui s'écarte très-peu de la ligne verticale, le reste de la chaîne, au-dessus et au-dessous de cette portion, conservant la position verticale; si l'on cesse de retenir cette portion de chaîne dans la position où on l'a placée, elle se mettra en mouvement, en vertu de la pesanteur, pour reprendre la ligne verticale, et le mouvement se transmettra de proche en proche dans

toute l'étendue de la chaîne. Tous ceux qui ont eu l'occasion de remarquer ce mouvement, savent qu'il se propage par une sorte d'ondulation sensible à la vue : la question que nous nous proposons de résoudre, c'est de déterminer la vîtesse avec laquelle cette ondulation se propage, dans le cas particulier où la chaîne pesante est homogène et d'une égale épaisseur dans toute son étendue.

En appelant l la longueur de la chaîne entière, g la gravité, x la distance d'un point quelconque de cette chaîne au point de suspension; en désignant par y et z les coordonnées du même point, au bout du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, et en supposant que ces coordonnées restent très-petites par rapport à x, pendant toute la durée du mouvement : les équations de ce mouvement, telles qu'on les trouve dans la Mécanique analytique, *page 335*, seront

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \cdot \frac{d.(l-x).\frac{dy}{dx}}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \cdot \frac{d.(l-x).\frac{dz}{dx}}{dx}.$$

Comme ces deux équations sont semblables, il suffira d'en considérer une seule, la première, par exemple; les valeurs de z suivront la même loi que celles de y.

Mettons cette première équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.(l-x).\frac{d^2y}{dx^2} - g.\frac{dy}{dx}; \qquad (1)$$

et pour l'intégrer, faisons

$$\sqrt{(l-x)} + \frac{t.\sqrt{g}}{2} = s, \quad \sqrt{(l-x)} - \frac{t.\sqrt{g}}{2} = s_1, \quad y = \frac{y_1}{\sqrt[4]{(l-x)}};$$

elle deviendra

$$\frac{d^2y_1}{ds\,ds_1} = -\frac{y_1}{4(s+s_1)};$$

équation que nous avons déjà intégrée [n.° 31], et dont l'intégrale complète est

$$y_{,} = \int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh;$$

fh et Fh étant les deux fonctions arbitraires, l'intégrale $\int.Hfhdh$ commençant à une valeur arbitraire de h et finissant à $h = s$, et l'intégrale $\int.H_{,}Fhdh$ étant prise depuis une valeur arbitraire de h jusqu'à $h = s_{,}$; enfin H et $H_{,}$ désignant les mêmes séries que dans le n.° 31; savoir:

$$H = 1 + \frac{(h-s).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s)^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.;$$

$$H_{,} = 1 + \frac{(h-s_{,}).m}{s+s_{,}} + \frac{(h-s_{,})^{2}.m_{,}}{2.2.(s+s_{,})^{2}} + \frac{(h-s)^{3}.m_{,,}}{2.3.2.3.(s+s_{,})^{3}} + \&c.,$$

dans lesquelles il faut prendre $m = -\frac{1}{4}$.

On aura donc

$$y = \frac{1}{\sqrt{(l-x)}}.(\int.Hfhdh + \int.H_{,}Fhdh);$$

de plus, la valeur de $\frac{dy}{dt}$ doit être de même forme que celle de y; car en différenciant l'équation (1) par rapport à t, on a pour déterminer $\frac{dy}{dt}$ la même équation que pour déterminer y; ainsi l'on aura également

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(l-x)}}.(\int.Hf_{,}hdh + \int.H_{,}F_{,}hdh);$$

$f_{,}h$ étant une fonction qui dérive de fh, et $F_{,}h$ de Fh.

Cela posé, si l'ébranlement primitif a eu lieu depuis $x = c$ jusqu'à $x = c + \alpha$, il faudra que l'ordonnée y et la vîtesse $\frac{dy}{dt}$ soient nulles pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$ ou $< c$; or, on satisfera à cette condition, en supposant, 1.° que les fonctions $fh, f_{,}h, Fh, F_{,}h$ sont nulles pour toutes les valeurs de $h > \sqrt{(l-c)}$ ou $< \sqrt{(l-c-\alpha)}$; 2.° que les intégrales $\int.Hfhdh$ et $\int.Hf_{,}hdh$ commencent à $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$, et les intégrales $\int.H_{,}Fhdh$ et $\int.H_{,}F_{,}hdh$ à

$h = \sqrt{(l-c)}$. En effet, ces quatre intégrales devant se terminer à $h = \sqrt{(l-x)}$, quand $t = 0$, il s'ensuit d'abord que les fonctions fh et $f_{,}h$ seront nulles, entre les limites des deux premières intégrales, pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$; par conséquent ces deux intégrales seront nulles pour toutes ces valeurs de x : il en sera de même des deux autres intégrales pour toutes les valeurs de $x < c$. De plus, les intégrales $\int . Hfhdh$ et $\int . Hf_{,}hdh$ seront aussi nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $x < c$; car alors ces intégrales doivent être prises depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $\sqrt{(l-x)}$, ou, ce qui revient au même, on peut les prendre en deux parties, la première, depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $h = \sqrt{(l-c)}$, et la seconde, depuis $h = \sqrt{(l-c)}$ jusqu'à $\sqrt{(l-x)}$; cette seconde partie est évidemment nulle, puisque les fonctions fh et $f_{,}h$ sont nulles entre les deux limites $h = \sqrt{(l-c)}$ et $h = \sqrt{(l-x)}$; la première partie est aussi nulle, parce que les intégrales $\int . Hfhdh$ et $\int . Hf_{,}hdh$, prises depuis $h = \sqrt{(l-c-\alpha)}$ jusqu'à $h = \sqrt{(l-c)}$, et ensuite divisées par $\sqrt[4]{(l-c)}$, représentent, à l'origine du mouvement, les valeurs de y et $\frac{dy}{dt}$, relatives au point de la chaîne qui répond à $x = c$; or, quel que soit l'ébranlement primitif, puisqu'il se termine en ce point, l'écartement y et la vîtesse $\frac{dy}{dt}$ de ce point, doivent être nuls ou infiniment petits, quand $t = 0$. On prouvera de même que les intégrales $\int . H_{,}Fhdh$ et $\int . H_{,}F_{,}hdh$ sont nulles, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de $x > c + \alpha$; ainsi les quatre intégrales $\int . Hfhdh$, $\int . Hf_{,}hdh$, $\int . H_{,}Fhdh$, $\int . H_{,}F_{,}hdh$, n'auront pas de valeurs, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de x qui tombent hors des limites de l'ébranlement primitif; par conséquent ces intégrales seront propres à représenter l'état primitif de la chaîne pesante.

Les intégrales $\int . Hfhdh$, $\int . Hf_{,}hdh$, n'acquerront de valeurs qu'à l'instant où l'on aura

$$s = \sqrt{(l-x)} + \frac{t\sqrt{g}}{2} = \sqrt{(l-c-\alpha)},$$

et les intégrales $\int . H_{,} F h dh$, $\int . H_{,} F_{,} h dh$ resteront nulles jusqu'à ce qu'on ait

$$s_{,} = \sqrt{(l - x)} - \frac{t\sqrt{g}}{2} = \sqrt{(l - c)}.$$

La première condition ne pourra avoir lieu que pour les valeurs de $x > c + a$, et la seconde pour les valeurs de $x < c$; il s'ensuit donc que la propagation du mouvement se fera au-dessous de l'ébranlement primitif, d'après l'équation $s = \sqrt{(l - c - a)}$, et au-dessus de cet ébranlement, d'après l'équation $s_{,} = \sqrt{(l - c)}$. On tire de la première équation

$$x = c + a + t . \sqrt{g(l - c - a)} - \frac{t^2 . g}{4},$$

et de la seconde

$$c - x = t . \sqrt{g(l - c)} + \frac{t^2 . g}{4};$$

ce qui nous apprend qu'il se produira deux ondulations, l'une descendante et l'autre ascendante : la première descendra le long de la chaîne, d'un mouvement uniformément retardé, dont la force retardatrice sera égale à la moitié de la pesanteur naturelle; la seconde remontera suivant la longueur de la chaîne, d'un mouvement uniformément accéléré, dont la force accélératrice sera aussi la moitié de la pesanteur naturelle.

[34.] La vîtesse initiale de l'ondulation descendante est égale à $\sqrt{g(l - c - a)}$: or, on voit que cette vîtesse est précisément celle qui est nécessaire pour que l'ondulation parcoure la ligne $l - c - a$, distance de l'ébranlement primitif à l'extrémité inférieure de la chaîne; elle atteindra donc cette extrémité; et quand elle y sera parvenue, sa vîtesse sera nulle, quel que soit le point d'où elle est partie. La vîtesse initiale de l'ondulation ascendante est égale à $\sqrt{g(l - c)}$: c'est la vîtesse qu'elle aurait acquise en vertu de l'accélération de son mouvement, si elle fût partie de l'extrémité inférieure de la chaîne; lors donc qu'elle

aura atteint l'extrémité supérieure, sa vîtesse sera égale, quel que soit son point de départ, à celle qu'elle acquerrait en parcourant la chaîne entière.

Il résulte de là qu'on peut rendre la transmission du mouvement dans une chaîne pesante, aussi rapide que l'on voudra, en suspendant à son extrémité inférieure un poids considérable ; car il est évident que jusqu'à ce que l'ondulation descendante soit parvenue à cette extrémité, le mouvement de la chaîne sera le même que si on l'eût alongée d'une certaine quantité ; de sorte que si on appelle l' la longueur d'une portion de la même chaîne, dont le poids soit égal à celui qu'on a employé, les vîtesses initiales des ondulations ascendante et descendante deviendront $\sqrt{g(l+l'-c)}$ et $\sqrt{g(l+l'-c-\alpha)}$; par conséquent ces ondulations atteindront, dans un temps plus court, les deux extrémités de la chaîne.

Les limites de l'intégrale $\int.Hfhdh$ deviendront alors $h=\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}$ et $h=\sqrt{(l+l'-x)}+\frac{t\sqrt{g}}{2}$; et comme cette dernière limite doit être plus petite que $\sqrt{(l+l'-c)}$, pour que fh ne soit pas nulle, il s'ensuit que la différence de ces limites sera plus petite que $\sqrt{(l+l'-c)}-\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}$; la quantité $\frac{(h-s).m}{s+s'}$ sera donc plus petite que $\frac{[\sqrt{(l+l'-c)}-\sqrt{(l+l'-c-\alpha)}].m}{2\sqrt{(l+l'-x)}}$, dans toute l'étendue de l'intégrale $\int.Hfhdh$; donc si l'on suppose les lignes α et x très-petites par rapport à $l+l'$, la série H sera très-convergente, et en ne prenant que son premier terme, on aura

$$\int.Hfhdh = \text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)}+\frac{t\sqrt{g}}{2}\right].$$

On aura de même

$$\int.H,Fhdh = \text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)}-\frac{t\sqrt{g}}{2}\right],$$

et par conséquent

$$y = \frac{\text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)} + \frac{t\sqrt{g}}{2}\right]}{\sqrt[4]{(l+l'-x)}} + \frac{\text{fonct.}\left[\sqrt{(l+l'-x)} - \frac{t\sqrt{g}}{2}\right]}{\sqrt[4]{(l+l'-x)}}.$$

Il sera facile alors de construire la figure de la chaîne pesante à un instant donné, d'après sa figure à l'origine du mouvement; et l'on voit que la longueur de la partie de la chaîne en mouvement à chaque instant, de part et d'autre de l'ébranlement primitif, sera constante et égale à a pendant toute la durée du mouvement. Ce résultat n'aurait plus lieu, si l'on n'attachait pas à l'extrémité inférieure de la chaîne, un poids considérable par rapport au poids de cette chaîne; car, sans cette addition, la série H serait divergente pour des valeurs de x peu différentes de l; la figure de la portion de chaîne en mouvement, changerait vers l'extrémité inférieure, et la longueur de l'ondulation ne serait plus la même dans toute l'étendue de la chaîne.

[35.] L'EXTRÉMITÉ inférieure de la chaîne étant libre, le point situé à cette extrémité peut prendre la vîtesse qui lui est communiquée, et il n'en résulte aucune nouvelle condition à remplir; mais l'extrémité supérieure étant fixe, il faut que l'ordonnée y du point qui répond à $x = 0$ soit nulle pour toutes les valeurs de t; or il suffit, pour satisfaire à cette condition, d'ajouter, aux deux termes de la valeur de y, un troisième terme de même forme, qui n'acquière de valeur qu'à l'instant où l'ondulation ascendante parvient au point de suspension, et dont les valeurs relatives à ce point, ou à $x = 0$, soient toujours égales et de signe contraire aux valeurs du terme $\frac{\int.H,Fhdh}{\sqrt[4]{(l-x)}}$. Cette addition est permise, puisque la valeur de y continuera de satisfaire à l'équation (1), à cause de la forme linéaire de cette équation : il résultera du terme ajouté, une ondulation descendante dont le mouvement sera le même que celui de la première ondulation de cette espèce, et qui succédera à l'ondulation ascendante comme l'écho succède au son direct, dans une

ligne d'air terminée par un point fixe. En général, la transmissi
mouvement dans une chaîne pesante, homogène, également épaiss
toute son étendue, et suspendue par une de ses extrémités, est ana
à la propagation du son dans un canal cylindrique, lorsque la tem
ture et la densité de l'air varient, comme nous l'avons supposé au n.
et que le canal est fermé à son extrémité inférieure; et si l'épaisse
la chaîne était variable suivant une loi donnée, on trouverait toi
une loi de température et de densité dans l'étendue du canal,
laquelle le mouvement de la chaîne et celui de l'air seraient e
semblables.

SUITE DE L'ANNONCE

De la Feuille publiée sous le titre :

CORRESPONDANCE SUR L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

RÉDIGÉE PAR M. HACHETTE.

Un volume in-8.°, *petit caractère, de 386 pages.*

ON a donné dans le Cahier précédent de ce Journal *(page 372)* la Table des matières contenues dans les cinq premiers Numéros; depuis cette époque (frimaire an 14, décembre 1805), M. *Hachette* a publié trois autres Numéros qui contiennent les articles suivans :

VI.e NUMÉRO. *Juillet 1806.*

§. I.er

GÉOMÉTRIE. Trouver les jours de l'année où le temps vrai est égal au temps moyen ! *Solution de ce problème*, en n'employant que la ligne droite et le cercle; par M. *Hachette.*

Théorème. Si entre deux droites fixes et qui se coupent, on fait mouvoir deux plans rectangulaires, la surface engendrée par la droite intersection des deux plans mobiles, est un cône qui a même sommet que l'angle des deux droites fixes, et qui a pour base un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'une ou l'autre de ces droites; par M. *Hachette.*

Extrait d'une Lettre de M. *Dupin*, officier du génie maritime, sur les rayons de courbure des surfaces.

Démonstration de l'égalité de volume des polyèdres symétriques; par M. *Ampère*, répétiteur de mathématiques à l'École polytechnique.

ANALYSE APPLIQUÉE À LA GÉOMÉTRIE.

De la courbe de contact d'une surface conique avec une surface dont l'équation est du degré *m*; par M. *Hachette.*

Solution de ce problème : Mener un plan dans l'espace, de manière que la somme des perpendiculaires abaissées sur ce plan, et de plusieurs points donnés à volonté, soit égale à une droite d'une longueur donnée; par M. *Puissant*, professeur de mathématiques à l'École militaire de Fontainebleau.

Du cercle tangent à trois cercles donnés; par M. *Cauchy*, Élève ingénieur des ponts et chaussées.

De l'arête de rebroussement sur la surface enveloppe de l'espace que parcourt une sphère dont le centre décrit une cycloïde; par M. *Livet*, répétiteur à l'École polytechnique.

Programme des manipulations chimiques qui doivent être exécutées par les Élèves de l'École polytechnique, présenté par M. *Guyton*, et adopté par le Conseil d'instruction, dans sa séance du 20 mai 1806.

Annonce de livres publiés par des personnes de l'École polytechnique.

§. II. *Événemens particuliers.*

§. III. *Personnel des Élèves.*

§. IV. *Actes du Gouvernement, relatifs à l'École polytechnique.*

Une Planche contenant 10 Figures.

VII.e NUMÉRO. *Janvier 1807.*

§. I.er

ANALYSE APPLIQUÉE À LA GÉOMÉTRIE.

Solution de ce problème : Trouver l'équation de la surface développable qui a pour arête de rebroussement une courbe à double courbure, dont on connaît l'équation unique aux différences ordinaires; par M. *Monge.*

Des relations qui existent entre les coordonnées des points où trois droites rectangulaires, passant par le centre de la sphère, coupent la surface de cette sphère; par M. *Monge.*

De quelques propriétés des rayons de courbure d'une surface, par M. *Hachette.*

Analyse d'un Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, par M. *Dupin*, officier du génie maritime.

Plusieurs questions de géométrie, résolues par des Élèves de l'École polytechnique.

Sur les surfaces du second degré; par M. *Poisson.*

Sur les développées des arcs de cercle, par M. *Poinsot*, ancien Élève, professeur au Lycée Bonaparte.

STATIQUE. Moyens de déterminer rigoureusement certains centres de gravité, par M. *Berthot*, ancien Élève, professeur de mathématiques, au Lycée de Dijon.

GÉOMÉTRIE. De l'hyperboloïde de révolution, engendrée par une ligne droite mobile qui tourne autour d'une autre droite fixe; par M. *Hachette.*

PHYSIQUE. Sur l'action capillaire, par M. *Laplace.*

Service des ponts et chaussées. De la nouvelle Route du Simplon, par le Valais.

CHIMIE. Extrait d'un Mémoire sur la théorie de la fabrication de l'acide sulfurique, par MM. *Desormes* et *Clément;* Mémoire extrait par M. *Hachette.*

§. II.

Conseil de perfectionnement, septième session.

Rapport sur l'École des mines, par M. *Gillet-Lamont*, inspecteur des mines.

§. III. *Personnel.*

§. IV. *Actes du Gouvernement, relatifs à l'École polytechnique.*

VIII.e NUMÉRO. *Mai 18[illegible]*

SOLUTION analytique de la pyramide triangulaire, comprenant la trigonométrie sphérique, et son application à la mesure du méridien; par M. *Hachette.*

Sur le mouvement d'un fluide pesant, incompressible et homogène, qui s'écoule d'un vase par un orifice horizontal, en admettant l'hypothèse du parallélisme des tranches horizontales; par M. *Poisson.*

Note sur le belier hydraulique, par M. *Hachette.*

Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillans des surfaces courbes; par MM. *Monge* et *Hachette.*

Problème de géométrie, résolu graphiquement, en ne faisant usage que de la règle. (*Article de M.* Hachette.)

Des courbes du second degré, par M. *Brianchon*, officier d'artillerie, ancien Élève de l'École polytechnique.

Démonstration analytique d'un théorème de géométrie donné par M. *Hachette*, par M. *Puissant*, professeur de mathématiques à l'École militaire de Fontainebleau.

De la perspective linéaire par la méthode des points de concours, par M. *Hachette*.

Énoncé de problèmes à résoudre.

Lettre de M. *Français*, officier du génie, ancien Élève de l'École polytechnique.

Du cours de grammaire et de belles-lettres, fait à l'École polytechnique par M. *Andrieux*, membre de l'Institut.

Annonce d'ouvrages faits par d'anciens Élèves de l'École polytechnique.

Extrait du rapport du conseil de perfectionnement, session de 1806, sur l'admission à l'École polytechnique.

Personnel.

Lettre de M. *Lacuée*, gouverneur de l'École impériale polytechnique, sur les aspirans à l'École polytechnique soumis à la conscription de 1807.

Précis historique sur l'École impériale polytechnique.

Notice sur les Écoles de services publics.

Liste des membres du premier conseil d'instruction de l'École polytechnique.

Sur les Figures contenues dans les deux Planches jointes à ce Numéro.

PLANCHE I.re

Fig. 1, 2, 3. Trigonométrie sphérique.
Fig. 4. Mémoire de mécanique, par M. *Poisson*.
Fig. 5, 6. Solution d'un problème de géométrie, par la règle seulement.
Fig. 7, 8, 9, 10. Mémoire de géométrie, par M. *Brianchon*.
Fig. 11. Géométrie analytique, par M. *Puissant*.

PLANCHE II.e

Fig. 1, 2, 3. Perspective linéaire par la méthode des points de concours.

IX.e NUMÉRO. *Janvier 1808.*

De la ligne droite et du plan, rapportés à des coordonnées obliques, par M. *Français*, ancien Élève, officier du génie.

Solution de ce problème : Étant donnée une pyramide triangulaire, on propose de la couper par un plan en deux parties équivalentes en volume, de telle manière que l'aire de la section plane qui sépare les deux parties, soit un *minimum ;* par MM. *Français, Ensheim* (de Metz), et *Billy*, professeur à l'École militaire de Fontainebleau.

Des courbes du second degré, par M. *Roche*, ancien Élève, officier d'artillerie de mer.

Sur le moyen de reconnaître si une courbe est plane ou à double courbure, par M. *Dubois*, ancien Élève, ingénieur des ponts et chaussées.

Démonstration analytique du parallélogramme des forces, donnée par M. *Poisson*, et rédigée par M. *Petit*, Élève.

PERSPECTIVE des images vues par réflexion sur des miroirs à surfaces courbes. — Sur les propriétés des projections stéréographiques, par M. *Hachette.*

ANALYSE APPLIQUÉE À LA PHYSIQUE. Mémoire sur la théorie du son, par M. *Poisson.*

Mémoire sur la théorie de la lumière, par M. *Malus* (extrait par M. *Hachette*).

GÉOMÉTRIE. Des courbes du quatrième degré, considérées comme les projections de la courbe d'intersection de deux surfaces coniques du second degré ; par M. *Hachette.*

Problème de géométrie.

Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique ; annonce des ouvrages des professeurs de cette École.

PERSONNEL. Nomination à des places. — Nécrologie sur MM. *Lancret* et *Arbogast.* — Liste des Élèves admis à l'École polytechnique, en octobre 1807. — Liste des Élèves admis dans les services publics, en 1807.

Acte du Gouvernement.

Explication de la planche du numéro IX, contenant sept Figures.

TABLE

Des Articles contenus dans le XIV.e Cahier du Journal de l'École polytechnique.

Mémoire sur l'Optique, par M. Malus. . . . . Page 1—44.

Essai sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré. — Sur la détermination des Rayons de courbure et des Tangentes aux lignes de courbure. — Notes I, II, III, IV, V, VI, VII; par M. Dupin. 45—83.

Suite du Mémoire sur l'Optique. Dioptrique, par M. Malus. 84—129.

Extrait des Leçons faites à l'École polytechnique sur les Points singuliers des Courbes, dans le Cours d'Analyse de 1803.

Des Points multiples. — Des Points conjugués. — Des Points où la Tangente à la courbe est parallèle ou perpendiculaire à l'Axe des abscisses. — Des cas en défaut du Théorème de Taylor. *— Des Points d'inflexion et des Points de rebroussement; par M.* Poisson. . . . . 130—142.

Mémoire sur les Oscillations du Pendule dans un milieu résistant, et en ayant égard à l'extensibilité du fil. — Du Centre d'oscillation. — Mouvement du Pendule dans l'hypothèse d'un fil extensible; par M. Poisson. 143—158.

Mémoire sur les avantages qu'on peut retirer, dans la théorie des Courbes, de la considération des Paraboles osculatrices, avec des Réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes; par M. Ampère. . . . . 159—181.

Mémoire sur la Transformation des Coordonnées, par M. Français. . . . . 182—190.

Mémoire sur l'Intégration des Équations différentielles partielles. — Addition au Mémoire précédent; par M. Brisson. . . . . 191—261.

Essais sur l'Art de projeter les Canaux de navigation; par MM. Dupuis-Torcy *et* B. Brisson. . . . . 262—288.

Mémoire sur la possibilité de substituer le Belier hydrauliqne à l'ancienne Machine de Marly, par M. Montgolfier (Joseph).

I. Conditions de la meilleure Machine.

§. 1.er Ce que c'est qu'une Machine. — §. 2. De la Force, son expression. — §. 3. La Force a un prix. — §. 4. Valeur de la chute d'eau de Marly.

II. Valeur des anciennes Machines hydrauliques à roues et à pompes. — §. 1.er Complication des anciennes Machines. — §. 2. Effet de l'ancienne machine de Marly. — §. 3. Effet des nouvelles Pompes exécutées à Marly. — §. 4. Valeur des nouvelles Pompes. La force totale de la rivière ne doit pas suffire pour élever les 50 pouces d'eau que l'on demande.

III. Valeur du Belier hydraulique. — Résultats d'expériences sur le Belier hydraulique.

IV. Belier hydraulique capable d'élever de l'eau de la rivière de Seine à l'aqueduc de Marly. — §. 1.er Description succincte de la Machine. — §. 2. Jeu du Belier hydraulique. — Première époque. — Pression motrice. — Deuxième époque. — Troisième époque. — Quatrième époque. — §. 3. Effet du Belier.

V. Idée générale de l'exécution entière du Belier hydraulique à Marly. — Conclusions.

Lettre de M. Fay-Satonay, *maire de Lyon, à M.* Montgolfier. — *Calcul du Belier hydraulique établi dans la maison de campagne de M.* Fay-Satonay, *maire de Lyon; par M.* Hachette. . . . . Page 289—318.

Mémoire sur la théorie du Son. — Équations différentielles du Mouvement de l'air. — Propagation du Son dans une masse d'air dont la densité et la température sont constantes. — Mélange des Sons simultanés. — Réflexion du Son. — Examen des différentes circonstances physiques qui peuvent influer sur la vîtesse du Son. — Mouvement d'une Ligne d'air dans le cas où les Vîtesses des molécules ne sont pas supposées très-petites. — Propagation du Son, lorsque la température et la densité de l'air sont supposées variables. — Mouvement d'une Chaîne pesante; par M. Poisson. . . . 319—392.

Suite de l'annonce de la Feuille publiée sous le titre : Correspondance sur l'École impériale polytechnique, *rédigée par M.* Hachette. 393—397.

SUPPLÉMENT (*) AUX LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS, par M. *Lagrange*.

LEÇON VINGT-UNIÈME. Des équations de condition par lesquelles on peut reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque de plusieurs variables, est une fonction dérivée.

Analogie de ces équations avec celles du problème des isopérimètres.

Histoire de ce problème. — Méthode des variations..... Page 3—37

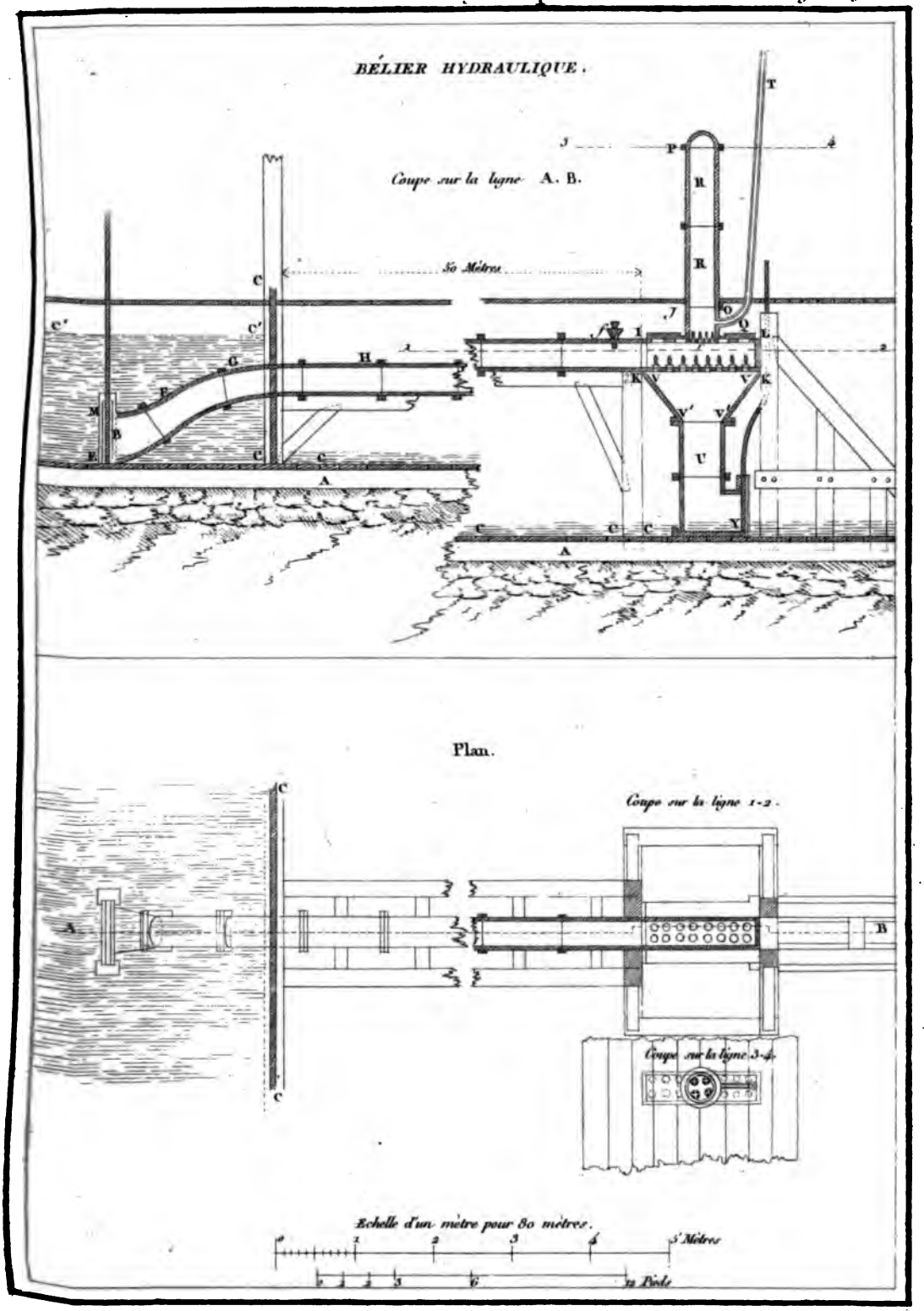
LEÇON VINGT-DEUXIÈME. Méthode des variations, déduite de la considération des fonctions..... 38—90.

FIN de la Table du XIV.e Cahier.

(*) Les vingt premières Leçons formant le XIII.e Cahier de ce Journal, on a donné au Supplément une pagination particulière, afin qu'on puisse le réunir à ce Cahier.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur général de l'Imprimerie impériale, Membre de la Légion d'honneur.


BÉLIER HYDRAULIQUE.
Coupe sur la ligne A. B.
50 Mètres
Plan.
Coupe sur la ligne 1-2.
Coupe sur la ligne 3-4.
Echelle d'un mètre pour 80 mètres.
5 Mètres
12 Pieds

Digitized by Google

C
c
24

Mémoire de M.r Malus.

Fig. 1.° $X=\infty$.

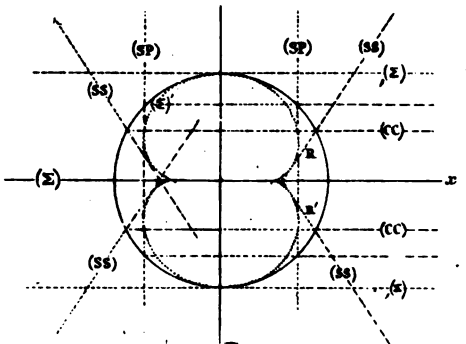


Fig. 2.de $X=f\,\S\,f>1$.

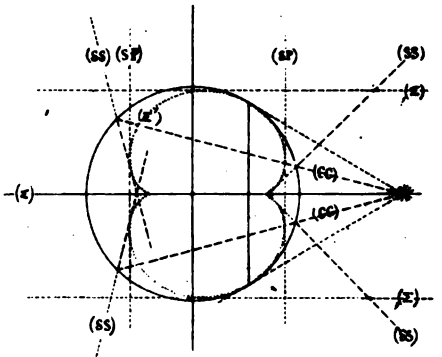


Fig. 3.° $X=\S$.

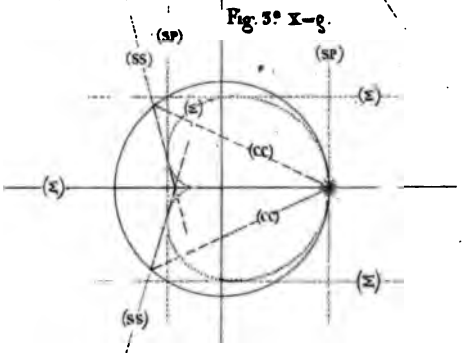


Fig. 4. $X=f\,\S\,f=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

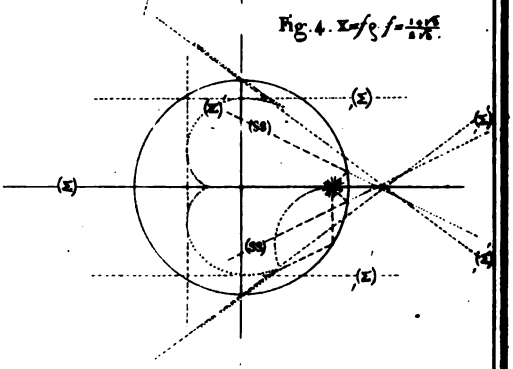


Fig. 5. $X=f\,\S\,f=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

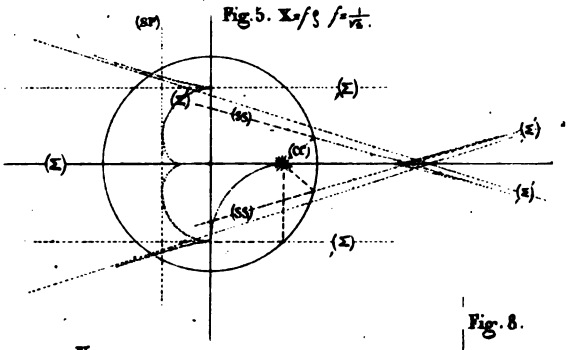


Fig. 6

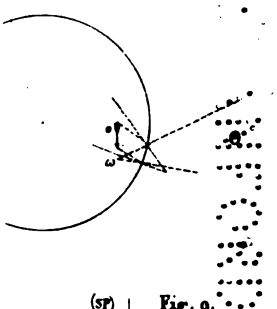


Fig. 7.

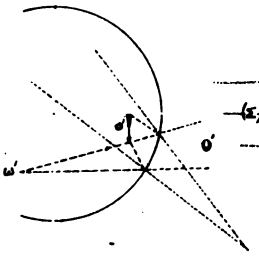


Fig. 8.

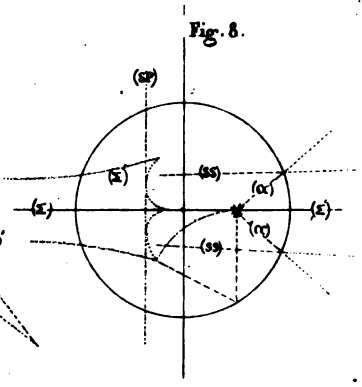
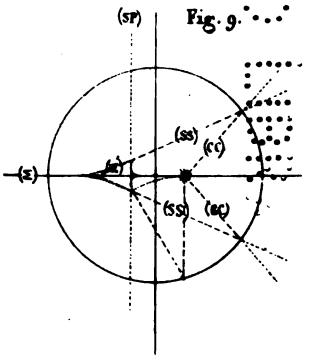
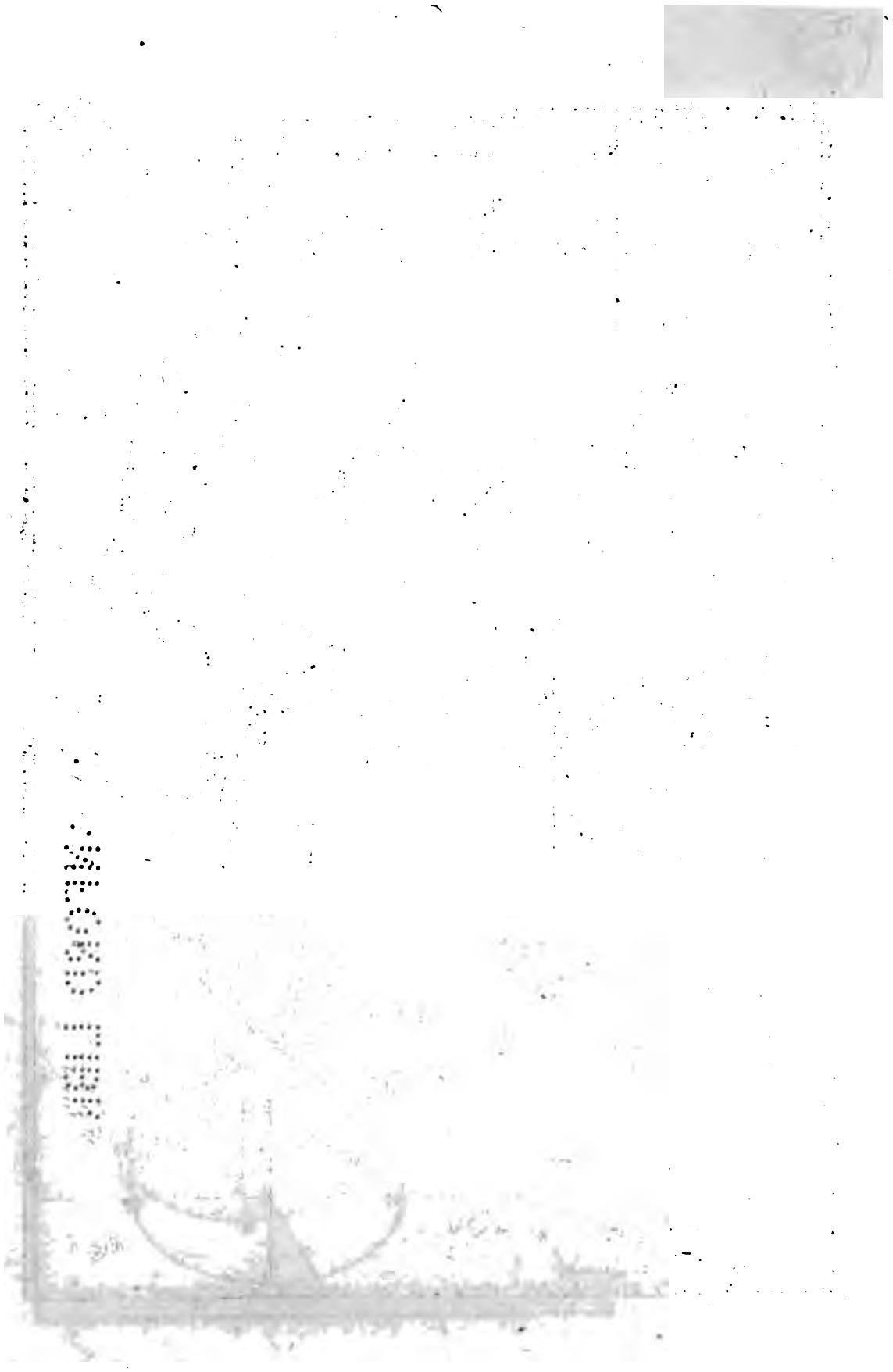


Fig. 9.





C
c
23.

Mémoire de Mr Dupin.

Fig. 1.

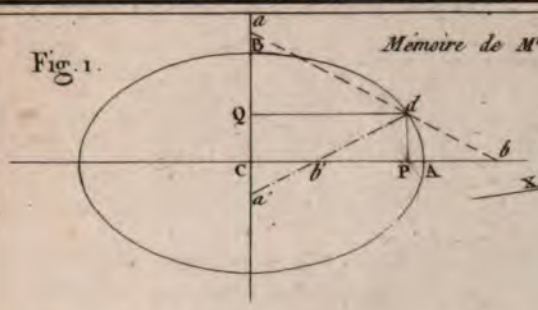


Fig. 2.

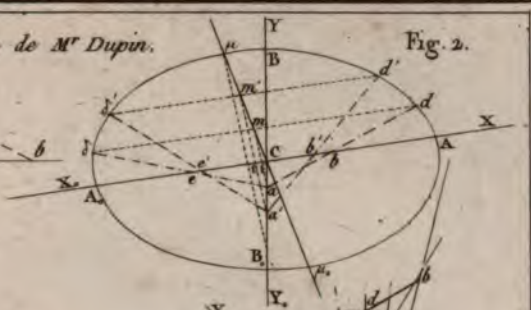


Fig. 3.

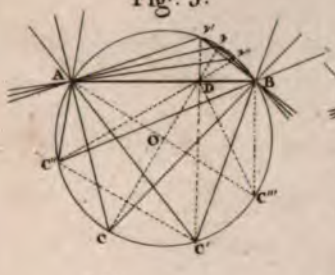


Fig. 4.

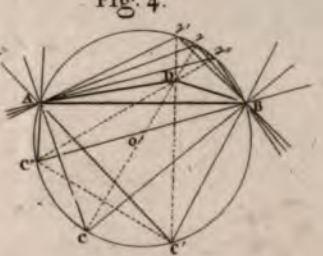


Fig. 5.

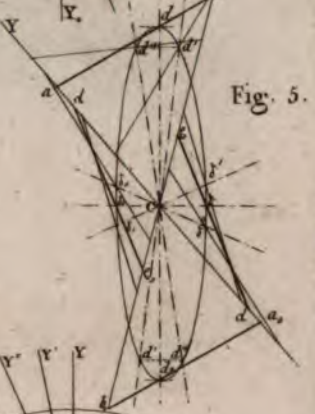


Fig. 6

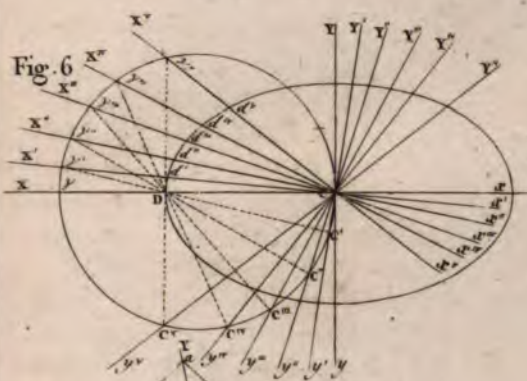


Fig. 7.

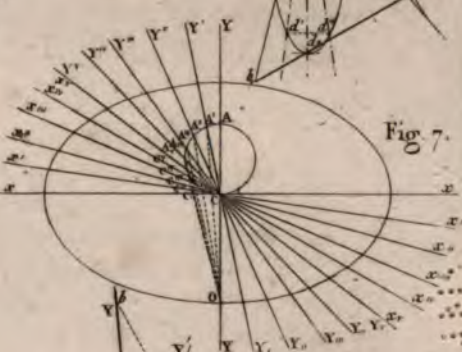


Fig. 8.

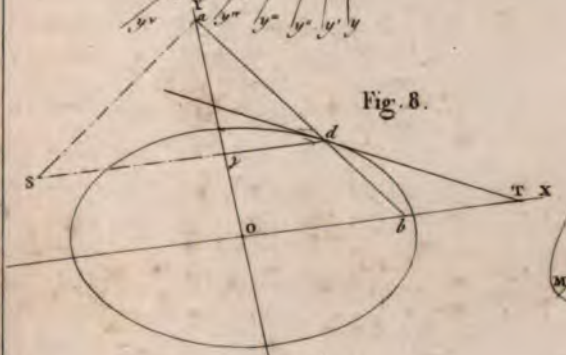


Fig. 9.

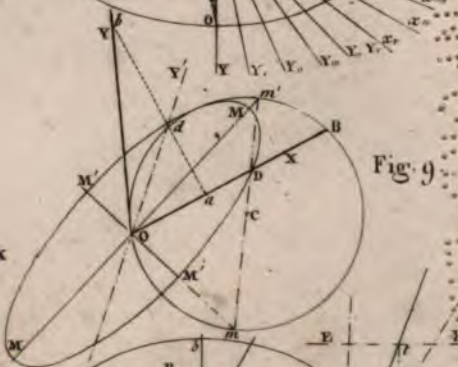


Fig. 10

Fig. 11.

ERRATA *pour le Mémoire de M.* MALUS.

Page 4, ligne 3, $\left(\frac{do}{dz}\right)$, lisez $\left(\frac{do}{dy'}\right)$.

Id. —— 6, βz, *lisez* βs.

6, —— 3, $\left(\frac{dm}{dz'}\right)N$, lisez $\left(\frac{dm}{dy'}\right)N$.

Id. —— 25, entre cinq, *lisez* entre les cinq.

Id. —— 27, surface, *lisez* surfaces.

7, —— 16, $-(mM+nN+oO)+(mM+nN+oO)(mM'+nN'+oO')$, lisez $-(mM+nN+oO)(mM'+nN'+oO')$.

Id. —— 23, $(nq+or^2)$, lisez $(nq+or)^2$.

Id. —— 25, $(mp+or)$, lisez $(mp+or)^2$.

Id. —— 27, $(mp+nq)$, lisez $(mp+nq)^2$.

12, —— 22, et un, *lisez* et au.

13, —— 28, $b\left(\frac{dp}{dy'}\right)$, lisez $b\left(\frac{dq}{dy'}\right)$.

15, —— 17, comprenant, *lisez* renfermant.

17, —— 4, $\frac{i'^2}{K'^2}$, lisez $\frac{i^2}{k^2}$.

Idem..... mdx', lisez mdn.

20, —— 13, placées, *lisez* planes.

22, —— 28, dz'^2, lisez dx'^2.

Id. —— 29, $2n'$, lisez $2x'$.

23, —— 23, visuel; *ajoutez*, et la vision est confuse.

24, —— 19, $(D-R)(D-R')$, lisez $(D-R)(D-R')\Delta^2$.

26, —— 6-7, le numérateur de x appartient à y, et celui de y à x.

28, —— 5, $(\rho^2-2x'x)$, lisez $(\rho^2-2x'x)^2$.

Id. —— 14, $(\rho^2-x'^2)$, lisez $(\rho^2-x'^2)^2$.

30, —— 15, [14.], *lisez* [14.] *Fig. II.*

34, —— 9, $R=R'$, lisez R et R'.

Id. —— 23, $\frac{i}{K}$, $\frac{i'}{K'}$, lisez $\frac{i}{k}$ $\frac{i'}{k'}$.

35, —— 23, , si, *lisez* . Si.

Id. —— 28, $i'k'$, *ajoutez*, lorsque $D=\infty$.

36, —— 2, $D-\infty$, *lisez* $D>R'$.

Id. —— 15, ζ, *lisez* ρ.

36, —— 16, (ss), lisez (SS).

Id. —— 17, [13.], *lisez* [12.].

Id. —— 22, ζ, *lisez* ρ.

37, —— 2, [15.], *lisez* [14.].

Id. —— 4, au dénominateur, $2f^3$, *lisez* $2f^3\rho^2$.

Page 37, ligne 17, $\frac{dx'}{dx'}$, lisez $\frac{dx}{dx'}$.

38, —— 17, [13.], *lisez* [12.].

Id. —— 18, ζ, *lisez* ρ.

39, —— 8, K lisez k, K' lisez k'.

Id. —— 9, K, lisez k.

40, —— 17, K, lisez R.

Id. —— 22, $\frac{1}{f\rho}$, lisez $f\rho$.

Idem..... $-i'$, lisez $-i$.

44, —— 11, $[\mu(D+R')+\sqrt{(R-R')}]$, lisez $f[(D+R'),(R-R')]$.

ERRATA *pour le Mémoire de M.* DUPIN.

Page 46, ligne 26, celle du grand axe, *lisez* la somme ou la différence des demi-axes.

47, —— 7, *des axes*, lisez *des demi-axes.*

Id. —— 8, *au petit axe*, lisez *au petit demi-axe.*

Id. —— 25, les arcs, *lisez* les axes.

48, —— 6, des lignes, *lisez* des distances.

Id. —— 8, $-\frac{Ca}{Cb}X, XY$, lisez $-\frac{Ca}{Cb}X; X, Y.$

49, —— 20 et 21, du point *a* une perpendiculaire à CY, *lisez* la droite mobile *ba* perpendiculaire à CX.

Id. —— 22, μ, *lisez* μ ou μ_o.

Idem..... μ_o, *lisez* $\mu C \mu_o$.

50, —— 1, en formant, *lisez* en portant.

Id. —— 2, cd, lisez Cd.

Id. —— 3, *(Fig. V)*, lisez *(Fig. III et V).*

Id. —— 10, soient égales, *lisez* leur soient égales.

Id. —— 22, $cd, c\delta$, lisez $Cd, C\delta$.

51, —— 18, deux axes, *lisez* deux demi-axes.

Id. —— 23, des deux axes, *lisez* des deux demi-axes, *(Fig. VI).*

Id. —— 31, *Ajoutez un* point *avant le mot* d'eux.

Idem..... *Substituez une* virgule *au mot* ou.

52, —— 1, Si, à partir, *lisez (Fig. VII)* Si, à partir.

Id. —— 2, deux axes, *lisez* deux demi-axes.

Id. —— 4, le plus loin, *lisez* la plus éloignée.

Id. —— 16, systèmes, *lisez* systèmes de directrices.

Id. —— 22, *Après le mot* diamètre, *mettez un point à la place de la virgule.*

53, —— 26, qui ne se coupent pas, *lisez* qui ne se coupent pas;

54, —— 2, ce qu'il fallait démontrer, *lisez* laquelle est égale à la courbe qu'elle projette.

e 54, ligne 5, *Avant le mot* l'autre, *lisez* le plan mené par l'une d'elles parallèlement à.
Id. —— 6, La longueur, *lisez* La longueur de la projection.
55, —— 21, qu'une, *lisez* qu'un.
58, —— 31, au plan donné, *lisez* un plan donnés.
60, —— 8, par le centre, *lisez* par le centre de la surface.
61, —— 24—25, elle passera, dans ce cas, par le centre de la courbe du point générateur; *lisez* la courbe passant alors par le point générateur, se réduira à son centre en ce point.
63, —— 19, *Après* limites)., *ajoutez* (Note IV).
Id. —— 25, par le point, *lisez* par les points.
Id. —— 30, dans, *lisez* suivant.
64, —— 13, le produit, *lisez* ce produit.
Id. —— 16, (*Voyez* les notes II et III), *lisez* (*Voyez* la note V).
66, —— 2, $d\gamma s$, lisez $d\gamma S$.
Idem..... a, lisez aS.
Id. —— 4, das, lisez daS.
Idem..... ds, lisez dS.
Id. —— 8, coordonnés par, *lisez* coordonnés, par.
Id. —— 17, parallèle, *lisez* parallèlement.
Id. —— 24, ces systèmes, *lisez* leurs systèmes.
Id. —— 25, ces systèmes, *lisez* leurs systèmes.
Id. —— 26, (note V), *lisez* (note III).
68, —— 5, mm, lisez mm'.
Id. —— 9, Oxa, lisez OXa.
69, —— 11, et par, *lisez* et pour.
70, —— 2, traînerait, *lisez* tracerait.
72, —— 9, $R' = \frac{D''^3}{\Delta}$, lisez $R'' = \frac{D''^3}{\Delta}$.
Id. —— 21, *Substituez un* point *à la* virgule.
Id. —— 22, *Substituez une* virgule *au* point.
73, —— 32, parallèles, asymptotes, *lisez* parallèles aux asymptotes.
74, —— 9, Omd, $Om'd$, lisez OmD, $Om'D$.
75, —— 32, une suite des trois, *lisez* une des trois.
76, —— 3, degré : donc, *lisez* degré dont.
Id. —— 7, entre eux, *lisez* entre elles.
79, —— 1, $OSID$, lisez $OsID$.
80, —— 5, trois points, *lisez* trois plans.
Id. —— 14, directeurs, *lisez* coordonnés.
Id. —— 24, d'une courbe qui sont, *lisez* de la courbe.
Id. —— 25, *Supprimez* la.
Id. —— 26, point *directeur*, *lisez* que décrit alors le point *directeur*.
81, —— 4, que ces plans, *lisez* sans que ces plans.
82, —— 1, d'où l'on tire : *transportez ces mots à la seconde ligne.*

ERRATA *pour la Suite du Mémoire de M.* MALUS, *sur l'Optique.*

Page 85, ligne 3, $]^2$, *lisez* $]^{\frac{1}{2}}$.
87, —— 25, $(b\,O$, lisez $(b\,O'$.
88, —— 21, pqq, lisez pq.
89, —— 2–3, $\left.\begin{matrix}\\=0,\end{matrix}\right\}$ *lisez* $\left.\begin{matrix}=0.\\=0.\end{matrix}\right\}$ *Ces deux lignes forment chacune une équation séparée.*
90, —— 15, ζ^2, lisez ζ'^2.
91, —— 5, $-X\zeta'$, lisez $-X\zeta$.
Id. —— 25, véritable, *lisez* variable.
92, —— 10, $\zeta^{\frac{2}{n}}\ldots y^{\frac{2}{2}}$, lisez $\zeta^{\frac{2}{3}}\ldots y^{\frac{2}{3}}$.
95, —— 7, à l'axe des révolutions, *lisez* à l'axe de révolution.
Id. —— 12, (cc), lisez (CC).
Id. —— 17, $(c'c')$, lisez $(C'C')$.
99, —— 18, $X^2(x'^2-\rho^2)]^{\frac{1}{1}}\}^2\ldots(S'S')$, *lisez* $X^2(A^2-\rho^2)]^{\frac{1}{2}}\}^2\ldots(S'S')$.
Id. —— 20, $\frac{x'l^2\Delta^2+\ldots}{x'l^2\Delta^2+\ldots}$ *lisez* $\frac{x'^2l^2\Delta^2+\ldots}{x'^2l^2\Delta^2+\ldots}$.
101, —— 5, $o_{,}$, lisez $_{,}o$.
Id. —— 26, (F), lisez $_{,}(F)$.
102, —— 26, $d'_{,}x$, lisez $d_{,}x$.
106, —— 14, $_{,}\xi''$, *lisez* $_{,}\xi$.
Id. —— 19, ce foyer, *lisez* le foyer.
107, —— 3, $_{,,}x-{}_{,,}\xi$, *lisez* $_{,,}x-{}_{,}\xi$.
Id. —— 5, $_{2n-2}\varphi$, *lisez* $_{2n-2}\varphi'$.
Idem..... $(_{2n-2}l-1)_{2n-2}\varphi'$, *lisez* $(_{n-2}l-1)-{}_{2n-2}\varphi'$.
108, —— 11, $(x-\beta)^2$, *lisez* $(_{,}x-\beta)^2$.
109, —— 13, $-\rho\,\frac{l}{2(l-1)}$, *lisez* $-\rho\,\frac{1}{2(l-1)}$.
119, —— 15, donnera à l'équation, *lisez* donnera l'équation.
120, —— 17, le cercle d'aberration longitudinale, *lisez* d'aberration latitudinale.
121, —— 1, $y^2+\zeta^2$, *lisez* $_{,}y^2+{}_{,}\zeta^2$.
Id. —— 27, l'équation avec la suivante, *lisez* l'équation $(_{,}\Sigma)$ avec la suivante.
127, —— 16, $m(D+R)n$, lisez $m(D+R)+n$.

MÉMOIRE sur le Belier hydraulique.

Page 303, ligne 12, *au lieu de* 5,63, *lisez* $\frac{5,63}{4}$.

SUPPLÉMENT

AUX LEÇONS

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS,

DONNÉES EN L'AN 7 [1799]

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR J. L. LAGRANGE.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

1808.

AVERTISSEMENT.

Les vingt premières Leçons sur le Calcul des fonctions, forment le XIIe Cahier de ce Journal.

SUPPLÉMENT

AUX LEÇONS

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS.

LEÇON VINGT-UNIÈME.

Des équations de condition par lesquelles on peut reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque de plusieurs variables, est une fonction dérivée exacte. — Analogie de ces équations avec celles du problème des Isopérimètres. — *Histoire de ce problème. — Méthode des variations.*

TOUTE fonction d'une seule variable peut toujours être regardée comme une dérivée exacte; car si elle n'a pas naturellement une fonction primitive, on peut toujours en trouver une par les séries, soit en résolvant la fonction donnée en série de puissances de la variable, et prenant ensuite la fonction primitive de chaque terme, soit en employant la série générale donnée dans la leçon douzième.

Il n'en est pas de même pour les fonctions de plus d'une variable; et quoiqu'on puisse toujours s'assurer, par les règles de la dérivation des fonctions, si une fonction composée de différentes fonctions dérivées résulte d'une fonction primitive donnée, comme nous l'avons vu dans la leçon dix-neuvième, il est souvent difficile de juger si elle est une dérivée exacte d'une fonction quelconque inconnue. Cet objet a occupé les géomètres presque dès la naissance du calcul différentiel; ils ont cherché des caractères généraux pour reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque peut être la dérivée exacte d'une fonction de l'ordre

immédiatement inférieur, ou même d'un ordre inférieur quelconque. Ce sont ces caractères qu'on connaît dans le calcul différentiel, sous le nom de *conditions d'intégrabilité*, et qu'*Euler* et *Condorcet* ont réduits à des formules générales et élégantes, qui méritent d'être connues.

Pour trouver ces formules de la manière la plus simple, je commence par considérer une fonction V de différentes variables x, y, z, &c. et de leurs dérivées, dans laquelle une de ces variables z et ses dérivées z', z'', &c., ne se trouvent par-tout qu'à la première dimension; il est clair que la fonction V sera de cette forme

$$V = Nz + Pz' + Qz'' + Rz''' + \&c.,$$

N, P, Q, &c. étant des fonctions de x, y, &c. et de leurs dérivées sans z.

Rien n'est plus facile que de trouver les conditions nécessaires pour qu'une fonction de cette forme soit une dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre la variable z et les autres.

En effet, si on considère les fonctions dérivées du produit de deux quantités quelconques, et qu'on dénote, comme nous l'avons proposé à la fin de la leçon deuxième, par des traits appliqués aux parenthèses, les fonctions dérivées des quantités renfermées dans ces parenthèses, on a

$$(Pz)' = Pz' + P'z;$$

donc

$$Pz' = (Pz)' - P'z.$$

On a de la même manière

$$Qz'' = (Qz')' - Q'z',$$
$$Q'z' = (Q'z)' - Q''z;$$

donc

$$Qz'' = (Qz')' - (Q'z)' + Q''z.$$

On trouvera pareillement

$$Rz''' = (Rz'')' - (R'z')' + (R''z)' - R'''z,$$

et ainsi de suite.

Faisant ces substitutions dans l'expression de V, elle devient, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned} V = &(N - P' + Q'' - R''' + \&c.)z \\ &+ (Pz)' - (Q'z)' + (R''z)' - \&c. \\ &+ (Qz')' - (R'z')' + \&c. \\ &+ (Rz'')' - \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Comme tous les termes de cette formule, à l'exception de ceux de la première ligne qui se trouvent multipliés par z, sont déjà des fonctions dérivées exactes, il faudra, pour que la fonction V soit une dérivée exacte, que les termes multipliés par z, savoir :

$$(N - P' + Q'' - R''' + \&c.)z$$

forment ensemble une fonction dérivée exacte.

Or, il est facile de se convaincre que cela est impossible tant qu'on n'établit aucune relation entre z et les autres variables : donc il faudra que ces termes disparaissent d'eux-mêmes de l'expression de V, ce qui donnera l'équation de condition

$$N - P' + Q'' - R''' + \&c. = 0,$$

laquelle devra par conséquent être identique pour que la fonction V puisse avoir, en général, une fonction primitive. Lorsque cette condition aura lieu, la fonction primitive de V sera évidemment

$$(P - Q' + R'' - \&c.)z + (Q - R' + \&c.)z' + (R - \&c.)z'' + \&c.$$

En général, quel que soit le nombre des variables contenues dans la fonction V, si l'une d'elles, ainsi que ses dérivées sont linéaires, on aura toujours, relativement à cette variable, la même équation de condition, pour que la fonction V devienne une fonction dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre ces variables.

Après avoir résolu le cas des fonctions linéaires par rapport à l'une des variables, nous allons réduire à ce cas très-simple la recherche des équations de condition pour les fonctions d'une forme quelconque.

développée suivant les puissances et les produits des quantités ω, ω', ω'', &c. deviendra

$$F(x, y, y', y'', \&c.) + \omega F'(y) + \omega' F'(y') + \omega'' F'(y'') + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 F''(y) + \omega\omega' F'(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 F''(y') + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2.3}\omega^3 F'''(y) + \tfrac{1}{2}\omega^2\omega' F^{IV}(y, y') + \&c.$$
$$\&c.$$

Je ne renferme ici entre les crochets, pour plus de simplicité, que les quantités par rapport auxquelles il faut prendre les fonctions dérivées indiquées par les accens.

On aura donc ainsi

$$\overset{1}{U} = \omega F'(y) + \omega' F'(y') + \omega'' F(y'') + \&c.$$
$$\overset{2}{U} = \tfrac{1}{2}\omega^2 F''(y) + \omega\omega' F'(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 F''(y') + \&c.$$
$$\overset{3}{U} = \tfrac{1}{2.3}\omega^3 F'''(y) + \tfrac{1}{2}\omega^2\omega' F^{IV}(y, y') + \&c.$$
$$\&c.$$

Or, ayant trouvé ci-dessus la valeur de $\overset{1}{U}$, la comparaison des termes multipliés par ω, ω', ω'', &c. donnera

$$F'(y) = P - Q' + R'' - \&c.$$
$$F'(y') = Q - R' + \&c.$$
$$F'(y'') = R - \&c.$$
$$\&c.$$

Ayant ainsi les fonctions dérivées du premier ordre par rapport à chacune des quantités y, y', y'', &c., on en déduira, par les règles données, les fonctions dérivées du second ordre et des suivans, par rapport à chacune des mêmes quantités; on aura par conséquent les valeurs des termes suivans $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, &c., du développement de U. Or, on suppose

$$F(x, y, y', y'', \&c.) = U,$$

et

$$F(x, y + \omega, y' + \omega', y'' + \omega'', \&c.) = U + \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U} \&c.$$

Ainsi

Ainsi on aura

$$F(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)-F(x,y,y',y'',\&c.),=\overset{1}{U}+\overset{2}{U}+\overset{3}{U}+\&c.$$

Par conséquent la différence des deux fonctions $F(x,y+\omega,y'+\omega'\&c.)$ et $F(x,y',y'',\&c.)$ sera donnée au moins par les séries.

Représentons maintenant par

$$f(x,y,y',y'',\&c.)$$

la fonction proposée V dont on a supposé que U ou $F(x,y,y',y'',\&c.)$ est la fonction primitive; on aura $F(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)$ pour la fonction primitive de $f(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)$; donc la fonction primitive de $f(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)-f(x,y,y',y'',\&c.)$ sera donnée.

De ce que nous venons de démontrer, il suit,

1.° Qu'une fonction quelconque de la forme $f(x,y,y',y'',\&c.)$ ne peut avoir une fonction primitive, indépendamment d'aucune relation entre x et y, à moins que l'équation de condition

$$N-P'+Q''-R'''+\&c.=0,$$

trouvée ci-dessus, n'ait lieu d'elle-même;

2.° Que toutes les fois que cette équation aura lieu, la fonction

$$f(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)-f(x,y,y',y'',\&c.)$$

aura nécessairement une fonction primitive, quelle que soit la valeur de ω.

Faisons maintenant $\omega=-y$, la fonction $f(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega'',\&c.)$ se réduira à $f(x)$, et aura par conséquent toujours une fonction primitive, puisqu'elle ne contiendra plus qu'une variable : donc aussi la fonction $f(x,y,y',y'',\&c.)$ aura nécessairement une fonction primitive.

Or, ayant supposé que

$$N\omega+P\omega'+Q\omega''+R\omega'''+\&c.$$

sont les premiers termes du développement de la fonction proposée V,

Maintenant, si on considère une fonction quelconque de x, y, x', y', x'', y'', &c., et qu'on demande les conditions nécessaires pour que cette fonction soit une fonction dérivée exacte ; en représentant cette fonction par

$$f(x, x', x'', \&c.; y, y', y'', \&c.);$$

et faisant, pour abréger,

$$X = f'(x) - [f'(x')]' + [f'(x'')]'' - \&c.$$
$$Y = f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \&c.$$

on aura, par ce qu'on a démontré plus haut, si les deux variables x et y sont regardées comme indépendantes, les deux équations $X=0$ et $Y=0$, qui devront avoir lieu à-la-fois.

Mais, si y doit être une fonction de x, alors en substituant Φx pour y et les dérivées de Φx, savoir, $x' \Phi' x$, $x'' \Phi' x + x'^2 \Phi'' x$, &c. pour y', y'', &c. ; il faudra que la fonction proposée devienne simplement de la forme $x' F x$, comme si on y faisait $x' = 1$. Ainsi, si on met dans cette fonction $x + \xi$ à la place de x, et qu'on développe, en ne tenant compte que des premières dimensions de ξ, elle deviendra

$$x' F x + \xi' F x + x' \xi F' x,$$

où l'on voit que les termes qui contiennent ξ, forment ensemble une fonction dérivée, dont la primitive est $\xi F x$, quelle que soit la valeur de ξ.

Je conclus de là que si, dans la fonction proposée où y est censé fonction de x, on substitue aussi $x + \xi$ à la place de x, et qu'on développe suivant ξ, les termes qui ne contiendront que la première dimension de ξ et de ses dérivées, devront former ensemble une fonction dérivée exacte, quelle que soit la valeur de ξ : or, y étant Φx, il deviendra par la substitution de $x + \xi$ à la place de x, $\Phi x + \xi \Phi' x$, en ne tenant compte que de la première dimension de ξ; donc si on fait, pour abréger, $\xi \Phi' x = \omega$, il faudra mettre $y + \omega$ à la place de y, tandis qu'on met $x + \xi$ à la place de x.

Par ces substitutions et les développemens, les termes de la fonction proposée qui ne contiendront que les premières dimensions de ξ, se trouveront représentés par

$$\xi f'(x) + \xi' f'(x') + \xi'' f'(x'') + \&c.$$
$$+ \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \&c.;$$

et, par ce que nous avons démontré dans cette leçon, pour que ces termes forment une dérivée exacte, il faudra que la quantité

$$(f'(x) - [f'(x')]' + [f'(x'')]'' - \&c.)\,\xi$$
$$+ (f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \&c.)\,\omega$$

soit elle-même une dérivée exacte.

Cette quantité est la même chose que $X\xi + Y\omega$; donc en mettant pour ω sa valeur $\xi\,\varphi' x$, elle devient $(X + Y\varphi' x)\,\xi$; et il est visible qu'elle ne peut être une dérivée exacte, indépendamment de la valeur de ξ, qui doit demeurer arbitraire; donc il faudra que cette quantité s'évanouisse d'elle-même, et par conséquent qu'on ait l'équation identique $X + Y\varphi' x$: mais y étant φx, on a en général $y' = x'\varphi' x$; donc, substituant cette valeur de $\varphi' x$, on aura nécessairement l'équation identique

$$Xx' + Yy' = 0.$$

Il suit de là que l'équation de condition $X = 0$, qu'on aurait par la considération de la variable x et de ses dérivées, sera identique avec l'équation de condition $Y = 0$, qui se rapporte à la variable y; car, faisant $X = 0$ dans l'équation précédente, on a nécessairement $Y = 0$.

On prouvera de la même manière que, pour une fonction composée de trois variables x, y, z et de leurs dérivées, on aurait l'équation identique

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

en supposant

$$Z = f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - [f'(z''')]''' + \&c.$$

De sorte que, dans ce cas, l'équation de condition $X = 0$ serait comprise dans les deux équations $Y = 0$ et $Z = 0$.

Ainsi on pourra toujours, dans la question présente, se dispenser d'avoir égard aux dérivées de la variable principale, et à l'équation de condition qui en résulterait.

Si on voulait que la fonction V fût une dérivée exacte du second ordre, il faudrait de plus que la fonction primitive de V, c'est-à-dire la fonction U, fût elle-même une dérivée exacte : or, on a

$$U = p\omega + q\omega' + r\omega'' + \&c.,$$

en supposant, pour abréger,

$$p = P - Q' + R'' - \&c., \quad q = Q - R' + \&c., \quad r = R - \&c., \ \&c.;$$

et il est facile de trouver, par les mêmes procédés qu'on a employés pour la fonction V, que la condition nécessaire pour que la fonction U soit considérée comme exacte, indépendamment de la valeur de ω, est renfermée dans l'équation

$$p - q' + r'' - \&c. = 0;$$

laquelle en remettant pour p, q, r, &c. leurs valeurs, devient

$$P - 2Q' + 3R'' - \&c. = 0.$$

Donc, pour qu'une fonction de la forme $f(x, y, y', y'', \&c.)$ soit une fonction dérivée exacte du second ordre, c'est-à-dire, une fonction dérivée d'une fonction dérivée, indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y, on aura, relativement à y, outre la première équation de condition ; celle-ci :

$$f'(y') - 2[f'(y'')]' + 3[f'(y''')]'' - \&c. = 0;$$

et l'on aurait une pareille équation relativement à z, si la fonction proposée contenait aussi z, z', z'', &c.

On trouverait de même, pour que la proposée fût une fonction dérivée du troisième ordre, cette troisième équation de condition, relativement à y :

$$f'(y'') - 3[f'(y''')]' + 6[f'(y'''')]'' - \&c. = 0;$$

et ainsi de suite.

Enfin, si on suppose qu'on n'ait, pour la détermination d'une fonction u, qu'une équation d'un ordre quelconque entre u, x et y et les fonctions dérivées u', u'', &c., y', y'', &c., de u et de y, et qu'on demande les conditions nécessaires pour que u soit une fonction de x, y, y', y'', &c., indépendamment d'aucune relation entre x et y, le problème pourra encore se résoudre par les mêmes principes, et en suivant la même méthode.

Soit $V = 0$ l'équation donnée, dans laquelle on suppose que u est une fonction de x, y', y'', &c. : si on met par-tout $y + \omega$ à la place de y, et par conséquent $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$, &c., à la place de y', y'', &c., la quantité ω étant supposée, comme ci-dessus, une fonction indéterminée de x, et qu'on développe suivant les puissances et les produits de $\omega, \omega', \omega''$, &c., la fonction V deviendra, comme plus haut,

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{&c.},$$

et l'on aura les équations particulières

$$V = 0, \quad \overset{1}{V} = 0, \quad \overset{2}{V} = 0, \text{ &c.} :$$

car si on imagine qu'on mette dans V, à la place de u sa valeur, en x, y, y', y'', &c., l'équation $V = 0$ deviendra identique ; donc l'identité subsistera aussi après la substitution de $y + \omega$, $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$, &c. pour y, y', y'', &c., et le développement suivant $\omega, \omega', \omega''$, &c. ; et comme ces dernières quantités sont supposées indépendantes de x et y, il est visible que chaque terme $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$, &c., qui contient les mêmes dimensions de $\omega, \omega', \omega''$, &c., devra être identiquement nul dans l'équation développée

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{&c.} = 0.$$

Représentons la fonction V par

$$f(u, u', u'', \text{&c.}, x, y, y' y'', \text{&c.}),$$

et dénotons par $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}$, &c. les différens termes du développement de la fonction u, dans lesquels les quantités $\omega, \omega', \omega''$, &c. forment ensemble

une dimension, ou deux, &c. Nous aurons, suivant la notation adoptée,

$$\dot{V} = \dot{u}f'(u) + \dot{u}'f'(u') + \dot{u}''f''(u'') + \&c.$$
$$+ \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \&c.$$

Or, il est visible que la fonction $\dot{u}$ ne peut être que de la forme

$$\dot{u} = N\omega + P\omega' + Q\omega'' + \&c.$$

$N, P, Q,$ &c. étant des fonctions de $x, y, y',$ &c. De là, en prenant les fonctions dérivées relatives à x, on aura les valeurs de $\dot{u}', \dot{u}''$, &c.; savoir :

$$\dot{u}' = N'\omega + (N + P')\omega' + (P + Q')\omega'' + \&c.$$
$$\dot{u}'' = N''\omega + (2N' + P'')\omega' + (N + 2P' + Q'')\omega'' + \&c.$$
$$\&c.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression de $\dot{V}$, l'équation $\dot{V} = 0$ devra avoir lieu indépendamment des quantités $\omega, \omega', \omega''$, &c. qui doivent demeurer indéterminées ; donc, égalant à zéro les multiplicateurs de chacune de ces quantités, on aura les équations

$$f'(y) + Nf'(u) + N'f'(u') + N''f'(u'') + \&c. = 0.$$
$$f'(y') + Pf'(u) + (N+P')f'(u') + (2N+P'')f'(u'') + \&c. = 0.$$
$$f'(y'') + Qf'(u) + (P+Q')f'(u') + (N+2P'+Q'')f'(u'') + \&c. = 0.$$
$$\&c. ;$$

d'où il faudra éliminer les quantités $N, P, Q,$ &c. : il restera nécessairement une ou plusieurs équations qui seront les équations de condition cherchées ; car il est facile de voir que le nombre de ces quantités ne doit jamais surpasser celui des quantités y, y', y'', &c., diminué du nombre des quantités u', u'', &c., puisque, dans l'équation proposée, la plus haute fonction dérivée de u ne peut contenir de fonctions dérivées de y, plus hautes que celles qui se trouvent dans la même équation.

Supposons, par exemple, que l'équation soit de la forme

$$f'(u, u', x, y, y', y'') = 0,$$

on

on fera ici simplement

$$u = N\omega + P\omega',$$

et l'on aura les trois équations

$$f'(y) + Nf'(u) + N'f'(u') = 0,$$
$$f'(y') + Pf'(u) + (N + P')f'(u') = 0,$$
$$f'(y'') + Pf'(u') = 0.$$

La dernière donnera P, la seconde donnera N, et la première donnera, par la substitution des valeurs de N et de N', l'équation de condition nécessaire pour que la quantité u dans l'équation proposée, puisse être une fonction de x, y, y', indépendamment d'aucune relation entre x et y.

On peut étendre la méthode de ce problème à un nombre quelconque de variables et d'équations.

Montrons maintenant, par quelques exemples, l'usage des équations de condition dont nous venons de donner la théorie; et d'abord ne considérons qu'une fonction du premier ordre de la forme $f(x, y, y')$: l'équation de condition pour qu'elle soit une dérivée exacte, sera

$$f'(y) - [f'(y')]' = 0.$$

Pour que cette équation puisse être identique, il faut que le second terme ne contienne pas de fonctions dérivées de y plus hautes que le premier terme $f'(y)$: or, celui-ci ne peut contenir que la fonction y'; donc il faudra que l'expression $f'(y')$, dont la fonction dérivée forme le second terme, ne contienne pas y, autrement il entrerait y'' dans le second terme. Il suit de là que la fonction proposée ne peut être que de la forme

$$\Psi(x, y) + y'\Phi(x, y).$$

En la représentant par $f(x, y, y')$, et prenant les dérivées relatives à y et à y', on aura

$$f'(y) = \Psi'(y) + y'\Phi'(y), \quad f'(y') = \Phi(x, y).$$

Ainsi l'équation de condition sera

$$\Psi'(y) + y'\Phi'(y) - \Phi'(x,y) = 0;$$

mais

$$\Phi'(x,y) = \Phi'(x) + y'\Phi'(y);$$

donc l'équation se réduit à

$$\Psi'(y) - \Phi'(x) = 0,$$

comme nous l'avons trouvé par une autre voie, dans la leçon XX.e

La fonction proposée, en n'y faisant plus $x' = 1$, aurait eu la forme

$$x'\Psi(x,y) + y'\Phi(x,y),$$

et l'on aurait eu, relativement à x, l'équation de condition

$$f'(x) - [f'(x')]' = 0,$$

laquelle devient

$$x'\Psi'(x) + y'\Phi'(x) - \Psi'(x,y) = 0;$$

mais

$$\Psi'(x,y) = x'\Psi'(x) + y'\Psi'(y);$$

donc

$$y'\Phi'(x) - y'\Psi'(y) = 0,$$

savoir,

$$\Phi'(x) - \Psi'(y) = 0,$$

comme auparavant.

Supposons que la fonction proposée soit du second ordre et de la forme $f(x,y,y',y'')$; l'équation de condition, pour qu'elle soit une dérivée exacte, sera

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' = 0.$$

Il est d'abord évident que, pour que cette équation puisse être identique, il faut que la valeur de $f'(y'')$ ne contienne point y'', autrement la valeur de $[f'(y'')]''$ contiendrait y''''; et comme les termes précédens ne peuvent contenir que y, y', y'', y''', le terme contenant y'''' ne serait pas détruit.

La fonction proposée ne pourra donc être que de la forme

$$\Psi(x,y,y') + y''\Phi(x,y,y').$$

On aura ainsi, en la comparant à la forme générale $f(x, y, y', y'')$,

$$f'(y) = \Psi'(y) + y''\Phi'(y),$$
$$f'(y') = \Psi'(y') + y''\Phi'(y'),$$
$$f'(y'') = \Phi(x,y,y'),$$

et l'équation de condition deviendra

$$\Psi'(y) + y''\Phi'(y) - [\Psi'(y')]' - [y''\Phi'(y')]' + \Phi''(x,y,y') = 0.$$

Or,

$$\Phi'(x,y,y') = \Phi'(x) + y'\Phi''(y) + y''\Phi'(y');$$

donc

$$\Phi''(x,y,y') = [\Phi'(x)]' + [y'\Phi'(y)]' + [y''\Phi'(y')]'.$$

Par cette substitution, l'équation de condition deviendra

$$\Psi'(y) + y''\Phi'(y) - [\Psi'(y')]' + [\Phi'(x)]' + [y'\Phi'(y)]' = 0.$$

Supposons, pour abréger,

$$\Phi'(x) + y'\Phi'(y) - \Psi'(y') = \Phi(x,y,y'),$$

la caractéristique Φ dénotant une fonction connue de x, y, y', puisqu'en effet cette expression ne contient que les trois quantités x, y, y'; on aura l'équation

$$\Psi'(y) + y''\Phi'(y) + \Phi'(x,y,y') = 0;$$

mais

$$\Phi'(x,y,y') = \Phi'(x) + y'\Phi'(y) + y''\Phi'(y');$$

donc l'équation de condition se réduira à

$$\Psi'(y) + \Phi'(x) + y'\Phi'(y) + y''[\Phi'(y) + \Phi'(y')] = 0.$$

Or, il est visible que la quantité y'' n'entre point dans les fonctions dérivées suivant x et y, puisqu'elle n'entre point dans les fonctions primitives représentées par les caractéristiques Ψ, Φ et Φ; donc, pour que

l'équation puisse être identique, il faudra que les termes multipliés par y'' disparaissent, par conséquent l'équation de condition se partagera en ces deux-ci :

$$\Phi'(y) + \Phi'(y') = 0,$$
$$\Psi'(y) + \Phi'(x) + y'\Phi'(y) = 0;$$

qui devront avoir lieu séparément pour que la fonction proposée soit une dérivée exacte.

Supposons, pour donner un exemple particulier, que cette fonction soit

$$\frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{y''x}{y},$$

on aura ici

$$\Psi(x, y, y') = \frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2}, \text{ et } \Phi(x, y, y') = \frac{x}{y}.$$

De là on tirera

$$\Psi'(y) = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3},$$
$$\Psi'(y') = \frac{1}{y} - \frac{2xy'}{y^2},$$
$$\Phi'(x) = \frac{1}{y}, \quad \Phi'(y) = -\frac{x}{y^2},$$
$$\Phi(x,y,y') = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{2xy'}{y^2} = \frac{xy'}{y^2},$$
$$\Phi'(x) = \frac{y'}{y^2}, \quad \Phi'(y) = -\frac{2xy'}{y^3}, \quad \Phi'(y') = \frac{x}{y^2}.$$

Ainsi les deux équations de condition deviendront

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0,$$
$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} + \frac{y'}{y^2} - \frac{2.xy'^2}{y^3} = 0,$$

qui se vérifient, comme l'on voit, d'elles-mêmes. En effet, la fonction proposée est la dérivée de $\frac{xy'}{y}$.

En général, il est facile de prouver que l'équation de condition

$$f'(y) - [f'(y)]' + [f'(y'')]'' - \&c. = 0,$$

ne saurait être identique, à moins que la plus haute des fonctions dérivées y', y'', &c. qui entrera dans la fonction proposée $f(x, y, y', y'', \&c.)$ n'y soit qu'à la première dimension, afin qu'elle puisse disparaître dans la fonction dérivée qu'on prendra relativement à cette même dérivée de y; d'où il suit que si la fonction proposée est de l'ordre n, elle ne pourra être une fonction dérivée exacte, à moins qu'elle ne soit de la forme

$$\Psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) + y^{(n)}\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}),$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu dans la leçon XIII.e

Ensuite on peut aussi prouver que, de même que pour les fonctions du second ordre, l'équation de condition se décompose en deux, qui doivent avoir lieu à-la-fois : pour les fonctions du troisième ordre, elle se décomposera en trois; et pour les fonctions du quatrième ordre, elle se décomposera en quatre, et ainsi de suite.

Enfin, pour donner aussi un exemple d'une fonction dépendante d'une équation, nous prendrons l'équation

$$u' - \Psi(u, x, y) - y'\Phi(u, x, y) = 0,$$

et nous chercherons les conditions nécessaires pour que la fonction u soit une fonction de x et y.

En comparant cette équation à la forme générale

$$f(u, u', x, y, y') = 0,$$

on aura

$$f(u, u', x, y, y') = u' - \Psi(u, x, y) - y'\Phi(u, x, y);$$

et de là on tirera ces valeurs :

$$f'(u) = -\Psi'(u) - y'\Phi'(u), \quad f'(u') = 1$$
$$f'(y) = -\Psi'(y) - y'\Phi'(y), \quad f'(y') = -\Phi(u, x, y).$$

Comme la fonction ne contient point y'', on aura

$$f'(y'') = 0;$$

et la dernière des trois équations de condition trouvées ci-dessus pour le cas dont il s'agit, donnera sur-le-champ $P = 0$; ce qui réduira les

deux premières à

$$-\Psi'(y) - y'\Phi'(y) - N[\Psi'(u) + y'\Phi'(u)] + N' = 0;$$
$$-\Phi(u,x,y) + N = 0.$$

La dernière donne

$$N = \Phi(u,x,y);$$

donc substituant dans la première, et changeant les signes, on aura

$$\Psi'(y) + y'\Phi'(y) + [\Psi'(u) + y'\Phi'(u)] \times \Phi(u,x,y) - \Phi'(u,x,y) = 0.$$

Mais

$$\Phi'(u,x,y) = u'\Phi'(u) + \Phi'(x) + y'\Phi'(y),$$

et la proposée donne

$$u' = \Psi(u,x,y) + y'\Phi(u,x,y);$$

donc, faisant ces substitutions, et effaçant ce qui se détruit, on aura cette équation de condition

$$\Psi'(y) + \Psi'(u) \times \Phi(u,x,y) - \Phi'(x) - \Phi'(u) \times \Psi(u,x,y) = 0,$$

qui est la même, en changeant u en z, que celle que nous avons trouvée directement dans la leçon XXe, pour que l'équation dérivée à trois variables puisse admettre une équation primitive entre ces variables.

Le problème que nous venons de résoudre sur les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction donnée de plusieurs variables et de leurs dérivées, ait une fonction primitive indépendamment d'aucune relation entre ces variables, a une connexion intime avec un autre problème plus important, qui a exercé les géomètres pendant près d'un siècle. C'est le fameux problème des isopérimètres, qui, pris dans toute son extension, consiste à trouver les équations qui doivent avoir lieu entre les variables, pour que la fonction primitive inconnue d'une fonction donnée de ces variables et de leurs dérivées, devienne un *maximum* ou un *minimum*.

Les mêmes formes d'équations résolvent les deux problèmes, mais avec cette différence que, pour le premier, les expressions doivent être

blème elles deviennent les équations nécessaires entre les variables pour l'existence du *maximum* ou du *minimum*.

On verra la raison de cette identité des résultats par l'analyse que nous allons donner du problème des isopérimètres; mais nous commencerons par une histoire succincte des différentes tentatives que les géomètres du dernier siècle ont faites pour parvenir à une solution générale de ce problème, et qui ont conduit par degrés à la méthode connue sous le nom de *Calcul des variations*.

Les questions de *maximis* et de *minimis* n'ont pas été inconnues aux anciens géomètres; car on a un livre entier d'*Apollonius*, qui traite presque uniquement des plus grandes et des plus petites lignes droites qui peuvent être menées de points donnés aux arcs des sections coniques.

La méthode d'*Apollonius* se réduit simplement à prouver que toute autre droite menée du même point à la section conique, serait plus petite dans le cas du *maximum*, et plus grande dans le cas du *minimum*, que celle qu'il a déterminée; et cette méthode a été suivie par tous ceux qui, après lui, ont cherché à résoudre, par la simple géométrie, des problèmes relatifs aux *maxima* et aux *minima*.

Fermat est le premier, comme nous l'avons vu dans la leçon XIXe, qui ait donné, pour la solution des problèmes de ce genre, une méthode directe et analytique, que l'algorithme du calcul différentiel a ensuite simplifiée et généralisée; elle se réduit, comme l'on sait, à égaler à zéro la différentielle ou la fonction prime de la fonction qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, en regardant comme variable l'inconnue par rapport à laquelle la fonction donnée doit devenir la plus grande ou la plus petite; et nous avons exposé ailleurs (*Théorie des Fonctions*) les principes et la marche de cette méthode considérée dans toute sa généralité.

On peut dire que c'est à la considération des courbes qu'on doit les principales méthodes de l'analyse. La détermination des plus grandes et des plus petites ordonnées dans les lignes et dans les surfaces courbes, avait donné naissance aux questions de *maximis* et de *minimis*, dont nous

venons de parler ; mais on s'éleva bientôt à des problèmes d'un genre nouveau et beaucoup plus difficile. Il s'agissait de trouver les courbes mêmes dans lesquelles des quantités dépendantes de toute l'étendue de la courbe cherchée, prise entre des limites données, fussent un *maximum* ou un *minimum*, par rapport à toutes les autres courbes possibles; comme, par exemple, la courbe qui renferme le plus grand espace suivant des conditions données, ou qui produit, par sa révolution, le plus grand solide entre des limites données, &c. : mais c'est la mécanique qui a fourni les premiers problèmes de ce nouveau genre. *Newton* a cherché le premier la courbe qui, en tournant autour de son axe, produit le solide qui étant mu dans un fluide suivant la direction de son axe, éprouve la moindre résistance possible, et il a donné, sans démonstration, une proportion qui suffit pour construire la courbe par les tangentes, et qui en est comme l'équation différentielle.

Mais c'est proprement du fameux problème de la brachystochrone, ou ligne de la plus vîte-descente, proposée en 1693, par *Jean Bernoulli*, que date la decouverte d'une analyse propre à ces sortes de recherches.

Suivant l'esprit du calcul différentiel, qui suppose les courbes formées d'une infinité de droites infiniment petites, on considère deux côtés contigus de la courbe cherchée, et on détermine leur position respective, de manière que la quantité proposée devienne un *maximum* ou un *minimum*, en ne faisant varier que l'ordonnée qui répond à l'angle formé par ces deux côtés. De cette manière, le problème rentre dans l'ancien genre, et la difficulté ne consiste plus qu'à ramener le résultat de la solution à la forme différentielle. C'est ainsi qu'on a trouvé d'abord que la courbe de la plus vîte-descente doit être telle que le sinus de l'angle qu'un de ses côtés quelconques infiniment petits fait avec la verticale, soit proportionnel à la vîtesse, laquelle est comme la racine carrée de la hauteur d'où le corps est parti; et cette proportion réduite en équation différentielle, donne la cycloïde. On a trouvé de la même manière que le solide rond de la moindre résistance, est formé par une courbe qui a la propriété énoncée par *Newton*, dans le scholie de la proposition XXXV de la

seconde

seconde partie de ses *Principes*. On a appliqué ensuite la même méthode à des problèmes plus compliqués, tel que celui des isopérimètres, où il s'agissait de trouver entre toutes les courbes possibles qui ont le même périmètre ou la même longueur, celles qui, entre des limites données, renfermaient les plus grands ou les plus petits espaces, où, en faisant une révolution autour de leurs axes, produisaient les plus grandes ou les plus petites superficies, ou les plus grands ou les plus petits solides, ou enfin une courbe telle qu'en construisant sur son axe une seconde courbe dont les ordonnées soient des fonctions quelconques des ordonnées et des arcs de celle-là, l'aire de la seconde courbe forme un *maximum* ou un *minimum ;* et les difficultés de ces problèmes, jointes à la célébrité que les recherches des deux frères *Bernoulli*, de *Taylor* et d'*Euler* leur acquirent, ont fait donner en général le nom d'*isopérimètres* à tous les problèmes dans lesquels il s'agit de trouver des courbes qui jouissent de quelque propriété de *maximum* ou de *minimum*, avec ou sans la condition de l'égalité des longueurs de la courbe.

Lorsqu'on veut avoir égard à cette condition, il ne suffit pas de faire varier une seule ordonnée, comme dans les problèmes où on demande un *maximum* ou un *minimum* absolu ; il faut alors faire varier à-la-fois deux indéterminées, tant dans l'expression qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, que dans celle qui doit demeurer constante, et égaler séparément à zéro les résultats de ces variations, ou les différentielles de ces deux expressions, comme dans les problèmes ordinaires de *maximis* et *minimis*, lorsqu'il y a quelque condition particulière à remplir entre les variables.

Jean Bernoulli, dans un Mémoire destiné à résoudre les problèmes sur les isopérimètres proposés par son frère *Jacques*, et qui se trouve dans le Recueil de l'Académie des Sciences de 1706, avait cru pouvoir satisfaire à-la-fois à la condition du *maximum* ou du *minimum*, et à celle de l'isopérimétisme, en ne considérant que deux élémens ou côtés de la courbe, et en faisant varier à-la-fois l'abscisse et l'ordonnée qui répondent à l'angle de ces deux lignes droites, de manière que leur somme demeurât

constante. En effet, si la question roulait sur des quantités finies, elle pourrait se résoudre de cette manière ; mais il arrive ici, par la nature des infiniment petits, que l'équation finale devient purement identique, et ne fait par conséquent rien connaître. *Jean Bernoulli* parvint à un autre résultat, et crut avoir ainsi résolu les problèmes ; mais son analyse est erronée, et pèche contre les principes du calcul infinitésimal.

Jacques Bernoulli est le premier qui ait reconnu dans ces sortes de questions la nécessité de considérer trois côtés consécutifs de la courbe, et de faire varier à-la-fois les deux ordonnées consécutives qui répondent aux angles formés par ces côtés. C'est sur ce principe qu'il a fondé son analyse du problème des isopérimètres, intitulée *Analysis magni problematis isoperimetrici*, et publiée à Bâle en 1701, et dans les Actes de Léipsic de la même année ; et le même principe a servi de base ensuite aux solutions données par *Taylor* dans son *Methodus incrementorum ;* par *Jean Bernoulli*, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1718 ; et par *Euler*, dans les tomes VI et VIII des *Anciens Commentaires de Pétersbourg.*

Par la considération d'une partie infiniment petite de la courbe regardée comme composée de deux ou de trois lignes droites, les problèmes se réduisent à l'analyse ordinaire ; et la difficulté ne consiste plus qu'à traduire les solutions en équations différentielles, par les substitutions des valeurs des ordonnées et des abscisses successives exprimées en différences, en ayant soin de ne conserver que les termes du même ordre, suivant la loi de l'homogénéité des quantités infiniment petites : mais les résultats obtenus de cette manière se présentent rarement sous une forme générale et applicable à tous les problèmes du même genre. De plus, il y a des cas où il ne suffit pas de considérer une portion infiniment petite de la courbe, parce que la propriété du *maximum* ou du *minimum* peut avoir lieu dans la courbe entière, sans avoir lieu dans chacune de ses portions infiniment petites ; ce sont ceux où la fonction différentielle, dont l'intégrale doit être un *maximum* ou un *minimum*, contient elle-même une autre fonction intégrale, à moins que, par les conditions du problème, cette intégrale ne doive avoir une valeur constante ;

par exemple, lorsque la fonction dont l'intégrale doit être un *maximum* ou un *minimum*, dépend non-seulement des abscisses et des ordonnées et de leurs différences, mais encore de l'arc même de la courbe, lequel n'est donné, comme l'on sait, que par une expression intégrale : dans ce cas, les solutions qu'on trouverait par la simple considération d'une portion infiniment petite de la courbe, seraient inexactes, à moins que la longueur de la courbe ne fût supposée constante, comme dans les problèmes des isopérimètres.

A plus forte raison, il ne sera pas permis de n'avoir égard, dans le calcul, qu'à une petite portion de la courbe, lorsque la fonction différentielle dépendra d'une quantité donnée, simplement par une équation différentielle non intégrable en général; c'est pourquoi on doit regarder comme fausse la solution qu'*Euler* lui-même a donnée du problème de la brachystochrone dans un milieu résistant comme une fonction de la vîtesse, dans le tome VII des *Anciens Commentaires de Pétersbourg*, et dans le second volume de sa *Mécanique*, et on peut s'en convaincre en la comparant à celle qu'on trouve dans son ouvrage de 1744, intitulé *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes* (Art. 46).

C'est proprement dans ce dernier ouvrage qu'*Euler* a donné une solution générale et complète du problème des isopérimètres. Pour trouver les conditions du *maximum* ou du *minimum*, il se contente de faire varier une seule ordonnée de la courbe, et il en déduit la valeur différentielle de la formule, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, en substituant à la place des différentielles de l'ordonnée, les différences successives des ordonnées consécutives, et à la place des expressions intégrales, les sommes des élémens répondant à toute l'étendue de la courbe. Son calcul devient ainsi très-long, sur-tout par les suites infinies qui s'y mêlent, lorsque la fonction proposée contient différentes intégrales, et dont il faut déterminer la somme pour parvenir à des résultats nets et précis; et on ne peut trop admirer l'adresse avec laquelle l'auteur surmonte ces difficultés, et obtient, en dernière analyse, des formules simples, générales et élégantes.

Son ouvrage est d'ailleurs très-précieux par le nombre et la beauté des exemples qu'il contient, et il n'y en a peut-être aucun qui puisse être plus utile à ceux qui desirent s'exercer sur le calcul intégral.

Jusqu'alors on avait traité séparément, et par des procédés différens, les problèmes où il suffit de varier une ordonnée, et ceux qui demandent la variation de deux ou de plusieurs ordonnées consécutives.

Euler a remarqué le premier que tous les problèmes de ce genre pouvaient être rappelés à une même analyse, parce que l'uniformité qui doit régner dans les opérations relatives aux différens points d'une même courbe fait que, dès qu'on a trouvé le résultat de la variation d'une ordonnée, la même expression rapportée à l'ordonnée qui suit immédiatement, donnera aussi le résultat de la variation de cette ordonnée, et ainsi des autres.

Cette remarque a conduit *Euler* à un beau théorème, et de la plus grande utilité dans cette matière; c'est que, pour trouver une courbe qui ne jouisse d'une propriété de *maximum* ou de *minimum* que parmi toutes les courbes qui ont une ou plusieurs propriétés connues, il suffit d'ajouter à l'expression de la propriété qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, celle des autres propriétés connues, multipliées chacune par un coëfficient constant et arbitraire, et chercher ensuite la courbe dans laquelle cette expression composée sera un *maximum* ou un *minimum* entre toutes les courbes possibles.

En effet, si on désigne, comme *Euler*, par $n\nu$ ou simplement par ν, l'incrément infiniment petit de l'ordonnée y, et par $P.\nu$ la valeur différentielle de la formule intégrale indéfinie $\int Z\,dx$, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, on aura $\acute{P}.\omega$ pour la valeur différentielle de la même formule, provenant de l'incrément ω de l'ordonnée suivante $\acute{y}$, en supposant que $\acute{P}$ soit ce que P devient lorsque y devient $\acute{y}$, et que toutes les autres variables sont rapportées à l'ordonnée $\acute{y}$.

Et l'on aurait de même $\ddot{P}.\pi$ pour la valeur différentielle de la même

formule, provenant de l'incrément π de l'ordonnée suivante $\overset{\cdot\cdot}{y}$, où $\overset{\cdot\cdot}{P}$ est ce que devient P lorsque y devient $\overset{\cdot\cdot}{y}$, et ainsi de suite.

Or, en regardant, suivant les principes du calcul différentiel, les ordonnées $y, \dot{y}, \ddot{y}$, &c. comme infiniment proches, on a

$$\dot{y} = y + dy, \ddot{y} = y + 2dy + d^2y, \text{ \&c.};$$

par conséquent on aura aussi

$$P = \dot{P} + dP, \ddot{P} = P + 2dP + d^2P, \text{ \&c.}$$

Ainsi, en faisant varier à-la-fois les deux ordonnées voisines y et $\dot{y}$, la valeur différentielle de $\int Z dx$ sera

$$P.v + (P + dP).\omega;$$

et en faisant varier les trois ordonnées voisines $y, \dot{y}, \ddot{y}$, sa valeur différentielle sera

$$P.v + (P + dP)\omega + (P + 2dP + d^2P)\pi,$$

et ainsi de suite.

Il en sera de même de toutes les autres formules semblables.

Donc, pour les courbes où la formule $\int Z dx$ doit être un *maximum* ou un *minimum* absolu, on aura, en ne faisant varier qu'une ordonnée, l'équation $P.v = 0$, laquelle donne $P = 0$.

Pour les courbes où $\int Z dx$ ne doit être qu'un *maximum* ou un *minimum* relatif parmi toutes les courbes qui ont une propriété commune exprimée par la formule $\int Y dx$, si on représente par Qv la valeur différentielle de $\int Y dx$ due à l'incrément de y, on aura, en faisant varier deux ordonnées, et égalant à zéro les valeurs différentielles des formules $\int Z dx$ et $\int Y dx$, les équations

$$P.v + (P + dP)\omega = 0,$$
$$Q.v + (Q + dQ)\omega = 0,$$

lesquelles donnent celle-ci :

$$\frac{dP}{P} - \frac{dQ}{Q} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$P + aQ = 0,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette équation est, comme l'on voit, la même que celle qu'on trouverait pour le *maximum* ou le *minimum* absolu de la formule $\int Z dx + a \int Y dx$, en ne faisant varier qu'une seule ordonnée.

Si la même formule $\int Z dx$ ne devait être un *maximum* ou un *minimum* que dans une des courbes dans lesquelles deux autres formules $\int Y dx$ et $\int X dx$ conservent les mêmes valeurs, on aurait alors le cas où il faut faire varier trois ordonnées successives, et où il faudra égaler séparément à zéro les valeurs différentielles des trois formules dont il s'agit.

Ainsi, en dénotant par $R.v$ la valeur différentielle de $\int X dx$ provenant de l'incrément v, on aurait ces trois équations

$$\begin{aligned}
P.v + (P + dP)\omega + (P + 2dP + d^2P)\pi &= 0,\\
Q.v + (Q + dQ)\omega + (Q + 2dQ + d^2Q)\pi &= 0,\\
R.v + (R + dR)\omega + (R + 2dR + d^2R)\pi &= 0;
\end{aligned}$$

savoir,

$$\begin{aligned}
P(v + \omega + \pi) + dP(\omega + 2\pi) + d^2P.\pi &= 0,\\
Q(v + \omega + \pi) + dQ(\omega + 2\pi) + d^2Q.\pi &= 0,\\
R(v + \omega + \pi) + dR(\omega + 2\pi) + d^2R.\pi &= 0.
\end{aligned}$$

Éliminant deux des quantités v, ω, π, la troisième s'évanouit d'elle-même, et on obtient une équation différentielle du second ordre entre les trois variables P, Q, R, dont par conséquent l'intégrale complète renfermera trois constantes arbitraires : mais, sans chercher cette équation différentielle, il est facile de s'assurer que l'équation

$$P + aQ + bR = 0$$

satisfait aux trois équations ci-dessus, quelles que soient les valeurs des

oèfficiens a, b, pourvu qu'ils soient constans ; car, en multipliant la econde équation par a, la troisième par b, et les ajoutant à la première, n aura une équation identique, en vertu de l'équation supposée ; et omme cette équation contient deux constantes arbitraires a et b, il 'ensuit qu'elle sera nécessairement l'intégrale complète de l'équation du econd ordre dont il s'agit, et l'on voit en même temps qu'elle n'est autre hose que celle qui donne le *maximum* ou le *minimum* absolu de la formule

$$\int Z dx + a \int Y dx + b \int X dx.$$

Au reste, je dois observer que, dans les premières solutions qui ont été données du problème des isopérimètres par les *Bernoulli*, *Taylor* et *Euler* lui-même, la valeur différentielle de la formule $\int Z dx$ qui doit être un *maximum* ou un *minimum* parmi toutes les courbes isopérimètres, n'est pas de la forme

$$P\nu + \dot{P}\omega,$$

lorsque la fonction Z contient l'arc s de la courbe, ce qui est contraire à la théorie d'*Euler*, qu'on vient d'exposer.

Par exemple, dans la solution de *Taylor*, qui est une des plus simples, si on y substitue les dénominations précédentes, qu'on suppose

$$dZ = L ds + M dx + N dy,$$

et qu'on fasse, pour abréger, $\frac{dy}{ds} = q$, on a cette valeur différentielle

$$(N + Lq) dx . \nu + (\dot{N} + \dot{L}\dot{q}) dx . \omega,$$

provenant des variations ν et ω des coordonnées y et $\dot{y}$ dans les trois élémens $Z dx + \dot{Z} dx + \ddot{Z} dx$, qui sont les seuls que *Taylor* considère.

Mais je remarque que cette valeur n'est pas la valeur différentielle complète de la formule intégrale $\int Z dx$; car, par les formules exactes de l'ouvrage cité d'*Euler*, la seule variation ν de l'ordonnée y, dans la formule $\int Z dx$, donne la valeur différentielle

$$[N dx - d.(H - \int L dx) q] \nu,$$

où H est la valeur de $\int L dx$, correspondante à une abscisse donnée a, pour laquelle $\int Z dx$ doit être un *maximum* ou un *minimum* ; de sorte que, pour les deux variations simultanées v et ω, la vraie valeur différentielle sera

$$[N dx - d.(H - \int L dx) q] v$$
$$+ [N' dx - d.(H - \int L' dx) q'] \omega.$$

On voit d'abord par là que la valeur différentielle de *Taylor* donnerait une solution fausse, si on voulait l'employer à trouver la courbe dans laquelle $\int Z dx$ serait un *maximum* ou un *minimum* entre toutes les courbes possibles, dans lequel cas il suffit d'avoir égard à la variation d'une seule ordonnée; car en égalant à zéro cette valeur différentielle, et supposant ω nul, on aurait l'équation

$$N + Lq = 0;$$

tandis que la solution d'*Euler* donnerait

$$N dx - d.(H - \int L dx) q = 0,$$

qui est la véritable équation du problème.

Dans le cas des isopérimètres, il arrive néanmoins que les deux solutions s'accordent; car alors la propriété commune des courbes est l'arc s, c'est-à-dire la formule $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ou $\int \sqrt{(1 + p^2)}\, dx$, en faisant $p = \frac{dy}{dx}$; ainsi on a de plus la formule $\int Y dx$, ou $Y = \sqrt{(1 + p^2)}$, dont la valeur différentielle doit être nulle, en même temps que celle de $\int Z dx$.

Or, par la construction et l'analyse de *Taylor*, on a pour cette formule la valeur différentielle

$$- dq.v - dq'.\omega;$$

et par les formules de l'ouvrage d'*Euler*, on a de même $- dq \cdot v$ pour la valeur différentielle due à la seule variation v; de sorte que, pour les deux variations v et ω, on aura également

$$- dq.v - dq'.\omega.$$

Ainsi,

Ainsi, suivant *Taylor*, on doit avoir, dans ce cas, les deux équations

$$(N + Lq)v + (\dot{N} + \dot{L}\ddot{q})\omega = 0,$$
$$dq.v + d\dot{q}.\omega = 0,$$

lesquelles donnent, par l'élimination de v et ω, celle-ci :

$$(N + Lq)d\dot{q} = (\dot{N} + \dot{L}\ddot{q})dq;$$

savoir, en substituant $N + dN$ pour $\dot{N}$, $L + dL$ pour $\dot{L}$, $dq + d^2q$ pour $d\dot{q}$, et $q + 2dq + d^2q$ pour $\ddot{q}$, et effaçant ce qui se détruit,

$$Nd^2q + Lqd^2q - dNdq - qdLd^2q - 2Ld^2q$$
$$- 2dLd^2q - Ldqd^2q - dLdqd^2q = 0.$$

Mais les trois derniers termes sont du troisième ordre, tandis que les premiers ne sont que du second ; ainsi, en rejetant les trois derniers comme infiniment petits vis-à-vis des autres, on a simplement l'équation du second ordre

$$Nd^2q + Lqd^2q - dNdq - qdLd^2q - 2Ld^2q = 0;$$

comme *Taylor* le trouve.

Suivant *Euler*, les deux équations seraient

$$[Ndx - d.(H - \int Ldx)q]v$$
$$+ [\dot{N}dx - d.(H - \int \dot{L}dx)\dot{q}]\omega = 0;$$
$$dq.v + d\dot{q}.\dot{\omega} = 0:$$

mais

$$d.(H - \int Ldx)q = -Lqdx + (H - \int Ldx)dq,$$

et

$$d.(H - \int \dot{L}dx)\dot{q} = -\dot{L}\dot{q}dx + (H - \int \dot{L}dx)d\dot{q}$$
$$= -\dot{L}\dot{q}dx + (H - \int \dot{L}dx)d\dot{q} - \dot{L}dxdq,$$

à cause de

$$\int \dot{L}dx = \int Ldx + \dot{L}dx;$$

donc, en observant que $q + dq = \overset{\cdot}{q}$, la première équation devient,

$$[(N + Lq)dx - (H - \int Ldx)dq]v$$
$$+ [(\dot{N} + \dot{L}q)dx - (H - \int Ldx)\dot{dq}]\omega = 0;$$

laquelle, en vertu de la seconde, se réduit à celle-ci:

$$(N + Lq)v + (\dot{N} + \dot{L}q)\omega = 0,$$

qui est la même que celle de *Taylor*; ainsi, comme les deux autres équations s'accordent aussi, le résultat doit être nécessairement le même.

En effet, suivant le théorème d'*Euler*, en ne considérant que la seule variation v, on a tout de suite l'équation

$$Ndx - d.(H - \int Ldx)q - adq = 0,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette équation est l'intégrale première de celle de *Taylor*; car si on la réduit à la forme

$$Ndx - (H + a - \int Ldx)dq + Lqdx = 0,$$

qu'on la différencie après l'avoir divisée par dq, et qu'on fasse ensuite disparaître les dénominateurs, on trouvera l'équation de *Taylor*.

On pourrait faire des remarques semblables sur les solutions des *Bernoulli*, et sur celles d'*Euler*, dans les tomes VI et VIII des *Anciens Commentaires de Pétersbourg*: mais dans l'état actuel de l'analyse, on peut regarder ces discussions comme inutiles, parce qu'elles regardent des méthodes oubliées, comme ayant fait place à d'autres plus simples et plus générales; cependant elles peuvent avoir encore quelque intérêt pour ceux qui aiment à suivre pas à pas les progrès de l'analyse, et à voir comment les méthodes simples et générales naissent des questions particulières et des procédés indirects et compliqués.

L'ouvrage d'*Euler*, que nous avons cité, n'aurait rien laissé à desirer sur les problèmes relatifs aux courbes qui jouissent de quelque propriété de *maximum* ou de *minimum*, s'il avait pour base une analyse plus conforme

à l'esprit du calcul différentiel : mais la décomposition que l'auteur y fait des différentielles et des intégrales dans leurs élémens primitifs, détruit le mécanisme de ce calcul, et lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité et la généralité de son algorithme.

Il restait donc à trouver la manière de plier le calcul différentiel à ce genre de problèmes qui sont essentiellement de son ressort, et de les résoudre sans s'écarter de la marche simple et uniforme de ce calcul. Cet objet a été rempli par la Méthode des variations, publiée dans le second tome des *Mémoires de l'Académie de Turin.* Comme cette méthode est exposée dans la plupart des Traités de calcul différentiel qui ont paru depuis, nous nous contenterons d'en donner ici les principes.

Elle consiste à faire varier les y dans la formule intégrale en x et y, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, par des différenciations ordinaires, mais relatives à une autre caractéristique δ différente de la caractéristique ordinaire d, et à déterminer la valeur différentielle de la formule par rapport à cette nouvelle caractéristique, en transposant le signe δ après les signes d et $\int$ lorsqu'il se trouve placé avant, et en faisant ensuite disparaître par des intégrations par parties les différentielles de δy sous les signes $\int$.

Soit la formule $\int Z$ qui doive être un *maximum* ou un *minimum* entre des limites données, la quantité Z étant une fonction donnée de x, y, dx, dy, d^2y, &c., en supposant dx constant. On aura $\delta.\int Z$ pour la valeur différentielle qui doit être nulle dans le *maximum* ou le *minimum;* donc

$$\delta.\int Z = 0,$$

équation qui se transforme tout de suite en

$$\int \delta Z = 0.$$

Supposons qu'en différenciant à la manière ordinaire, mais suivant la caractéristique δ, et ne faisant varier que les y, dy, &c., on ait

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \&c.;$$

on aura l'équation

$$\int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \&c. = 0:$$

or, $\int P \delta dy$ se transforme d'abord en $\int P d \delta y$, et ensuite en intég... par parties, en $P \delta y - \int dP \delta y$.

De même $\int Q \delta d^2 y$ se transforme d'abord en $\int Q d^2 \delta y$, ensuite en $Q d \delta y - dQ \delta y + \int d^2 Q \delta y$, et ainsi des autres.

Donc, en ajoutant une constante quelconque K à ces intégrations, l'équation deviendra

$$P \delta y + Q d \delta y - dQ \delta y + \&c. + K$$
$$+ \int (N - dP + d^2 Q - \&c.) \delta y = 0.$$

Comme toutes les différentielles de δy ont disparu de dessous le signe $\int$, cette partie n'est plus susceptible d'aucune réduction : ainsi, pour vérifier l'équation indépendamment des variations δy, il faudra d'abord égaler à zéro le coëfficient de δy sous le signe $\int$, ce qui donnera l'équation

$$N - dP + d^2 Q - \&c. = 0,$$

laquelle devra avoir lieu indéfiniment pour toutes les valeurs de x et y comprises entre les limites données.

Cette équation est en d'autres termes celle qu'*Euler* a trouvée le premier pour le *maximum* ou le *minimum* de la formule intégrale $\int Z dx$. *Euler* fait $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, &c., et il suppose Z fonction de x, y p, q, &c., telle, qu'on ait par la différenciation

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$$

Il fait ensuite varier l'ordonnée y de la ligne infiniment petite nv; en regardant la formule $\int Z dx$ comme l'aire d'une nouvelle courbe d Z serait l'ordonnée, il trouve pour la valeur différentielle de cette f la formule

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \&c.\right) . nv;$$

d'où il tire l'équation

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \&c. = 0$$

qui coïncide avec la précédente.

Notre méthode donne de plus l'équation déterminée

$$(P - dQ + \&c.)\delta y + Qd\delta y + \&c. + K = 0,$$

laquelle doit avoir lieu dans les deux limites entre lesquelles la formule $\int Z dx$ doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Désignons par y_0, P_0, Q_0, &c. les valeurs de y, P, Q, &c. à la première limite où x est par exemple égale à a, et par y_1, P_1, Q_1, &c. leurs valeurs à l'autre limite où x serait égal à b; on aura ainsi les deux équations

$$(P_0 - dQ_0 + \&c.)\delta y_0 + Q_0 d\delta y_0 + \&c. + K = 0,$$
$$(P_1 - dQ_1 + \&c.)\delta y_1 + Q_1 d\delta y_1 + \&c. + K = 0:$$

la première donnera la valeur de la constante K, laquelle étant substituée dans la seconde, donne

$$(P_1 - dQ_1 + \&c.)\delta y_1 + Q_1 d\delta y_1 + \&c.$$
$$- (P_0 - dQ_0 - \&c.)\delta y_0 - Q_0 d\delta y_0 - \&c. = 0,$$

équation qui restera encore à vérifier pour la solution complète du problème.

Si les valeurs de y_0 et y_1, ainsi que celles de $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx}$, &c., sont censées données, leurs variations seront nulles, et tous les termes de l'équation précédente s'en iront d'eux-mêmes; c'est le cas de l'analyse d'*Euler*.

Si toutes ces valeurs, ou seulement quelques-unes, sont indéterminées, ou s'il y a entre elles des relations données par la nature du problème, alors, après avoir effacé les variations qui doivent être nulles, et réduit les autres au plus petit nombre possible, il faudra faire disparaître les variations restantes en égalant leurs coëfficiens à zéro; ce qui donnera autant d'équations auxquelles on satisfera par le moyen des constantes arbitraires que les différentes intégrations introduiront dans l'équation du problème. *Voyez* là-dessus le second et le quatrième volume des *Mémoires de Turin*, et les différens ouvrages de Calcul intégral où cette théorie est exposée.

LEÇON VINGT-DEUXIÈME.

Continuation de la Leçon précédente.

Méthode des Variations, déduite de la considération des Fonctions.

La méthode des variations, fondée sur l'emploi et la combinaison des caractéristiques d et δ qui répondent à des différenciations différentes, ne laissait rien à desirer; mais cette méthode ayant, comme le calcul différentiel, la supposition des infiniment petits pour base, il était nécessaire de la présenter sous un autre point de vue pour la lier au Calcul des fonctions : c'est ce que j'ai déjà fait dans la *Théorie des Fonctions;* mais je vais reprendre ici cet objet pour le traiter d'une manière plus directe et plus complète.

Lorsqu'une fonction donnée de plusieurs variables et de leurs dérivées ne satisfait pas aux conditions que nous avons trouvées dans la leçon précédente, elle ne peut pas avoir une fonction primitive, à moins qu'il n'y ait des relations établies entre ces variables, de manière qu'il n'y reste qu'une seule variable indéterminée; et les questions de *maximis* et de *minimis* dont il s'agit ici, consistent à trouver des relations telles, que la fonction primitive qui en résultera soit un *maximum* ou un *minimum* entre des limites données, c'est-à-dire entre des valeurs données de la variable qui demeurera indéterminée.

On voit d'abord que cette question dépend nécessairement de ce que la fonction primitive ne puisse avoir lieu sans une relation entre les variables; car si elle pouvait être une fonction déterminée des différentes variables et de leurs dérivées, elle ne serait plus susceptible que des *maxima* ou des *minima* du genre ordinaire, relativement à chacune des variables et de leurs dérivées considérées comme des variables particulières.

Considérons donc une fonction quelconque de x, y, y', y'', &c. que nous désignerons par V, et que nous supposerons n'avoir point de fonction primitive dans l'état où elle est; pour qu'elle en ait une, il faudra supposer $y = \varphi x$; et pour que la fonction primitive qui en résulte, et que nous dénoterons par U, soit un *maximum* ou un *minimum* entre des limites données qui répondent à des valeurs données de x, il faudra qu'en faisant varier tant soit peu la fonction φx, la valeur de la fonction U, prise entre ces limites, diminue dans le cas du *maximum*, et augmente dans le cas du *minimum*.

Supposons que l'expression de y soit, en général, une fonction de x et i, que nous représenterons par $\varphi(x, i)$, et qui soit telle qu'elle devienne φx lorsque $i = 0$.

La fonction U deviendra aussi une fonction de x et i, et pour qu'elle soit un *maximum* ou un *minimum*, il faudra qu'en donnant à i une valeur quelconque très-petite, et supposant d'ailleurs la composition de la fonction $\varphi(x, i)$ arbitraire par rapport à i, elle ait une valeur moindre dans le cas du *maximum*, et plus grande dans le cas du *minimum* que lorsque $i = 0$. Si on développe cette fonction suivant les puissances de i, elle deviendra

$$U + i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\mathring{U} + \text{&c.},$$

en indiquant par des points les fonctions dérivées par rapport à i, dans lesquelles il faut faire, après la dérivation $i = 0$, comme on l'a vu dans la leçon neuvième.

Ainsi l'accroissement de U, à raison de la quantité i, sera exprimé par les termes

$$i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\mathring{U} + \text{&c.},$$

et il faudra pour le *maximum*, que la somme de ces termes ait une valeur négative, et pour le *minimun* que sa valeur soit positive, i étant une quantité quelconque très-petite et indépendante de x.

On a prouvé dans la leçon citée, qu'on peut toujours donner à i une valeur assez petite pour que le premier terme $i\dot{U}$ surpasse la somme de tous les suivans; d'où il suit qu'alors l'accroissement de U aura le même signe que le terme $i\dot{U}$; mais il est visible que ce terme change de signe avec la quantité i qui n'y est qu'à la première dimension : donc il est impossible que l'accroissement de U soit constamment positif ou négatif en donnant à i des valeurs quelconques très-petites, à moins que le premier terme $i\dot{U}$ du développement de U ne disparaisse, ce qui donne d'abord la condition $\dot{U} = 0$, qui est, comme l'on voit, commune aux *maxima* et aux *minima*.

Cette condition étant remplie, l'accroissement de U se réduira à $\frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\dddot{U} +$ &c.; et par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on pourra prouver aussi que le premier terme $\frac{i^2}{2}\ddot{U}$ devra être positif ou négatif pour que la variation soit positive ou négative; mais ce terme étant multiplié par le carré de i, il est clair que son signe sera indépendant de i, et ne dépendra que de celui de la quantité $\ddot{U}$, laquelle devra donc être toujours négative dans le cas du *maximum*, et positive dans le cas du *minimum*; ce qui contient le caractère qui distingue les *maxima* des *minima*.

Telle est la théorie générale des *maxima* et *minima* que nous avons cru devoir rappeler ici pour ne rien laisser à desirer.

Dans les questions ordinaires, la quantité U, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, est une fonction donnée de x, et les dérivées $\dot{U}$, $\ddot{U}$, &c. sont prises par rapport à x; alors l'équation $\dot{U} = 0$ devient $U' = 0$, et donne la valeur de x; ensuite le signe de U'' distingue le *maximum* du *minimum*.

Dans les questions dont il s'agit ici, la fonction U n'est donnée que par sa fonction dérivée V; la fonction Φx est l'inconnue, et les dérivées $\dot{U}$, $\ddot{U}$, &c. sont censées prises par rapport à la quantité i qu'on suppose contenue

contenue dans la fonction $\varphi(x, i)$: ainsi la difficulté consiste à déduire ces dérivées de la fonction donnée V.

Or, y étant φx, lorsque φx devient $\varphi(x, i)$, y deviendra

$$y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \frac{i^3}{2.3}\dddot{y} + \&c.;$$

en dénotant; comme plus haut, par des points les fonctions dérivées par rapport à i, dans lesquelles on fait ensuite $i = 0$; de sorte que ces fonctions deviennent de simples fonctions de x, qui peuvent même avoir une valeur quelconque, parce que la composition de la fonction $\varphi(x, i)$ est supposée arbitraire par rapport à i.

Ainsi, en prenant les fonctions dérivées par rapport à x, il est clair que y' deviendra pareillement

$$y' + i\dot{y}' + \frac{i^2}{2}\ddot{y}' + \&c.,$$

et y'' deviendra de même

$$y'' + i\dot{y}'' + \frac{i^2}{2}\ddot{y}'' + \&c.,$$

et ainsi de suite.

Faisant ces substitutions à la place des quantités y, y', y'', &c. dans la fonction donnée V, et développant ensuite les puissances de i, cette fonction deviendra

$$V + i\dot{V} + \frac{i^2}{2}\ddot{V} + \frac{i^3}{2.3}\dddot{V} + \&c.;$$

et par la théorie des fonctions dérivées, exposée dans les premières leçons, il est facile de conclure que la quantité $\dot{V}$, qui étant multipliée par i forme le premier terme du développement, sera la fonction dérivée de V en y supposant x constant, et y, y', y'', &c. des variables indépendantes dont les fonctions dérivées soient respectivement $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, &c. De même $\ddot{V}$ sera sa fonction dérivée du second ordre, prise relativement aux mêmes variables, et supposant que $\ddot{y}, \ddot{y}', \ddot{y}''$, &c. soient les fonctions secondes de y, y', y'', &c., et ainsi de suite.

Nous appellerons, en général, *variations* du premier ordre, du second, &c. ces dérivées marquées par des points et relatives à la quantité i, dans lesquelles cette quantité est supposée nulle; ainsi $\dot{y}$ sera la variation du premier ordre de y, $\dot{y}'$ sera la dérivée ordinaire de cette variation, $\ddot{y}$ sera la variation du second ordre de y, et ainsi de suite. De même, $\dot{V}$, $\ddot{V}$, &c. seront les variations du premier, du second ordre, &c. de V; et $\dot{U}$, $\ddot{U}$, &c. seront aussi les variations du premier, du second ordre, &c. de U: et pour former ces variations, on suivra les mêmes règles que pour les fonctions dérivées ordinaires.

Ainsi, en faisant

$$V = f(x, y, y', y'', \&c.),$$

on aura, suivant la notation employée dans ces leçons,

$$\dot{V} = \dot{y}f'(y) + \dot{y}'f'(y') + \dot{y}''f''(y'') + \&c.$$

Il est visible que cette fonction $\dot{V}$ est la même chose que celle que nous avons désignée par $\dot{V}$ au commencement de la leçon précédente, en changeant seulement $\dot{y}$ en ω, parce que nous avons supposé alors que l'accroissement de y était représenté simplement par $i\omega$.

Maintenant, puisque U est supposé la fonction primitive de V en y faisant $y = \varphi x$, quelle que soit la fonction φx, elle le sera aussi en faisant $y = \varphi(x, i)$. Dans ce cas, nous avons vu que U devient $U + i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \&c.$, et V devient $V + i\dot{V} + \frac{i^2}{2}\ddot{V} + \&c.$; de sorte que comme i peut être une quantité quelconque, il faudra que les variations $\dot{U}$, $\ddot{U}$, &c. soient respectivement aussi les fonctions primitives des variations $\dot{V}$, $\ddot{V}$, &c.; ainsi on aura

$$\dot{U}' = \dot{V}, \quad \ddot{U}' = \ddot{V}, \quad \&c.$$

La condition du *maximum* ou du *minimum* consiste donc en ce que la

fonction primitive de $\dot{V}$ soit nulle, quelle que soit la valeur de $\dot{y}$: or si, pour plus de simplicité, on représente la valeur de $\dot{V}$ par la formule

$$N\dot{y} + P\dot{y}' + Q\dot{y}'' + R\dot{y}''' + \&c.,$$

et qu'on emploie relativement aux dérivées de $\dot{y}$, les transformations qu'on a enseignées au commencement de la leçon précédente, relativement aux dérivées de ω dans l'expression de $\dot{V}$, et dont l'objet est de réduire à des fonctions dérivées exactes tous les termes qui contiennent des dérivées de $\dot{y}$, on aura cette transformée

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & (N - P' + Q'' - R''' + \&c.)\dot{y} \\ & + (P\dot{y})' - (Q'\dot{y})' + (R''\dot{y})' - \&c. \\ & + (Q\dot{y}')' - (R'\dot{y}')' + \&c. \\ & + (R\dot{y}'')' - \&c. \\ & \&c.\end{aligned}$$

où l'on voit que tous les termes, à l'exception de ceux qui forment la première ligne, sont des fonctions dérivées exactes; de sorte que leurs fonctions primitives sont connues et déterminées, quelle que soit la quantité $\dot{y}$; au contraire, les termes de la première ligne étant tous multipliés par $\dot{y}$, ne peuvent avoir de fonction primitive, à moins qu'on ne donne à la variation $\dot{y}$ des valeurs particulières : donc, comme cette variation doit demeurer indéterminée, il sera impossible que la fonction primitive de $\dot{V}$ devienne nulle, à moins que la première ligne de l'expression de $\dot{V}$ ne disparaisse, ce qui donnera l'équation indépendante de $\dot{y}$.

$$N - P' + Q'' - R''' + \&c. = 0.$$

C'est l'équation qui contient la relation nécessaire entre les variables

x et y pour l'existence du *maximum* ou du *minimum*, et que nous appellerons équation générale du *maximum* ou du *minimum*. En géométrie, c'est l'équation de la courbe qui jouit de la propriété de *maximum* ou de *minimum*. Il est facile de voir que cette équation sera en général de l'ordre $2n$, si la fonction proposée V est de l'ordre n, c'est-à-dire, si elle contient la dérivée $y^{(n)}$; de sorte que son équation primitive en x et y, contiendra $2n$ constantes arbitraires.

La première ligne de la valeur de $\dot{V}$ ayant disparu, on aura, en prenant la fonction primitive de $\dot{V}$,

$$\begin{aligned}\dot{U} = &(P - Q' + R'' - \&c.)\,y\\ &+ (Q - R' + \&c.)\,y'\\ &+ (R - \&c.)\,\dot{y}''\\ &+ \&c.\\ &+ K,\end{aligned}$$

la quantité K étant une constante arbitraire.

Cette fonction ayant maintenant une valeur déterminée, pour que cette valeur soit nulle entre les limites données, il faudra que la différence des valeurs qui répondent à ces limites, soit nulle.

Désignons par $\dot{U}_0$ et $\dot{U}_1$, les valeurs de $\dot{U}$ qui répondent à la première et à la seconde limite, dans lesquelles x aura des valeurs données, et représentons de la même manière les valeurs des autres quantités dans ces limites; on aura cette équation particulière aux limites $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$; savoir,

$$\begin{aligned}&(P_1 - Q'_1 + R''_1 - \&c.)\,\dot{y}_1\\ &+ (Q_1 - R'_1 + \&c.)\,y'_1\\ &+ (R_1 - \&c.)\,\dot{y}''_1\\ &+ \&c.\end{aligned}$$

$$- (P_0 - Q'_0 + R''_0 - \&c.)\dot{y}_0$$
$$- (Q_0 - R'_0 + \&c.)\dot{y}'_0$$
$$- (R_0 - \&c.)\dot{y}''_0,$$
$$- \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

à laquelle on devra satisfaire comme aux équations pour les *maxima* et *minima* du genre ordinaire; et les conditions qui en résulteront serviront à déterminer les constantes arbitraires que la valeur de y en x pourra admettre.

Si les valeurs de y, y', y'', &c. étaient supposées données aux deux limites, alors il est visible que les variations $\dot{y}_0, \dot{y}'_0, \dot{y}''_0$, &c. et $\dot{y}_1, \dot{y}'_1, \dot{y}''_1$, &c. seraient nulles à-la-fois; par conséquent l'équation ayant lieu d'elle-même, ne donnerait aucune condition à remplir.

Si, au contraire, aucune de ces valeurs n'était donnée, alors il faudrait égaler séparément à zéro tous les coëfficiens de ces mêmes variations, ce qui donnerait autant d'équations relatives à chacune des deux limites.

Mais il arrive le plus souvent que les valeurs de y et de ses dérivées aux deux limites, ne sont ni toutes données ni toutes arbitraires, mais qu'il y a entre elles des relations données par la nature du problème; alors il faudra, par le moyen de ces relations, réduire les variations $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, &c. dans les deux limites, au plus petit nombre possible, et égaler à zéro les coëfficiens de celles qui demeureront indéterminées.

L'équation générale

$$N - P' + Q'' - \&c. = 0,$$

que nous venons de trouver pour le *maximum* ou le *minimum* de la fonction primitive de V, est, comme l'on voit, la même que celle que nous avons trouvée dans la leçon précédente pour l'existence de cette fonction, indépendamment d'aucune relation entre les variables.

On voit maintenant la raison de cette identité des formules par la conformité des opérations analytiques dans les deux cas.

Il est d'ailleurs évident que lorsque la fonction V est d'elle-même une dérivée exacte, sa fonction primitive est une fonction déterminée de x, y, y', y'', &c. qui doit alors être rapportée aux deux limites, de manière que l'équation

$$N - P' + Q'' - \&c. = 0,$$

ne doit plus donner de relation entre x et y, et par conséquent doit se vérifier d'elle-même.

C'est par cette considération qu'*Euler* a trouvé le premier cette même équation, ou plutôt l'équation équivalente

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \&c. = 0,$$

pour la condition de l'intégrabilité de la formule $Z\,dx$. *Condorcet* a observé ensuite que si la formule $\int Z\,dx$ était intégrable, il fallait que la variation $\delta\int Z\,dx$ le fût aussi; et de là il a conclu que les équations de condition pour l'intégrabilité devaient être les mêmes que les équations entre les variables pour les *maxima* et *minima*. Notre analyse ne doit rien laisser à desirer sur cet objet.

Nous avons supposé jusqu'ici que la variation de x était nulle; c'est ce qui a toujours lieu lorsque les limites sont fixes : mais comme dans la plupart des cas, les limites sont variables, il est bon de voir ce que doit donner la variation de x.

Pour cela, il suffit de considérer que la fonction U étant censée une fonction de x, si on fait croître x de $i\dot{x}$, l'accroissement de U sera, comme on l'a vu dans les premières leçons,

$$i\dot{x}\,U' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}\,U'' + \&c.;$$

or, $U' = V$ par l'hypothèse; donc

$$U'' = V',\ U''' = V'',$$

et ainsi de suite.

Donc, pour avoir l'accroissement de U dans ce cas, il suffira d'ajouter respectivement aux variations $\dot{U}$, $\ddot{U}$, &c., les termes $\dot{x}V$, $\dot{x}^2V'$, &c.; ainsi, comme $\dot{V}=\dot{U}'$, il faudra ajouter à la valeur de $\dot{V}$ trouvée dans l'hypothèse où $\dot{x}$ ne varie pas, le terme $(V\dot{x})'$.

Mais comme la variation de x influe aussi sur celle de y en tant que cette quantité est fonction de x, il faudra, dans ce cas, retrancher de celle-ci ce qui est dû à la variation de x, dont nous venons de déterminer l'effet total sur les variations de U.

En effet, on a vu ci-dessus que y étant φx, lorsque φx devient $\varphi(x, i)$, y devient $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} +$ &c. : or, x devenant en même temps $x + i\dot{x}$, y devient par là

$$y + i\dot{x}y' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}y'' + \text{&c.}$$

De la même manière, $\dot{y}$ qui est aussi fonction de x, deviendra

$$\dot{y} + i\dot{x}\dot{y}' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}\dot{y}'' + \text{&c.};$$

et $\ddot{y}$ deviendra

$$\ddot{y} + i\dot{x}\ddot{y}' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}y''' + \text{&c.}:$$

donc l'accroissement total de y sera exprimé par

$$i(\dot{y} + \dot{x}y') + \frac{i^2}{2}(\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2y'') + \text{&c.},$$

où l'on voit que $\dot{y} + \dot{x}y'$, $\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2y''$, &c. sont les variations totales de y, dans le cas où l'on a égard à la variation $\dot{x}$ de x.

Désignant, pour un moment, ces variations par $(\dot{y})$, $(\ddot{y})$, &c.; pour les distinguer des variations $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. qui ont lieu lorsque $\dot{x}$ est nulle,

on aura

$$\dot{y} + \dot{x}y' = (\dot{y}),\ \ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2 y'' = (\ddot{y}),\ \&c.;$$

donc

$$\dot{y} = (\dot{y}) - xy',$$

et prenant les dérivées par rapport à x,

$$\dot{y}' = [(y) - \dot{x}y']',\quad y'' = [(y) - x\dot{y}']'',\ \&c.$$

Ce sont les valeurs qu'il faudra substituer à la place de $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}''$, &c. dans la variation $\dot{V}$ prise en regardant x comme invariable : donc, si on a égard à la variation de x, l'expression de $\dot{V}$ trouvée ci-dessus, deviendra, en mettant simplement $\dot{y}$ au lieu de $(\dot{y})$,

$$N(\dot{y}-y'\dot{x}) + P(\dot{y}-y'\dot{x})' + Q(\dot{y}-y'\dot{x})'' + R(\dot{y}-y'\dot{x})''' + \&c. + (V\dot{x})' :$$

ainsi les termes de la transformée, qui seront multipliés par les variations $\dot{y}$ et $\dot{x}$, sans être des dérivées exactes, seront simplement

$$(N - P' + Q'' - R''' + \&c.)(\dot{y} - y'\dot{x});$$

d'où l'on voit que l'équation générale

$$N - P' + Q'' - R''' + \&c. = 0,$$

trouvée d'après la seule variation de y, satisfait en même temps à la variation de x : donc cette variation n'influera que sur l'équation aux limites $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$, dans laquelle il faudra ajouter à la valeur de $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$, et y changer $\dot{y}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$.

On peut parvenir au même résultat d'une manière moins simple, mais plus directe, en considérant immédiatement les variations de x et de ses dérivées.

Pour cela, il faut d'abord dépouiller la fonction V de la supposition de $x' = 1$, pour pouvoir tenir compte des variations de x', x'', &c., ce qui

qui se fait en substituant, comme on l'a vu dans les leçons précédentes, $\frac{y'}{x'}$ au lieu de y', $\frac{\left(\frac{y}{x'}\right)'}{x'}$ au lieu de y'', et ainsi de suite, et multipliant la fonction V par x' pour qu'elle puisse être la fonction dérivée de U.

Soit, pour abréger,

$$\frac{y'}{x'} = p, \frac{p'}{x'} = q, \frac{q'}{x'} = r, \text{ \&c.},$$

il faudra dans V substituer p, q, r, &c. à la place de y', y'', y''', &c.; moyennant quoi cette quantité deviendra fonction de y, p, q, &c., et l'on aura la dérivée

$$V' = Mx' + Ny' + Pp' + Qq' + Rr' + \text{\&c.}$$

qui se réduit à

$$V' = (M + Np + Pq + Qr + Rs + \text{\&c.})\,x',$$

et la variation

$$V = M\dot{x} + N\dot{y} + P\dot{p} + Q\dot{q} + R\dot{r} + \text{\&c.}:$$

ainsi tout consiste à trouver les valeurs des variations $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, &c.

Or, p étant $= \frac{y'}{x'}$, on aura

$$\dot{p} = \frac{\dot{y}'}{x'} - \frac{y'\dot{x}'}{x'^2} = \frac{\dot{y}' - p\dot{x}'}{x'} = \frac{(\dot{y} - p\dot{x})' + p'\dot{x}}{x'} = \frac{(\dot{y} - p\dot{x})'}{x'} + q\dot{x},$$

à cause de $\frac{p'}{x'} = q$.

On peut faire ici $x' = 1$, et l'on aura simplement

$$\dot{p} = (\dot{y} - p\dot{x})' + q\dot{x}.$$

De même q étant $= \frac{p'}{x'}$, on aura

$$\dot{q} = \frac{\dot{p}'}{x'} - \frac{\dot{p}'\dot{x}'}{x'^2} = \frac{\dot{p}' - q\dot{x}'}{x'} = \frac{(\dot{p} - q\dot{x})' + q'x}{x'} = \frac{(\dot{p} - q\dot{x})'}{x'} + r\dot{x}.$$

Mais la valeur de $\dot{p}$ donne

$$\dot{p} - q\dot{x} = (\dot{y} - p\dot{x})';$$

donc faisant cette substitution, et supposant $x' = 1$, ce qui est permis ici, il viendra

$$\dot{q} = (\dot{y} - p\dot{x})'' + r\dot{x}.$$

On trouvera de la même manière

$$\dot{r} = (\dot{y} - p\dot{x})''' + s\dot{x},$$

et ainsi de suite.

Par ces substitutions, la variation $\dot{V}$ deviendra

$$(M + Pq + Qr + Rs + \&c.)\,\dot{x}$$
$$+ N\dot{y} + P(\dot{y} - p\dot{x})' + Q(\dot{y} - p\dot{x})'' + R(\dot{y} - p\dot{x})''' + \&c.$$
$$= (M + Np + Pq + Qr + Rs + \&c.)\,\dot{x}$$
$$+ N(\dot{y} - p\dot{x}) + P(\dot{y} - p\dot{x})' + Q(\dot{y} - p\dot{x})'' + R(\dot{y} - p\dot{x})''' + \&c.$$

Or, on a trouvé ci-dessus,

$$M + Np + Pq + Qr + \&c. = \frac{V'}{x'};$$

d'ailleurs, $p = \frac{y'}{x'}$: donc faisant ces substitutions, et supposant ici $x' = 1$, on aura simplement

$$\dot{V} = V'\dot{x} + N(\dot{y} - y'\dot{x}) + P(\dot{y} - y'\dot{x})' + Q(\dot{y} - y'\dot{x})'' + R(\dot{y} - y'\dot{x})''' + \&c.$$

C'est la valeur complète de la variation de $\dot{V}$, déduite des variations de x et de y et de leurs dérivées.

Mais on a vu qu'il faut mettre Vx' à la place de V; donc on aura $\dot{V}x' + V\dot{x}'$ à substituer à la place de $\dot{V}$ dans les formules données plus haut; donc mettant ici la valeur de $\dot{V}$ qu'on vient de trouver, et observant que

$$V'\dot{x} + V\dot{x}' = (V\dot{x})',$$

on aura, en faisant $x' = 1$, le même résultat auquel on est parvenu ci-dessus par une autre voie.

Au reste, en regardant la quantité V comme une fonction de x, y et de leurs dérivées x', x'', &c., y', y'', &c., on pourra traiter les variations de x comme on a fait celles de y.

Dans ce cas, la fonction V étant représentée par

$$f(x, x', x'', \&c., y, y', y'', \&c.),$$

on trouverait les termes

$$\dot{x}f'(x) + \dot{x}'f'(x') + \dot{x}''f'(x''), \&c.$$

à ajouter à la variation $\dot{V}$; et en désignant ces termes par la formule

$$n\dot{x} + p\dot{x}' + q\dot{x}'' + r\dot{x}''' + \&c.,$$

on parviendrait par des opérations relatives à la variation $\dot{x}$ et analogues à celles qu'on a employées pour la variation $\dot{y}$, à la transformée

$$(n - p' + q'' - r''' + \&c.)x;$$

de sorte que la partie de la valeur de $\dot{V}$ qui ne serait pas une dérivée exacte, serait

$$(N - P' + Q'' - R''' + \&c.)\dot{y} + (n - p' + q'' - r''' + \&c.)\dot{x}.$$

Lorsque y est censée une fonction de x, et qu'on peut par conséquent faire $x' = 1$, nous venons de voir que la variation simultanée de y et x, donne pour la partie de $\dot{V}$ qui n'est pas une dérivée exacte, la formule

$$(N - P' + Q'' - R''' + \&c.)(\dot{y} - y'\dot{x}):$$

il faut donc alors que la formule précédente coïncide avec celle-ci, et que l'on ait par conséquent

$$n - p' + q'' - r''' + \&c. = -y'(N - P' + Q'' - R''' + \&c.);$$

d'où l'on voit que l'équation

$$n - p' + q'' - r''' + \&c. = 0,$$

que donnerait la variation de x, est toujours équivalente à l'équation

$$N - P' + Q'' - R''' + \&c. = 0$$

qui provient de la variation de y.

En effet, nous avons déjà trouvé par une autre voie, dans la leçon précédente, que ces équations ont toujours lieu à-la-fois.

Un des avantages du calcul des variations est de pouvoir faire varier indistinctement les indéterminées x ou y et leurs différentielles, et l'identité des équations du *maximum* ou du *minimum*, déduites de l'une et de l'autre de ces variations, a été un des premiers résultats de ce calcul, auquel les anciennes méthodes n'auraient pu conduire; mais les démonstrations qu'on en a données dans le second et dans le quatrième volume des *Mémoires de Turin*, sont moins directes que celle qui se déduit des formules qui représentent cette double variation, et que nous venons d'exposer d'après *Euler*. Voyez le tome troisième de son *Calcul intégral*.

Considérons maintenant le problème dans toute sa généralité, et d'abord soit, comme ci-dessus,

$$V = f(x, y, y', y'', y''', \&c.),$$

on aura

$$N = f'(y),\ P = f'(y'),\ Q = f'(y''),\ R = f'(y'''),\ \&c.$$

Soit, de plus, pour abréger,

$$Y = f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \&c.$$
$$\dot{Y} = f'(y') - [f'(y'')]' + [f'(y''')]'' - \&c.$$
$$\ddot{Y} = f'(y'') - [f'(y''')]' + \&c.$$
$$\dddot{Y} = f'(y''') - \&c.$$
$$\&c.$$

La variation $\dot{V}$, dans le cas où x ne varie pas, sera

$$\dot{V} = Y\dot{y} + (\dot{Y}\dot{y})' + (\ddot{Y}\dot{y}')' + (\dddot{Y}\dot{y}'')' + \&c.,$$

où les termes qui ne sont pas sous la forme de fonctions dérivées, doivent

s'évanouir, ce qui donne d'abord, comme on l'a vu, l'équation générale $Y = 0$.

Ensuite, à cause de $\dot{V} = \dot{U}'$, on aura la variation de U

$$\dot{U} = \dot{Y}\dot{y} + \ddot{Y}\dot{y}' + \dddot{Y}\dot{y}'' + \&c.$$

et l'équation aux limites sera

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Si on veut que x varie en même temps que y, on changera $\dot{y}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, et on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$.

Supposons, en second lieu, que la fonction proposée contienne une troisième variable z, avec ses fonctions dérivées z', z'', &c. ; on fera, relativement à cette variable, des opérations analogues à celles qu'on a employées pour la variable y; et la valeur de $\dot{V}$, en supposant x invariable, se trouvera composée de deux parties semblables, l'une relative à $\dot{y}$, l'autre relative à $\dot{z}$.

Ainsi, en supposant

$$V = f(x, y, y', y'', \&c., z, z', z'', \&c.),$$

et conservant les expressions de Y, $\dot{Y}$, $\ddot{Y}$, &c., on fera, de plus,

$$Z = f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - [f'(z''')]''' + \&c.$$
$$\dot{Z} = f'(z') - [f'(z'')]' + [f'(z''')]'' - \&c.$$
$$\ddot{Z} = f'(z'') - [f'(z''')]' + \&c.$$
$$\dddot{Z} = f'(z''') - \&c.$$
$$\&c.$$

et l'on aura sur-le-champ

$$\dot{V} = Y\dot{y} + Z\dot{z}$$
$$+ (\dot{Y}\dot{y})' + (\ddot{Y}\dot{y})' + (\dddot{Y}\dot{y}'')' + \&c.$$
$$+ (\dot{Z}\dot{z})' + (\ddot{Z}\dot{z})' + (\dddot{Z}\dot{z}'')' + \&c.$$

les termes $Y\dot{y} + Z\dot{z}$, qui ne sauraient être des fonctions dérivées exactes, tant que $\dot{y}$ et $\dot{z}$ ont des valeurs arbitraires, doivent être détruits, ce qui donnera d'abord l'équation générale

$$Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0,$$

à laquelle on satisfera de différentes manières, suivant que les variables y et z seront indépendantes l'une de l'autre, ou qu'elles seront liées entre elles par des relations données.

On aura ensuite, en prenant les fonctions primitives, à cause de $\dot{V} = \dot{U}'$, l'équation

$$\dot{U} = \dot{Y}\dot{y} + \ddot{Y}\dot{y}' + \dddot{Y}\dot{y}'' + \&c.$$
$$+ \dot{Z}\dot{z} + \ddot{Z}\dot{z}' + \dddot{Z}\dot{z}'' + \&c.$$

c'est la valeur qu'il faudra substituer dans l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Si on veut que x varie aussi, on changera $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, et on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$.

Reprenons l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$. S'il n'y a aucune relation donnée par les conditions du problème, entre x et y, leurs variations seront indépendantes l'une de l'autre, et on ne pourra vérifier l'équation dont il s'agit qu'en faisant séparément

$$Y = 0, \qquad Z = 0,$$

deux équations qui serviront à déterminer y et z en fonctions de x.

Mais, si les variables y et z étaient liées par une équation de condition entre x, y, z, que nous représentons par

$$F(x, y, z) = 0 :$$

il faudrait tirer de cette équation la valeur de z en x, y, et la substituer dans l'expression de V; mais pour faire usage de l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$,

il suffit d'avoir le rapport entre les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$; et pour cela il n'y a qu'à considérer que la relation entre les quantités x, y, z devant subsister aussi dans l'état varié, l'équation $F(x, y, z) = 0$ devra avoir lieu aussi en y mettant $x + i\dot{x}$ au lieu de x, et $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} +$ &c., $z + i\dot{z} + z\frac{i^2}{2}\ddot{z} +$ &c. au lieu de y et z, quelle que soit la quantité i: d'où et de ce qui a été démontré dans les premières leçons, il est facile de conclure que les dérivées de cette équation, relatives aux variations de x, y, z, devront avoir lieu aussi; de sorte que l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$ donnera les équations variées

$$\dot{F}(x, y, z) = 0, \qquad \ddot{F}(x, y, z) = 0, \qquad \text{&c.}$$

Or, en regardant x comme variable, on a

$$\dot{F}(x, y, z) = \dot{y}F'(y) + \dot{z}F'(z),$$

puisque l'algorithme des variations est le même que celui des dérivées; ainsi on aura l'équation

$$\dot{y}F'(y) + \dot{z}F'(z) = 0,$$

d'où l'on tire le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{z}$, lequel étant ensuite substitué dans l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$ du *maximum* ou du *minimum*, donnera celle-ci

$$YF'(z) - ZF'(y) = 0,$$

qui étant combinée avec l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$ servira à déterminer les valeurs de y et z en x.

Nous avons supposé dans le calcul précédent que x ne variait pas. Si on voulait tenir compte des variations de x, on aurait à la place de l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$, celle-ci :

$$Y(\dot{y} - y'\dot{x}) + Z(\dot{z} - z'\dot{x}) = 0.$$

Or, l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$ donnerait, d'un côté,

l'équation dérivée

$$F'(x) + y'F'(y) + z'F'(z) = 0;$$

et, de l'autre, l'équation variée

$$\dot{x}F'(x) + \dot{y}F'(y) + \dot{z}F'(z) = 0:$$

substituant dans celle-ci la valeur de $F'(x)$, tirée de la précédente, on aura

$$(\dot{y} - y'\dot{x})F'(y) + (\dot{z} - z'\dot{x})F'(z) = 0;$$

et cette équation combinée avec l'équation ci-dessus, donnera également l'équation

$$YF'(z) - ZF'(y) = 0.$$

On voit par là, en général, que la variation $\dot{x}$ de x, n'influe que sur l'équation aux limites, et nullement sur l'équation générale du *maximum* ou du *minimum*.

Supposons maintenant, pour embrasser le problème dans toute son étendue, que l'équation de condition entre x, y, z, contienne aussi les dérivées de y et z, et soit en général de la forme

$$F(x, y, y' y'', \&c.\ z, z', z'', \&c.) = 0.$$

On tirera de là l'équation variée

$$\dot{F}(x, y, y', y'', \&c.\ z, z', z'', \&c.) = 0,$$

laquelle, en n'ayant égard qu'aux variations de y, z, se développera ainsi:

$$\dot{y}F'(y) + \dot{y}'F'(y') + \dot{y}''F'(y'') + \&c.$$
$$+ \dot{z}F'(z) + \dot{z}'F'(z') + \dot{z}''F'(z'') + \&c. = 0.$$

Comme les dérivées de $\dot{z}$ ne paraissent dans cette équation que sous la forme linéaire, il est possible d'en déduire l'expression de $\dot{z}$, en employant la méthode des multiplicateurs et prenant successivement les fonctions primitives; mais de cette manière on entre dans des calculs longs et compliqués,

compliqués, et il est beaucoup plus simple d'employer les multiplicateurs de la manière dont on en a usé dans la *Mécanique analytique*, qui est toute fondée sur le calcul des variations.

On se contentera donc de multiplier le premier membre de cette équation par un coëfficient indéterminé λ, et de l'ajouter à l'expression précédente de la variation $\dot{V}$, en ayant soin en même temps de transformer tous les nouveaux termes de manière que les fonctions dérivées des variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ ne se trouvent que dans des fonctions dérivées exactes, comme on l'a pratiqué à l'égard des termes de la valeur de $\dot{V}$. On aura ainsi une nouvelle expression de $\dot{V}$, dans laquelle on pourra maintenant traiter les variations de $\dot{y}$ et $\dot{z}$, comme indépendantes, à raison de l'indéterminée λ.

Soient, pour abréger,

$$(Y) = \lambda F'(y) - [\lambda F'(y')]' + [\lambda F'(y'')]'' - \&c.$$
$$(\dot{Y}) = \lambda F'(y') - [\lambda F'(y)]' + \&c.$$
$$(\ddot{Y}) = \lambda F'(y'') - \&c.$$
$$\&c.$$
$$(Z) = \lambda F'(z) - [\lambda F'(z')]' + [\lambda F'(z'')]'' - \&c.$$
$$(\dot{Z}) = \lambda F'(z') - [(\lambda F'(z'')]' + \&c.$$
$$(\ddot{Z}) = \lambda F'(z'') - \&c.$$
$$\&c.$$

Les termes à ajouter à l'expression de la variation $\dot{V}$, seront

$$(Y)\dot{y} + (Z)\dot{z}$$
$$+ [(\dot{Y})\dot{y}]' + [(\ddot{Y})\dot{y}']' + \&c.$$
$$+ [(\dot{Z})\dot{z}]' + [(\ddot{Z})\dot{z}']' + \&c.$$

Donc, puisqu'on peut maintenant regarder les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ comme

indépendantes, on aura d'abord, par les principes posés ci-dessus, les deux équations générales du *maximum* ou du *minimum*,

$$Y + (Y) = 0, \qquad Z + (Z) = 0,$$

entre lesquelles il faudrait éliminer l'indéterminée λ; et l'équation résultante, combinée avec l'équation de condition, donnera les valeurs de y et z en x.

Ensuite la variation $\dot{U}$ deviendra

$$U = [\dot{Y} + (\dot{Y})]\dot{y} + [\ddot{Y} + (\ddot{Y})]\dot{y}' + \&c.$$
$$+ [\dot{Z} + (\dot{Z})]\dot{z} + [\ddot{Z} + (\ddot{Z})]\dot{z}' + \&c.,$$

valeur qu'on substituera dans l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Si on veut avoir égard en même temps à la variation de x, on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $\dot{V}x$, et on changera les quantités $\dot{y}$, $\dot{z}$ et leurs dérivées en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, et dans les dérivées de celles-ci.

Il faudrait, à la rigueur, dans ce cas, ajouter à la valeur de $\dot{V}$ le terme $\lambda[\dot{x}F(x, y, \ldots)]'$, d'après les formules trouvées plus haut pour la valeur complète de la variation de $x'F(x, y, \ldots)$. Ce terme se transforme en $[\lambda\dot{x}F(x, y, \ldots)]' - \lambda'\dot{x}F(x, y, \ldots)$; mais il disparaît ici en vertu de l'équation $F(x, y, \ldots) = 0$. Il faudrait néanmoins le conserver si l'équation de condition n'était donnée que par l'équation variée $\dot{F}(x, y, \ldots) = 0$.

Dans l'équation aux limites, on pourra regarder aussi les variations x, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, ainsi que leurs dérivées, comme indépendantes, à moins que la nature du problème ne donne aussi des conditions particulières aux limites.

Supposons, par exemple, que l'on ait une ou plusieurs équations de condition entre les quantités x, y, y', y'', &c., z, z', z'', &c., rapportées

aux deux limites, c'est-à-dire, entre les quantités x_0, y_0, y_0', y_0'', &c. z_0, z_0', z_0'', &c. x_1, y_1, y_1', y_1'', &c. z_1, z_1', z_1'', &c., et que le *maximum* ou le *minimum* ne doive avoir lieu que parmi les fonctions qui, prises entre les limites données, satisfont à ces conditions; il faudra que les mêmes équations subsistent dans l'état varié, c'est-à-dire, en y mettant $x + i\dot{x}$, $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y}$ + &c., $z + i\dot{z} + \frac{i^2}{2}\ddot{z}$ + &c. à la place de x, y, z; par conséquent on aura aussi les variations de ces équations, comme nous l'avons déjà vu plus haut.

Désignons par

$$\Phi(x_0, y_0, y_0', \text{&c. } z_0, z_0', \text{&c. } x_1, y_1, y_1' \text{ &c. } z_1, z_1', \text{&c.}) = 0,$$

une de ces équations de condition; elle donnera l'équation variée

$$\dot{x}_0\Phi'(x_0) + \dot{y}_0\Phi'(y_0) + \dot{z}_0\Phi'(z_0) + \dot{y}_0'\Phi'(y_0') + \text{&c.}$$
$$+ \dot{x}_1\Phi'(x_1) + \dot{y}_1\Phi'(y_1) + \dot{z}_1\Phi'(z_1) + \dot{y}_1'\Phi'(y_1') + \text{&c.} = 0.$$

On multipliera cette équation et les autres semblables par des coëfficiens indéterminés α, β, &c., et on les ajoutera à l'équation des limites données ci-dessus, après quoi on pourra traiter toutes les variations

$$\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{y}_0, \dot{y}_0', \dot{y}_0'', \text{&c. } \dot{y}_1, \dot{y}_1', \dot{y}_1'', \text{&c. } \dot{z}_1, \dot{z}_1', \dot{z}_1'', \text{&c.}$$

comme indépendantes, et égaler à zéro chacun de leurs coëfficiens, ce qui donnera autant d'équations particulières aux limites qu'il y aura de ces variations. On satisfera ensuite à ces équations par le moyen des coëfficiens arbitraires α, β, &c. et des constantes arbitraires qui entreront dans les expressions de y, z en x.

A l'égard des variations $\dot{z}_0$, $\dot{z}_0'$, &c. $\dot{z}_1$, $\dot{z}_1'$, &c., il est bon de remarquer que la fonction z étant donnée par une équation dérivée, si cette équation est de l'ordre n par rapport à z, les valeurs de z, z', z'', &c. $z^{(n-1)}$, correspondantes à une valeur donnée de x, seront arbitraires, et devront être déterminées par les conditions du problème : ainsi, en rapportant ces valeurs à la première limite, il faudra regarder les quantités

z_o, z_o', &c. $z_o^{(n-1)}$ comme des fonctions données de x_o, y_o, y_o', &c.; donc les variations $\dot{z}_o$, $\dot{z}_o'$, &c. seront aussi données en fonctions de x_o, y_o, y_o', &c. multipliées par les variations $\dot{x}_o$, $\dot{y}_o$, $\dot{y}_o'$, &c. : alors les variations $\dot{z}_1$, $\dot{z}_1'$, $\dot{z}_1''$, &c., qui se rapportent à la seconde limite, seront absolument indéterminées, et il faudra les faire évanouir en égalant leurs coëfficiens à zéro.

On pourrait demander que la fonction z donnée par l'équation de condition fût elle-même un *maximum* ou un *minimum*. Il n'y aurait alors qu'à supposer $U = z$, et par conséquent $V = z'$.

On aurait donc dans ce cas

$$f'(y) = 0, f'(y') = 0, \text{ &c. } f'(z) = 0, f'(z') = 1, f'(z'') = 0, \text{ &c.};$$

donc

$$Y = 0, \dot{Y} = 0, \text{ &c. } Z = 0, \dot{Z} = 1, \ddot{Z} = 0, \text{ &c.}$$

Les équations générales du *maximum* ou du *minimum* seraient donc simplement

$$(Y) = 0, \quad (Z) = 0;$$

on aurait ensuite

$$\dot{U} = (\dot{Y})\dot{y} + (\ddot{Y})\ddot{y} + \text{ &c. } + [1 + (\dot{Z})]\dot{z} + (\ddot{Z})\ddot{z} + \text{ &c.}$$

L'équation $(Z) = 0$ servira à déterminer la variable λ, et l'équation $(Y) = 0$, combinée avec l'équation donnée $F(x, y, y', \text{ &c. } z, z', \text{ &c.}) = 0$, donnera la valeur de y en x. Soit $z^{(n)}$ la plus haute dérivée de z qui entre dans cette équation, l'équation $(Z) = 0$ sera linéaire et de l'ordre n, par rapport à λ; la valeur de λ contiendra donc autant de constantes arbitraires et linéaires aussi, qui serviront à faire évanouir les variations $\dot{z}_1$, $\dot{z}_1'$, &c. dans l'équation des limites, les variations $\dot{z}_o$, z_o', &c. étant censées données par la nature du problème, comme nous venons de le remarquer.

Il faudra donc déterminer ces constantes de manière que l'on ait

$$1 + (\dot{Z}_1) = 0, \quad (\ddot{Z}_1) = 0, \quad (\dddot{Z}_1) = 0, \text{ &c.},$$

et on remplira ces conditions en faisant simplement

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda'_1 = 0, \text{ &c.} \quad \lambda_1^{(n-1)} = 0,$$

et de plus,

$$\lambda^{(n)} F'(\zeta^{(n)})_1 + 1 = 0.$$

Ceci revient à la solution donnée dans le tome quatrième des *Mémoires de Turin.*

En général, soit V une fonction quelconque des variables x, y, ζ, t, &c. et de leurs dérivées d'un ordre quelconque, à l'exception de x, dont la dérivée soit supposée l'unité; et soient $L = 0$, $M = 0$, &c. des équations de condition entre ces variables et leurs dérivées, dont le nombre ne surpasse pas celui des variables diminué de deux unités, afin qu'il reste des relations indéterminées entre les mêmes variables.

Le problème de *maximis* et *minimis* dont il s'agit ici, consiste à déterminer ces relations de manière que la fonction primitive de V devienne un *maximum* ou un *minimum* entre des limites données, correspondantes à des valeurs données de x.

Pour le résoudre de la manière la plus générale, on cherchera les variations des fonctions V, L, M, &c., dues aux variations de y, ζ, t, &c., et désignant ces variations par $\dot{V}, \dot{L}, \dot{M}$, &c., on considérera la formule

$$\dot{V} + \lambda \dot{L} + \mu \dot{M} + \text{&c.},$$

dans laquelle λ, μ, &c. sont supposées des variables indéterminées.

On fera sur cette formule les transformations enseignées plus haut, par lesquelles les fonctions dérivées des variations $\dot{y}$, $\dot{\zeta}$, $\dot{t}$, &c. ne paraissent plus que dans des termes qui sont des fonctions dérivées exactes: elle deviendra ainsi de la forme

$$\begin{aligned} & Y\dot{y} + Z\dot{\zeta} + T\dot{t} + \text{&c.} \\ & + (\dot{Y}\dot{y} + \ddot{Y}\dot{y}' + \dddot{Y}\dot{y}'' + \text{&c.})' \\ & + (\dot{Z}\dot{\zeta} + \ddot{Z}\dot{\zeta}' + \dddot{Z}\dot{\zeta}'' + \text{&c.})' \\ & + (\dot{T}\dot{t} + \ddot{T}\dot{t}' + \dddot{T}\dot{t}'' + \text{&c.})' \text{ &c.} \end{aligned}$$

Et l'on aura d'abord les équations générales

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0, \text{ \&c.},$$

qui, étant combinées avec les équations de condition

$$L = 0, \quad M = 0, \text{ \&c.},$$

serviront à déterminer les variables y, z, t, &c. λ, μ, &c.

Ensuite faisant

$$\begin{aligned}(\dot{U}) = {} & \dot{Y}\dot{y} + \ddot{Y}\dot{y}' + \dddot{Y}\dot{y}'' + \text{\&c.} \\ & + \dot{Z}\dot{z} + \ddot{Z}\dot{z}' + \dddot{Z}\dot{z}'' + \text{\&c.} \\ & + \dot{T}\dot{t} + \ddot{T}\dot{t}' + \dddot{T}\dot{t}'' + \text{\&c.} \\ & \text{\&c.}\end{aligned}$$

on aura l'équation aux limites $(\dot{U}_1) - (\dot{U}_0) = 0$, à laquelle on devra satisfaire, indépendamment des variations $\dot{y}$, $\dot{y}'$, &c. $\dot{z}$, $\dot{z}'$, &c. &c.

Et pour tenir compte de la variation de x, il n'y aura qu'à changer $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, $\dot{t} - t'\dot{x}$, et ajouter à la valeur de $(\dot{U})$ le terme $V\dot{x}$.

Comme la nature du problème peut fournir aussi des équations de condition entre les variables x, y, z, t, &c., rapportées à ces limites, désignons par $A = 0$, $B = 0$, &c. ces équations de condition, de manière que A, B, &c. soient des fonctions données de x_0, x_1, y_0, y_1, y_0', y_1', &c.

On formera les équations variées $\dot{A} = 0$, $\dot{B} = 0$, dues aux variations de chacune des quantités x_0, x_1, y_0, y_1, y_0', y_1', &c.; on ajoutera ces équations multipliées par les coëfficiens indéterminés α, β, &c. à l'équation aux limites.

On aura ainsi l'équation

$$(\dot{U}_1) - (\dot{U}_0) + \alpha\dot{A} + \beta\dot{B} + \text{\&c.} = 0,$$

dans laquelle on égalera séparément à zéro le coëfficient de chacune des variations dont il s'agit.

Ces formules servent à répondre à toutes les questions où l'on cherche des *maxima* ou *minima* absolus. Voyons aussi comment on y peut rappeler les questions où l'on ne demande que des *maxima* ou *minima* relatifs, c'est-à-dire, dans lesquelles la fonction primitive d'une fonction donnée ne doit être un *maximum* ou un *minimum* entre des limites assignées, qu'autant que les fonctions primitives d'autres fonctions données, auront des valeurs données entre les mêmes limites.

Soit u la fonction donnée dont la fonction primitive doit avoir une valeur déterminée entre les limites assignées. Supposons que s soit cette fonction primitive, en sorte que l'on ait l'équation $s' - u = 0$. La condition dont il s'agit consiste en ce que la quantité $s_1 - s_0$ doit avoir une valeur donnée; par conséquent sa variation devra être nulle, ce qui donne l'équation aux limites $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$.

Pour introduire cette condition dans la solution générale du problème de *maximis* et *minimis*, je regarde l'équation $s' - u = 0$ comme une équation de condition, et je la traite comme les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, &c. Je multiplie par un coèfficient variable et indéterminé σ la variation $\dot{s}' - \dot{u}$, et je l'ajoute à la formule générale $\dot{V} + \lambda\dot{L} +$ &c.; j'ai

$$\dot{V} + \sigma(\dot{s}' - \dot{u}) + \lambda\dot{L} + \mu\dot{M} + \text{&c.}$$

Le terme $\sigma\dot{s}'$ se transforme en ceux-ci : $(\sigma\dot{s})' - \sigma'\dot{s}$; et comme ces termes sont les seuls qui contiennent la variable s, la variation $\dot{s}$ donnera d'abord l'équation $\sigma' = 0$; d'où l'on tire $\sigma = a$, a étant une constante arbitraire.

Ensuite l'autre partie $(\sigma\dot{s})'$, qui est une dérivée exacte, donnera dans l'expression de (U) le terme $\sigma\dot{s}$, et dans l'équation aux limites les termes $a(\dot{s}_1 - \dot{s}_0)$, à cause de $\sigma = a$: mais on a par les conditions du *maximum* ou du *minimum* relatif, $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$: donc la valeur de (U) ne recevra

Il n'y aura donc que la variation $-a\dot{u}$ qui devra être ajoutée à la formule générale, ce qui revient à substituer à la place de la fonction V la fonction $V - au$, et à chercher les conditions du *maximum* ou du *minimum* absolu de la fonction primitive de $V - au$, a étant une constante quelconque arbitraire.

On trouverait de la même manière que si la fonction primitive de V ne devait être qu'un *maximum* ou un *minimum* relatif, en supposant que les fonctions primitives de u et v aient des valeurs déterminées, la question se réduirait au *maximum* ou au *minimum* absolu de la fonction primitive de $V - au - bv$, a et b étant des constantes arbitraires.

Ce résultat s'accorde, comme l'on voit, avec celui qu'*Euler* avait trouvé par la considération des variations des ordonnées successives dans les courbes.

Telles sont les formules générales pour la solution des problèmes de *maximis* et *minimis* qui dépendent de la méthode des variations, et l'on voit que ces formules s'étendent à tous les cas ; mais dans chaque cas particulier, au lieu d'y appliquer ces formules, il sera quelquefois préférable d'opérer directement sur les fonctions proposées, en suivant la marche que nous venons de tracer.

Quant à la manière de distinguer les *maxima* des *minima*, et même de s'assurer de leur existence, nous avons vu qu'elle dépend des variations du second ordre ; mais nous n'entrerons pas dans un détail qui nous menerait trop loin : on peut voir d'ailleurs ce que nous avons dit là-dessus dans la *Théorie des fonctions*, art. 173 et suiv. Nous remarquerons seulement qu'en prenant la variation du second ordre de la fonction V, il sera inutile d'avoir égard aux variations du second ordre de la variable y, parce que les termes affectés de $\ddot{y}$, $\ddot{y}'$, &c. dans l'expression de $\ddot{V}$ étant les mêmes que ceux affectés de $\dot{y}$, $\dot{y}'$, &c. dans $\dot{V}$, ces termes doivent disparaître par les conditions du *maximum* ou du *minimum*, quelle que soit la valeur de $\dot{y}$ ou de $\ddot{y}$: ainsi on aura pour la variation du

du second ordre, les mêmes formules que dans l'endroit cité, en changeant seulement $\dot{y}$ en ω, et par conséquent aussi les mêmes résultats.

Pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, nous dirons encore un mot des *maxima* et *minima* qui dépendent des fonctions de plusieurs variables. La première question de ce genre a été résolue par la méthode des variations, dans le second volume des *Mémoires de Turin*. Il s'agissait de trouver parmi toutes les surfaces courbes qui sont terminées par le même périmètre, celle qui est la plus petite possible; problème qui est, par rapport aux surfaces, ce que les problèmes dont on vient de traiter, sont par rapport aux lignes.

En nommant z l'ordonnée perpendiculaire aux deux abscisses x et y, et qui est censée fonction de ces deux-ci, et désignant par des traits séparés par une virgule, les fonctions dérivées de z, prises par rapport à x et y, comme on l'a fait dans la leçon XXe, la grandeur ou la quadrature de la surface est exprimée par la double fonction primitive de la formule

$$\int\int [1 + (z')^2 + (z'')^2],$$

prise d'abord par rapport à une seule des variables x, y, et ensuite par rapport à l'autre, en substituant pour la première sa valeur donnée par l'équation du contour de la surface : ainsi le problème consiste à trouver la fonction z de x et y, qui rendra cette double fonction primitive un *maximum* ou un *minimum*.

Pour le rendre plus général, nous supposerons qu'on demande de rendre un *maximum* ou un *minimum* la double fonction primitive d'une fonction donnée de $x, y, z, z', z'', z'', z'', z''$, &c.

Désignons cette fonction par V, de manière que l'on ait

$$V = f(x, y, z, z', z'', z'', z'', z'', \&c.),$$

et soit U la double fonction primitive de V, qui doit devenir un *maximum* ou un *minimum*. Il faudra, par les principes établis ci-dessus, que sa variation $\dot{U}$ soit nulle : or, $U'' = V$; donc prenant les variations

$\dot{U}^{,,} = \dot{V}$. Si on dénote de même par des traits placés au bas, les fonctions primitives, ainsi qu'on l'a indiqué dans la leçon treizième, on pourra passer de l'équation précédente à celle-ci qui est inverse $\dot{U} = \dot{V}_{,,}$ par laquelle on voit que le problème consiste à rendre nulle la double fonction primitive de la variation $\dot{V}$.

Or on a, en prenant les variations de z et de ses dérivées,

$$\dot{V} = \dot{z}f'(z) + \dot{z}'f'(z') + \dot{z}'f'(z') + z''f'(z'') + \dot{z}'f'(z'') + \dot{z}''f'(z'') + \&c.,$$

formule que nous représenterons, pour plus de simplicité, par

$$\dot{V} = L\dot{z} + M\dot{z}' + N\dot{z}'' + P\dot{z}''' + Q\dot{z}'^{,} + R\dot{z}^{,,} + \&c.$$

On fera dans cette formule les transformations employées plus haut, par lesquelles les dérivées de la variation $\dot{z}$ ne se trouvent que dans des termes qui sont des dérivées exactes.

Ainsi le terme $M\dot{z}'$ se changera en $(M\dot{z})' - M'\dot{z}$, le terme $N\dot{z}''$ se changera en $(N\dot{z})'' - N'\dot{z}$, et ainsi des autres, en conservant la position des virgules qui séparent les traits relatifs aux variables x et y.

De cette manière on aura la transformée

$$\dot{V} = (L - M' - N'' + P''' + Q'^{,} + R^{,,} + \&c.)\,\dot{z} + (M\dot{z} + P\dot{z}' - P'\dot{z} + Q\dot{z}'' + \&c.)' + (N\dot{z} + R\dot{z}' - R'\dot{z} - Q'\dot{z} + \&c.)''. \&c.$$

On voit d'abord ici qu'il est impossible que la double fonction primitive de $\dot{V}$ devienne nulle, quelle que soit la variation $\dot{z}$, à moins que les termes affectés simplement de $\dot{z}$ ne disparaissent, ce qui donne d'abord l'équation générale du *maximum* ou du *minimum*

$$L - M' - N'' + P''' + Q'^{,} + R^{,,} + \&c. = 0.$$

La première ligne de l'expression de $\dot{V}$ étant effacée, si on prend

maintenant les doubles fonctions primitives de part et d'autre, on aura

$$\dot{U} = (M\dot{z} + P\dot{z}' - P'\dot{z} + Q\dot{z}')',$$
$$+ (N\dot{z} + R\dot{z}' - R'\dot{z} - Q'\dot{z})'.$$

Comme il n'y a plus ici que des fonctions primitives simples, chacune d'elles se rapporte uniquement à une des variables x, y, en regardant l'autre de ces variables comme déterminée par l'équation qui donne la courbe des limites entre lesquelles le *maximum* ou le *minimum* doit avoir lieu.

Le cas le plus simple est lorsque le contour de la surface représentée par l'équation en x, y, z, est supposé tout-à-fait donné et invariable; alors les variations de z et de ses dérivées sont nulles relativement à la courbe de ce contour, et par conséquent aussi dans toute l'étendue des fonctions primitives simples de la variation $\dot{U}$, et la condition de $\dot{U} = 0$ se trouve remplie d'elle-même.

L'équation du *maximum* ou du *minimum* sera donc, en substituant les valeurs de L, M, &c.,

$$f'(z) - [f'(z')]' - [f'(z')]'$$
$$+ [f'(z'')]'' + [f'(z'')]'' + [f'(z'')]'' + \&c. = 0$$

qu'on voit être du genre de celles que nous avons considérées dans la leçon XXe, et dont les équations primitives contiennent des fonctions arbitraires.

Les cas plus compliqués se résoudront par des considérations analogues à celles que nous avons faites sur les problèmes où l'on ne cherche que des fonctions d'une variable.

Pour donner maintenant quelques applications des méthodes et des formules que nous venons d'exposer, nous prendrons d'abord le problème le plus simple de ce genre, qui consiste à trouver la ligne la plus courte entre des termes donnés. En supposant que la ligne cherchée soit toute dans un même plan, et prenant x, y pour ses coordonnées, la longueur

de la ligne sera exprimée en général par la fonction primitive de l'expression $\sqrt{(1+y'^2)}$, qui étant représentée par V ou $f(x, y, y')$, donnera $f'(y) = 0$, $f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}$: ainsi l'équation générale du *maximum* ou du *minimum* sera

$$-\left[\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right]' = 0;$$

ensuite on aura $\dot{U} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\dot{y}$, et l'équation aux limites sera $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$.

L'équation générale donne tout de suite $\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} =$ à une constante; d'où l'on tire $y' = b$, et de là $y = bx + c$, b et c étant deux constantes arbitraires, ce qui est l'équation générale de la ligne droite.

Si les deux extrémités de la ligne étaient données, on aurait $\dot{y}_0 = 0$ et $\dot{y}_1 = 0$; par conséquent l'équation aux limites aurait lieu sans aucune condition.

En général, l'équation aux limites se réduira à $a(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) = 0$, où $a = \frac{b}{\sqrt{(1+b^2)}}$; de sorte que si la ligne cherchée devait être terminée des deux côtés ou d'un seul par des lignes perpendiculaires à l'axe des x, les variations $\dot{y}_0$, $\dot{y}_1$ seraient toutes les deux, ou une seulement, arbitraires : dans l'un et l'autre cas, l'équation aux limites donnerait $a = 0$, et par conséquent $b = 0$; ce qui réduit la ligne la plus courte à une droite parallèle à l'axe.

Si la ligne la plus courte devait être terminée de part et d'autre par deux lignes données droites ou courbes, il faudrait alors tenir compte dans l'équation aux limites des variations de x et y à-la-fois : il faudra donc mettre dans l'expression de $\dot{U}$, $\dot{y} - y'\dot{x}$ à la place de $\dot{y}$, et y ajouter le terme $V\dot{x}$; on aura ainsi

$$\dot{U} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}(\dot{y} - y'\dot{x}) + \dot{x}\sqrt{(1+y'^2)},$$

et réduisant

$$\dot{U} = \frac{y'\dot{y} + \dot{x}}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

L'équation aux limites étant $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$, si on suppose que les deux limites soient indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément $\dot{U}_0 = 0$ et $\dot{U}_1 = 0$; et par conséquent

$$y'_0 \dot{y}_0 + \dot{x}_0 = 0, \quad y'_1 \dot{y}_1 + \dot{x}_1 = 0.$$

Soit maintenant $\Phi(x, y) = 0$; l'équation de la ligne qui forme la première limite, elle donnera l'équation variée $\dot{x}\Phi'(x) + \dot{y}\Phi'(y) = 0$; mais elle donne aussi l'équation dérivée $\Phi'(x) + y'\Phi'(y) = 0$; de sorte que la combinaison de ces deux équations produira celle-ci :

$$\dot{y} - y'\dot{x} = 0.$$

Il faut remarquer à l'égard de cette équation, que les variations $\dot{x}, \dot{y}$ sont censées les mêmes que celles que nous avons désignées ci-dessus par $\dot{x}_0, \dot{y}_0$, parce que ce sont les variations des coordonnées x, y à la première limite; mais la dérivée y' n'est pas la même que la dérivée y'_0, quoiqu'elles se rapportent toutes les deux au même point : car celle-ci se rapporte à la ligne la plus courte, et exprime la tangente de l'angle que la tangente à cette ligne fait avec l'axe; au lieu que l'autre se rapporte à la ligne qui sert de limite, et exprime de même la tangente de l'angle que la tangente à cette ligne fait avec le même axe. Nous désignerons cette dérivée par (y'), et appliquant le chiffre 0 au bas de chaque lettre pour la rapporter à la première limite, l'équation précédente deviendra

$$\dot{y}_0 - (y')_0 \dot{x}_0 = 0.$$

Telle est l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les variations $\dot{y}_0$ et $\dot{x}_0$; ainsi substituant dans l'équation $y'_0 \dot{y}_0 + \dot{x}_0 = 0$ de la première limite, la valeur de $\dot{y}_0$ tirée de l'équation précédente, on aura

$[y'_0 (y')_0 + 1] \dot{x} = 0$, et par conséquent $y'_0 . (y')_0 + 1 = 0$.

Or, y'_0 et $(y')_0$ étant les tangentes de deux angles, on sait que la tangente de la différence de ces angles est exprimée par la formule $\frac{y'_0 - (y')_0}{1 + y'_0 (y')_0}$; donc, puisque ici le dénominateur devient nul, et par conséquent la tangente infinie, il s'ensuit que la différence des deux angles dont il s'agit, sera égale à un angle droit.

D'où il est aisé de conclure que les deux lignes, celle qui doit être la plus courte, et celle qui forme sa première limite, doivent se couper à angles droits.

Et comme l'équation à la seconde limite est tout-à-fait semblable à l'équation pour la première, on trouvera nécessairement le même résultat relativement à la seconde limite; c'est-à-dire, que la ligne la plus courte devra aussi couper à angles droits la ligne qui formera la seconde limite.

On satisfera à ces conditions par le moyen des équations $y'_0 (y')_0 + 1 = 0$ et $y'_1 (y')_1 + 1 = 0$, et des constantes arbitraires b, c, ce qui n'a aucune difficulté.

Supposons maintenant, pour donner plus de généralité au problème, qu'on demande la ligne la plus courte, sans la condition qu'elle doive être toute dans le même plan; en prenant x, y, z pour les trois coordonnées, dont deux, y et z, sont censées fonctions de la troisième, x, on aura la fonction $\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}$, dont la primitive exprimera la longueur de la ligne cherchée, et devra par conséquent être un *minimum*.

Faisant donc

$$V = \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)},$$

on aura

$$\dot{V} = \frac{y'\dot{y}' + z'\dot{z}'}{V},$$

formule qui, par les principes établis, se transforme en celle-ci:

$$\dot{V} = -\left(\frac{y'}{V}\right)' \dot{y} - \left(\frac{z'}{V}\right)' \dot{z} + \left(\frac{y'}{V}\dot{y}\right)' + \left(\frac{z'}{V}\dot{z}\right)',$$

d'où l'on tire pour l'équation générale du *minimum*,

$$\left(\frac{y'}{V}\right)'\dot{y} + \left(\frac{z'}{V}\right)'\dot{z} = 0,$$

et ensuite pour l'équation aux limites

$$\dot{U} = \frac{y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V}, \text{ et } \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Supposons d'abord que la ligne la plus courte ne soit assujettie à aucune condition dans toute son étendue; il faudra alors que les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ demeurent indéterminées, ce qui donnera les deux équations

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' = 0 \text{ et } \left(\frac{z'}{V}\right)' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{y'}{V} = a, \qquad \frac{z'}{V} = b,$$

a et b étant des constantes arbitraires; et comme $V = \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}$, il s'ensuit que y' et z' auront des valeurs constantes qui étant désignées par c et d, donneront tout de suite

$$y = cx + m, \quad z = dx + n,$$

m et n étant aussi des constantes arbitraires.

Ces deux équations font voir que la ligne cherchée est une droite dont la position est arbitraire.

Il faut maintenant considérer l'équation aux limites, laquelle, si on suppose les deux limites indépendantes l'une de l'autre, se partage tout de suite en ces deux-ci : $\dot{U}_0 = 0$, $\dot{U}_1 = 0$; savoir,

$$y'_0\dot{y}_0 + z'_0\dot{z}_0 = 0, \quad y'_1\dot{y}_1 + z'_1\dot{z}_1 = 0,$$

équations qui auront lieu d'elles-mêmes, si les deux extrémités de la ligne sont supposées données de position, parce qu'alors les variations des ordonnées y et z seront nulles dans ces deux points.

Mais si la ligne la plus courte doit être comprise entre deux lignes données, alors il faudra, comme nous l'avons fait plus haut, tenir compte

des variations des coordonnées x, y, z à l'une et à l'autre de ses extrémités.

Pour cela, il faudra d'abord ajouter à la valeur de $\dot{U}$ le terme $\dot{V}x$, et y changer en même temps $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$: on aura ainsi à cause de $V^2 = 1 + y'^2 + z'^2$, après les réductions

$$\dot{U} = \frac{\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V};$$

et les deux équations aux limites $\dot{U}_0 = 0$, $\dot{U}_1 = 0$ deviendront

$$\dot{x}_0 + y'_0\dot{y}_0 + z'_0\dot{z}_0 = 0,$$
$$\dot{x}_1 + y'_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}'_1 = 0.$$

Supposons que la première limite soit une courbe dont les deux équations soient

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \Psi(x, z) = 0;$$

la première de ces équations donnera, comme nous l'avons vu plus haut, l'équation variée

$$\dot{y}_0 - (y')_0\dot{x}_0 = 0,$$

et la seconde donnera de même

$$\dot{z}_0 - (z')_0\dot{x}_0 = 0.$$

Tirant de ces deux équations les valeurs de $\dot{y}_0$ et $\dot{z}_0$, et les substituant dans la première des deux équations ci-dessus, on aura $(1 + y'_0(y')_0 + z'_0(z')_0)\dot{x}_0 = 0$; et comme la variation $\dot{x}_0$ doit demeurer indéterminée, il en résultera cette équation de condition pour la première limite

$$1 + y'_0(y')_0 + z'_0(z')_0 = 0,$$

à laquelle on satisfera par le moyen d'une des constantes arbitraires c, d, l'autre devant être déterminée par l'équation de condition de la seconde limite, laquelle sera de même

$$1 + y'_1(y')_1 + z'_1(z')_1 = 0.$$

Mais

Mais si on veut savoir ce que ces équations représentent, il n'y a qu'à se rappeler que, dans la théorie du contact des courbes, on démontre qu'en regardant les dérivées y'_0 et z'_0 comme constantes, les deux équations

$$y = y'_0 x + \mu, \qquad z = z'_0 x + \nu,$$

où μ et ν sont aussi des constantes par rapport à x et y, représentent la ligne droite qui touche la courbe de la première limite ; et que de la même manière les deux équations

$$y = (y')_0 x + \pi, \qquad z = (z')_0 x + \rho,$$

représentent la ligne droite qui touche au même point la ligne la plus courte, π et ρ étant aussi des constantes par rapport à x et y.

Or, dans l'application de l'analyse à la géométrie, on démontre que les deux droites représentées par ces équations, si elles se coupent, font entre elles un angle dont le cosinus est

$$\frac{1 + y'_0 (y')_0 + z'_0 (z')_0}{\sqrt{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)} \times \sqrt{[1 + (y')^2_0 + (z')^2_0]}}.$$

(*Voyez* les feuilles d'*Analyse de Monge*). Donc, puisque dans le cas présent, le numérateur de cette expression devient nul, il s'ensuit que l'angle des deux droites sera droit ; par conséquent il faudra que la ligne la plus courte coupe à angles droits la courbe qui forme la première limite.

On parviendra de la même manière à une conclusion semblable pour l'autre limite : d'où il résulte que la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux courbes quelconques est toujours la droite qui coupera ces courbes à angle droit. Ce théorème est connu depuis long-temps, et se démontre de différentes manières ; mais aucune n'est aussi directe que celle que fournit l'analyse précédente.

Mais si, au lieu d'une simple ligne, il y avait une surface pour servir de limite à la ligne la plus courte, désignant par $\Phi(x, y, z) = 0$ la surface de la première limite, elle donnerait cette équation variée

$$\dot{x}_0 \Phi'(x) + \dot{y}_0 \Phi'(y) + \dot{z}_0 \Phi'(z) = 0,$$

qu'il faudrait combiner avec l'équation de la première limite trouvée ci-dessus

$$\dot{x}_0 + y'_0 \dot{y}_0 + z'_0 \dot{z}_0 = 0.$$

Substituant dans l'équation précédente la valeur de $\dot{x}_0$ tirée de celle-ci, on aura

$$[\Phi'(y) - y'_0 \Phi'(x)]\dot{y}_0 + [\Phi'(z) - z'_0 \Phi'(x)]\dot{z}_0 = 0,$$

d'où, à cause que les variations $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ doivent demeurer indéterminées, on tire ces deux-ci :

$$\Phi'(y) - y'_0 \Phi'(x) = 0, \quad \Phi'(z) - z'_0 \Phi'(x) = 0,$$

auxquelles il faudra satisfaire par deux des constantes arbitraires de la ligne la plus courte.

On trouvera deux équations semblables pour la seconde limite, si elle est aussi formée par une surface donnée.

Pour voir maintenant ce que signifient ces équations, on remarquera que l'équation de la surface $\Phi(x, y, z) = 0$ donne la dérivée

$$x' \Phi'(x) + y' \Phi'(y) + z' \Phi'(z) = 0,$$

dont la primitive, en regardant les coëfficiens de x', y', z' comme constans, savoir,

$$x \Phi'(x) + y \Phi'(y) + z \Phi'(z) + \alpha = 0;$$

représente le plan tangent à cette surface, comme on le sait, par la théorie des courbes ; α étant une constante arbitraire par rapport à x, y, z.

Substituons dans cette équation les valeurs de $\Phi'(y)$ et $\Phi'(z)$ tirées des deux équations trouvées ci-dessus, elle deviendra, en la divisant par $\Phi'(x)$ qui est regardée comme constante,

$$x + y'_0 y + z'_0 z + \frac{\alpha}{\varphi'(x)} = 0.$$

D'un autre côté, on sait que cette équation représente aussi un plan

perpendiculaire à la droite, dont les équations seraient

$$y = y'_0 x + \mu, \quad z = z'_0 x + \nu;$$

(voyez les feuilles citées) les quantités y'_0 et z'_0 étant regardées ici comme constantes, ainsi que μ et ν : donc, puisque ces équations sont celles de la tangente à l'extrémité de la ligne la plus courte, que nous regardons en général comme une courbe quelconque, il s'ensuit que les deux équations données plus haut expriment que la ligne la plus courte doit rencontrer la surface donnée à angles droits.

Et comme la même conclusion aurait lieu aussi pour l'autre limite, si elle était formée par une surface; il en résulte que la ligne la plus courte entre deux surfaces données, sera encore la droite qui rencontre ces surfaces à angles droits.

Jusqu'ici nous n'avons cherché que la ligne la plus courte parmi toutes les lignes possibles qu'on peut mener entre des points, ou des lignes, ou des surfaces données; problème que la simple géométrie peut résoudre, parce qu'on sait que dans un plan la ligne la plus courte est la ligne droite : mais si on demande en général la ligne la plus courte sur une surface quelconque donnée, le problème dépend alors essentiellement de la méthode des variations, et les formules trouvées ci-dessus s'y appliquent avec la même facilité.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface donnée, elle donnera l'équation variée

$$\dot{y} F'(y) + \dot{z} F'(z) = 0,$$

laquelle étant combinée avec l'équation générale du *maximum* ou *minimum* trouvée plus haut

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' \dot{y} + \left(\frac{z'}{V}\right)' \dot{z} = 0,$$

produit celle-ci

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' \times F'(z) - \left(\frac{z'}{V}\right)' \times F'(y) = 0,$$

pour l'équation de la ligne la plus courte sur la surface donnée; ensuite on aura l'équation aux limites $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$, dans laquelle on a en général

$$\dot{U} = \frac{y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V};$$

et si l'on veut avoir égard aussi à la variation de x, on aura

$$\dot{U} = \frac{\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V},$$

comme on l'a trouvé plus haut.

Il faudrait ici substituer pour $\dot{z}$ sa valeur tirée de l'équation variée, $\dot{x}\,F'(x) + \dot{y}\,F'(y) + \dot{z}\,F'(z) = 0$; mais en faisant abstraction de la surface, l'expression précédente de $\dot{U}$ conduit directement aux mêmes conclusions qu'on a trouvées plus haut relativement aux limites, c'est-à-dire, que la ligne la plus courte tracée sur la surface donnée, devra aussi couper à angles droits les courbes qui lui serviront de limites.

A l'égard de la nature de la ligne la plus courte sur une surface, elle jouit d'une propriété particulière et caractéristique, par laquelle on peut la déterminer indépendamment de la considération du *minimum;* c'est que ses rayons osculateurs sont tous perpendiculaires à la surface. En effet, il est clair que cette ligne doit être celle suivant laquelle se dirigera un fil tendu sur la surface donnée, et il est facile de concevoir en même temps, que le fil tendu ne peut être en équilibre qu'autant que la pression résultante de la tension, et dont la direction est suivant le rayon osculateur, sera perpendiculaire à la surface. Pour voir comment la propriété dont il s'agit résulte de l'équation trouvée pour la ligne la plus courte, nous remarquerons d'abord que l'équation du plan tangent à la surface représentée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, est, comme on l'a vu plus haut,

$$x\,F'(x) + y\,F'(y) + z\,F'(z) + \alpha = 0,$$

les fonctions $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ étant regardées comme constantes, ainsi que la quantité α.

Nous remarquerons ensuite que si on représente par

$$x + Ay + Bz + C = 0,$$

l'équation du plan du cercle osculateur d'une ligne à double courbure, il faut que cette équation et ses deux dérivées, prime et seconde, aient lieu en prenant les coordonnées x, y, z du plan pour celles de la courbe donnée, et en regardant dans la formation des dérivées, les coèfficiens A, B, C comme constans; c'est ce qui résulte de la théorie du contact des courbes exposées dans la *Théorie des Fonctions.*

On aura donc ainsi les deux équations dérivées dans lesquelles $x' = 1$,

$$1 + Ay' + Bz' = 0, \quad Ay'' + Bz'' = 0.$$

La dernière donne $B = -\frac{Ay''}{z''}$, et cette valeur étant substituée dans la précédente, on aura

$$A = \frac{z''}{z'y'' - y'z''}, \quad B = -\frac{y''}{z'y'' - y'z''}.$$

Nous remarquerons de plus qu'il suffit que le plan du cercle osculateur soit perpendiculaire au plan tangent à la surface, pour que le rayon osculateur soit perpendiculaire à la surface, parce que ce rayon est nécessairement perpendiculaire à la courbe tracée sur la surface.

Or, on démontre encore dans l'application de l'analyse à la géométrie *(voyez les feuilles déjà citées)*, que la condition pour que deux plans représentés par les équations

$$xF'(x) + yF'(y) + zF'(z) + \alpha = 0,$$
$$x + Ay + Bz + C = 0,$$

se coupent à angles droits, est renfermée simplement dans l'équation

$$F'(x) + AF'(y) + BF'(z) = 0.$$

L'équation de la surface $F(x, y, z) = 0$ donne aussi l'équation dérivée

$F'(x)+y'F'(y)+z'F'(z)=0$, d'où l'on tire $F'(x)=-y'F'(y)-z'F'(z)$. Cette valeur substituée dans l'équation précédente, donnera celle-ci:

$$(A-y')\,F'(y)+(B-z')\,F'(z)=0,$$

laquelle, en substituant les valeurs de A et B trouvées ci-dessus, devient

$$[z''-y'(z'y''-y'z'')]\,F'(y)-[y''+z''(z'y''-y'z'')]\,F'(z)=0.$$

Or, si on divise le coëfficient de $F'(y)$ dans cette équation, par $V^{\frac{3}{2}}$, V étant $\sqrt{(1+y'+z'^2)}$, on a la dérivée de $\frac{z'}{V}$, et de même le coëfficient de $F'(z)$, divisé par $V^{\frac{3}{2}}$, devient la dérivée de $\frac{y'}{V}$, comme il est facile de s'en assurer par le calcul: donc, en divisant toute l'équation par $V^{\frac{3}{2}}$, elle pourra se mettre sous la forme $\left(\frac{z'}{V}\right)'F'(y)-\left(\frac{y'}{V}\right)'F'(z)=0$, qui est la même que celle de l'équation que nous avons trouvée pour la ligne la plus courte.

Clairaut a remarqué le premier, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1733, que, quelle que soit la figure de la terre, la ligne qu'on y tracerait en plantant continuellement des piquets perpendiculaires à l'horizon, de manière qu'ils soient effacés les uns par les autres, comme on l'a pratiqué dans la description de la perpendiculaire à la méridienne de Paris, aurait la propriété d'être la ligne la plus courte entre tous ses points: ainsi la détermination de cette ligne dépend de l'équation générale qu'on vient de trouver.

En supposant que la terre soit un sphéroïde de révolution, si on prend l'axe des x pour l'axe de la terre, dont le centre soit l'origine des coordonnées, et qu'on nomme r l'ordonnée de la courbe des méridiens, on aura $r=\sqrt{(y^2+z^2)}$: donc si $F(x,r)=0$ est l'équation de cette courbe, elle deviendra celle de la surface du sphéroïde, en y substituant $\sqrt{(y^2+z^2)}$ pour r; et à cause de $r'=\frac{yy'+zz'}{r}$, on aura

$$F'(y)=\frac{y}{r}F'(r),\qquad F'(z)=\frac{z}{r}F'(r);$$

de sorte que l'équation de la ligne la plus courte sur le sphéroïde, deviendra

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' z - \left(\frac{z'}{V}\right)' y = 0,$$

laquelle est du second ordre, mais dont la primitive du premier ordre est

$$\frac{zy' - yz'}{V} = a,$$

a étant une constante quelconque. Cette équation combinée avec l'équation $F(x, r) = 0$, suffira pour construire la courbe.

Ce problème est traité avec beaucoup de détails dans le quatrième volume des œuvres de *Jean Bernoulli.*

Le problème de la ligne la plus courte conduit naturellement à celui de la surface de la moindre étendue. Nous avons déjà vu plus haut que l'on a alors

$$V = \sqrt{[1 + (z')^2 + (z')^2]},$$

d'où l'on tire la variation

$$\dot{V} = \frac{z''\dot{z}'' + z'\dot{z}''}{V},$$

laquelle étant comparée à la formule

$$L\dot{z} + M\dot{z}' + N\dot{z}'$$

donne

$$L = 0, \quad M = \frac{z''}{V}, \quad N = \frac{z''}{V};$$

et de là résulte l'équation générale

$$\left(\frac{z''}{V}\right)' + \left(\frac{z''}{V}\right)' = 0.$$

Cette équation, en effectuant les dérivations indiquées, se réduit à

$$V(z'' + z'') - (z'V' + z'V') = 0:$$

or, en prenant successivement les dérivées par rapport à x et à y, on

trouve

$$VV'' = z' z'' + z' z''', \quad VV''' = z' z''' + z' z'' ;$$

de sorte qu'en multipliant l'équation précédente par V, et substituant les valeurs de V^2, VV'', VV''', on aura après les réductions,

$$[1 + (z'')^2]\, z'' - 2 z' z' z''' + [1 + (z')^2]\, z'' = 0 :$$

et si on aime mieux employer la notation proposée dans la leçon XX.e, on aura pour l'équation de la moindre surface,

$$\left[1+\left(\frac{z'}{x'}\right)^2\right]\left(\frac{z''}{y'^2}\right) - 2\left(\frac{z'}{x'}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right)\left(\frac{z''}{x'y'}\right) + \left[1+\left(\frac{z'}{y'}\right)^2\right]\left(\frac{z''}{x'^2}\right) = 0.$$

Monge et *Legendre* ont trouvé, par des méthodes ingénieuses, l'équation primitive de cette équation du second ordre; mais la forme sous laquelle elle se présente, la rend peu susceptible d'applications utiles. *Voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1787.

Pour donner encore un autre exemple, nous reprendrons le problème si connu de la brachystochrone, ou ligne de la plus vîte-descente; mais nous la considérerons dans un milieu résistant comme une fonction quelconque de la vîtesse.

Soient les abscisses x dirigées verticalement de haut en bas, et par conséquent les ordonnées y horizontales. Si on nomme g la force constante de la gravité, z le carré de la vîtesse, et Φz la fonction de la vîtesse qui est proportionnelle à la résistance, les principes de la mécanique donnent l'équation

$$z' - 2g + 2\Phi z \times \sqrt{(1 + y'^2)} = 0$$

pour la détermination de z; et le temps qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, est exprimé par la fonction primitive de l'expression $\frac{\sqrt{(1 + y'^2)}}{\sqrt{(z)}}$.

En comparant ces formules aux formules générales, on aura

$$V = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)}}{\sqrt{(z)}} = f(x, y, y', z);$$

et

et la fonction $F(x, y, y', z, z' \ldots\ldots)$ qui, étant égalée à zéro, donne l'équation de condition, sera

$$z' - 2g + 2\Phi z \times \sqrt{(1 + y'^2)},$$

On aura donc

$$\dot{V} = \frac{y'\dot{y}'}{\sqrt{(1+y'^2)} \times \sqrt{(z)}} - \frac{\dot{z}\sqrt{(1+y'^2)}}{2z^{\frac{1}{2}}};$$

et de là

$$f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)} \times \sqrt{(z)}}, \quad f'(z) = -\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{2z^{\frac{1}{2}}};$$

ensuite on aura l'équation variée

$$\dot{z}' + 2\dot{z}\Phi' z \times \sqrt{(1 + y'^2)} + 2\Phi z \times \frac{y'\dot{y}'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = 0,$$

et par conséquent

$$F'(y') = 2\Phi z \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$
$$F'(z) = 2\Phi' z \times \sqrt{(1 + y'^2)}, \quad F'(z') = 1.$$

De là, on aura

$$Y = -\left[\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)} \times \sqrt{(z)}}\right]', \quad \dot{Y} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)} \times \sqrt{(z)}},$$
$$Z = -\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{2z^{\frac{3}{2}}}, \quad \dot{Z} = 0;$$

$$(Y) = -\left[2\lambda\Phi z \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right]', \quad (\dot{Y}) = 2\lambda\Phi z \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$
$$(Z) = 2\lambda\Phi' z \times \sqrt{(1 + y'^2)} - \lambda', \quad (\dot{Z}) = \lambda.$$

D'après ces valeurs, on aura les équations générales

$$Y + (Y) = 0, \quad Z + (Z) = 0,$$

et l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0,$$

en faisant

$$\dot{U} = [\dot{Y} + (\dot{Y})]\dot{y} + [\dot{Z} + (\dot{Z})]\dot{z};$$

et si on veut tenir compte de la variation de x, on aura

$$\dot{U} = [\dot{Y} + (\dot{Y})]\,(\dot{y} - y'\dot{x}) + [\dot{Z} + (\dot{Z})]\,(\dot{z} - z'\dot{x}) + \frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{\sqrt{(z)}}\,\dot{x}.$$

Les deux équations générales se réduisent à celles-ci :

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}\times\sqrt{(z)}}\right]' + \left[2\lambda\Phi z\times\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right]' = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{2z^{\frac{1}{2}}} + 2\lambda\Phi z\times\sqrt{(1+y'^2)} - \lambda' = 0,$$

dont la première a pour primitive

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}\,\sqrt{(z)}} + 2\lambda\Phi z\times\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a)}},$$

a étant une constante arbitraire.

Il faudra substituer dans celle-ci la valeur de λ tirée de la seconde ; ensuite il faudra éliminer z par le moyen de l'équation de condition

$$z' - 2g + 2\Phi z\times\sqrt{(1+y'^2)} = 0,$$

et l'équation résultante en y et x sera celle de la courbe cherchée.

Comme z représente le carré de la vîtesse, et que l'équation en z est du premier ordre, la valeur de z, tirée de l'équation primitive de celle-ci, contiendra une constante arbitraire qui dépendra de la vîtesse initiale imprimée au mobile.

On peut donc regarder la valeur de z, à la première limite, comme une fonction donnée des coordonnées initiales x et y : ainsi dénotant cette fonction par la caractéristique Δ, on aura la condition

$$z_0 = \Delta\,(x_0, y_0).$$

Le cas du vide n'a aucune difficulté ; car en faisant $\Phi z = 0$, on aura l'équation

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}\times\sqrt{(z)}} = const. = \frac{1}{\sqrt{(a)}},$$

où λ n'entre pas.

Ensuite on a $z' - 2g = 0$, d'où l'on tire $z = 2gx + b$. En rapportant cette équation à la première limite, on a $z_0 = 2gx_0 + b$, d'où $b = z_0 = 2gx_0$; ainsi la valeur complète de z sera

$$z = 2g\,(x - x_0) + z^0:$$

or, l'équation en y' donne

$$y' = \sqrt{\left(\frac{z}{a-z}\right)},$$

équation qui, par la substitution de la valeur de z, devient celle de la cycloïde ordinaire.

Soit, pour abréger,

$$t = \frac{1}{\sqrt{(z)}} + 2\lambda\Phi z,$$

le problème général dépendra de ces trois équations du premier ordre,

$$\frac{ty'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a)}},$$

$$\lambda' - \left(2\lambda\Phi' z - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{(1+y'^2)} = 0,$$

$$z' - 2g + 2\Phi z \times \sqrt{(1+y'^2)} = 0.$$

Si on prend la dérivée de t, on a

$$t' = -z'\left(\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda\Phi' z\right) + 2\lambda'\Phi z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda\Phi' z = \frac{2\lambda'\Phi z - t'}{z'};$$

cette valeur étant substituée dans la seconde équation ci-dessus, on aura

$$\lambda' + \frac{2\lambda'\Phi z - t'}{z'}\sqrt{(1+y'^2)} = 0;$$

mais la troisième donne

$$z' = 2g - 2\Phi z \times \sqrt{(1+y'^2)};$$

substituant cette valeur dans la dernière équation après l'avoir multipliée

par z', elle se réduira à

$$2g\lambda' - t'\sqrt{(1+y'^2)} = 0.$$

Or, on a

$$t'\sqrt{(1+y'^2)} = \left[t\sqrt{(1+y'^2)}\right]' - \frac{ty'y''}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$

et la première équation donne $\frac{ty'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a)}}$; donc l'équation qu'on vient de trouver, deviendra

$$2g\lambda' - \left[t\sqrt{(1+y'^2)}\right]' + \frac{y''}{\sqrt{(a)}} = 0,$$

dont la primitive est

$$2g\lambda - t\sqrt{(1+y'^2)} + \frac{y}{\sqrt{(a)}} = b;$$

et si on substitue encore ici pour t sa valeur $\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{y'\sqrt{(a)}}$ tirée de la première équation, on aura

$$2g\lambda = \frac{1}{y'\sqrt{(a)}} + b.$$

Ainsi, on a la valeur de λ qu'on substituera dans l'expression de t de la première équation ; et il ne s'agira plus que de combiner cette équation avec la troisième pour en éliminer z.

Considérons maintenant l'équation aux limites $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$; supposons, ce qui est le cas le plus ordinaire, que les deux limites soient indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément $\dot{U}_0 = 0$, $\dot{U}_1 = 0$.

Or, en faisant dans l'expression de $\dot{U}$, donnée plus haut, les substitutions nécessaires, on a

$$\dot{U} = \left(\frac{1}{\sqrt{(z)}} + 2\lambda\Phi z\right)\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}(\dot{y} - y'\dot{x}) + \lambda(z - z'\dot{x}) + \frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{\sqrt{(z)}}\dot{x}.$$

Cette expression, en mettant pour z sa valeur $2g - 2\Phi z \times \sqrt{(1+y'^2)}$

et réduisant, devient

$$\dot{U} = \left(\frac{t}{\sqrt{(1+y'^2)}} - 2g\lambda\right)\dot{x} + \frac{ty'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\dot{y} + \lambda\dot{z},$$

où t est mise pour $\frac{1}{\sqrt{(z)}} + 2\lambda\Phi z$, comme on l'a employée ci-dessus; de sorte qu'en substituant encore à la place de t, sa valeur donnée par la première équation, on aura plus simplement

$$\dot{U} = \left(\frac{1}{y'\sqrt{(a)}} - 2g\lambda\right)\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\sqrt{(a)}}\lambda\dot{z}.$$

Cette valeur de $\dot{U}$ devra donc être nulle aux deux limites.

Pour la première limite, nous avons vu ci-dessus que l'on a, en général, $z_0 = \Delta(x_0, y_0)$; donc prenant les variations, on aura

$$\dot{z}_0 = \dot{x}_0\,\Delta'(x_0) + \dot{y}_0\,\Delta'(y_0),$$

de sorte que l'équation $U_0 = 0$ donnera celle-ci:

$$\left(\frac{1}{y_0'\sqrt{(a)}} - 2g\lambda_0 + \Delta'(x_0)\times\lambda_0\right)\dot{x}_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{(a)}} + \Delta'(y_0)\times\lambda_0\right)\dot{y}_0 = 0.$$

Pour la seconde limite, on aura aussi $\dot{U}_1 = 0$, équation dans laquelle la variation $\dot{z}_1$ demeurant indéterminée, il faudra la faire évanouir en égalant à zéro son coëfficient λ_1 : ainsi on aura la condition $\lambda_1 = 0$, qui servira à déterminer la constante arbitraire b de la valeur de λ trouvée plus haut. Cette condition donne $\frac{1}{y_1'\sqrt{(a)}} + b = 0$, d'où l'on tire $b = -\frac{1}{y_1'\sqrt{(a)}}$.

De sorte que l'expression complète de λ sera

$$2g\lambda = \frac{1}{\sqrt{(a)}}\left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{y_1'}\right);$$

d'où l'on aura

$$2g\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{(a)}}\left(\frac{1}{y_0'} - \frac{1}{y_1'}\right),$$

valeur qu'il faudra substituer dans l'équation à la première limite.

A l'égard de l'équation de la seconde limite, elle sera simplement, à cause de $\lambda_1 = 0$,

$$\frac{x_1}{y'_1} + \dot{y}_1 = 0 \text{ ; savoir, } \dot{x}_1 + y'_1 \times \dot{y}_1 = 0.$$

Cette équation est tout-à-fait semblable à celle que nous avons trouvée dans le premier exemple, et d'où nous avons conclu que la ligne la plus courte devait couper à angles droits la ligne qui forme la seconde limite; ainsi la même conclusion doit avoir lieu pour la ligne de la plus vîte-descente, quelle que soit la loi de la résistance du milieu.

Revenons à la première limite. En substituant dans l'équation de cette limite pour λ_0, sa valeur, elle devient

$$\left[\frac{1}{y'_1} + \frac{\Delta'(x_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right]\dot{x}_0 + \left[1 + \frac{\Delta'(y_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right]\dot{y}_0 = 0.$$

Maintenant, si on désigne par (y'_0) la dérivée de l'ordonnée y de la courbe qui forme la première limite, on aura, comme on l'a vu dans le premier exemple, l'équation $\dot{y}_0 - (y'_0)\,\dot{x}_0 = 0$: donc si on substitue dans l'équation précédente, au lieu de $\dot{y}_0$, sa valeur $(y'_0)\,\dot{x}_0$, la variation $\dot{x}_0$ demeurera arbitraire, et il faudra vérifier l'équation, en égalant à zéro le coëfficient de $\dot{x}_0$, ce qui donnera

$$\frac{1}{y'_1} + \frac{\Delta'(x_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right) + \left[1 + \frac{\Delta'(y_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right](y'_0) = 0,$$

équation à laquelle on satisfera par le moyen d'une des constantes arbitraires.

Supposons, ce qui est le cas le plus simple, que la vîtesse initiale v_0 soit donnée indépendamment du lieu de départ; on aura alors $v_0 =$ *à une constante;* donc

$$\Delta\,(x_0\,;\,y_0) = \textit{const.}$$

et par conséquent

$$\Delta'(x_0) = 0, \quad \Delta'(y'_0) = 0,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{y'_1} + (y'_0) = 0 \text{ ; savoir, } 1 + y'_1 (y'_0) = 0.$$

Dans cette équation, (y'_0) exprime la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x, la tangente à la courbe de la première limite, dans le point où elle est rencontrée par la ligne de la plus vîte-descente, et y'_1 exprime la tangente de l'angle que fait avec le même axe, la tangente à cette même ligne au point de la seconde limite; et il suit de cette équation, comme nous l'avons vu dans le premier exemple, que la différence de ces deux angles doit être égale à un angle droit : donc il faudra que la tangente à la courbe de la première limite soit perpendiculaire à la tangente à la ligne de la plus vîte-descente au point de la seconde limite; et comme nous avons déjà vu que cette tangente doit être perpendiculaire à celle de la courbe de la seconde limite, on en conclura que, dans le cas dont il s'agit, la courbe de la plus vîte-descente devra rencontrer les deux courbes des limites dans des points où les tangentes soient parallèles entre elles.

Mais, si on veut que la vîtesse initiale soit toujours celle que le corps acquerrait en tombant d'un même point donné, nommant h la hauteur de ce point au-dessus de l'axe horizontal des ordonnées y, on aura $h + x_0$ pour la hauteur due à la vîtesse initiale dont z_0 est le carré, et les principes de la mécanique donneront

$$z_0 = 2g\,(h + x_0) :$$

donc $\Delta (x_0, y_0) = 2g(h + x_0)$; et de là $\Delta' (x_0) = 2g$, $\Delta' (y_0) = 0$, ce qui réduira l'équation de la première limite à celle-ci :

$$\frac{1}{y'_0} + (y'_0) = 0 \text{ ; savoir, } 1 + y'_0 (y'_0) = 0,$$

laquelle montre, comme on l'a vu dans le premier exemple, que la ligne de la plus vîte-descente doit couper aussi à angles droits la ligne qui forme la première limite.

On avait trouvé ces mêmes résultats pour la ligne de la plus vîte-

descente dans le vide (*Voyez* le quatrième volume des *Mémoires de Turin*, et les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour les années 1767 et 1786). L'analyse précédente fait voir que les conditions relatives aux limites sont indépendantes de la résistance.

Si, au lieu de la courbe de la plus vîte-descente, on demandait celle où la vîtesse acquise serait un *maximum*, il faudrait rendre la quantité ζ un *maximum*, et l'on aurait le cas où nous avons vu que les équations générales se réduisent simplement à $(Y) = 0$ et $(Z) = 0$; savoir,

$$\left[2\lambda\Phi\zeta \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\right]' = 0,$$

et

$$2\lambda\Phi'\zeta \times \sqrt{(1+y'^2)} - \lambda' = 0,$$

équations qu'il faut combiner avec l'équation en ζ,

$$\zeta' - 2g + 2\Phi\zeta \times \sqrt{(1+y'^2)} = 0.$$

La première a pour primitive

$$2\lambda\Phi\zeta \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a)}};$$

et si on opère sur ces trois équations comme on l'a fait dans le cas précédent, on parviendra de la même manière à l'équation

$$2g\lambda = \frac{1}{y'\sqrt{(a)}} + b$$

qui donne la valeur de λ; ensuite les deux dernières équations ci-dessus donneront la vîtesse $\sqrt{\zeta}$, et la fonction y en x, d'où dépend la courbe cherchée.

A l'égard des limites, on aura, dans le cas dont il s'agit, en faisant varier à-la-fois x, y, ζ,

$$\dot{U} = (\dot{Y})(\dot{y} - y'\dot{x}) + (\dot{Z})(\dot{\zeta} - \zeta'\dot{x}) + \zeta'\dot{x},$$

formule qui, en substituant les valeurs de $(\dot{Y})$, $(\dot{Z})$ et de ζ', et réduisant, devient

$$\dot{U} = \left(\frac{2\lambda\Phi\zeta}{\sqrt{(1+y'^2)}} - 2g\lambda\right)\dot{x} + 2\lambda\Phi\zeta \times \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}\dot{y} + (\lambda+1)\dot{\zeta};$$

et

et si on substitue encore dans celle-ci les valeurs de $2g\lambda$ et de $2\lambda\Phi\zeta$ tirées des deux dernières équations primitives, on aura enfin

$$\dot{U} = -b\dot{x} + \frac{1}{\sqrt{(a)}}\dot{y} + (\lambda + 1)\dot{\zeta}_0;$$

de sorte que les deux équations aux limites $\dot{U}_0 = 0$ et $\dot{U}_1 = 0$, deviendront

$$-b\dot{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{(a)}}\dot{y}_0 + (\lambda_0 + 1)\dot{\zeta}_0 = 0,$$

$$-b\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{(a)}}\dot{y}_1 + (\lambda_1 + 1)\dot{\zeta}_1 = 0.$$

La vîtesse initiale, dont ζ_0 est le carré, doit être donnée; si on la suppose indépendante du lieu du départ, ζ_0 sera une quantité constante dont la variation sera par conséquent nulle; donc $\dot{\zeta}_0 = 0$: alors la première équation se réduira à

$$-b\dot{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{(a)}}\dot{y}_0 = 0.$$

Pour la seconde, comme rien ne détermine la valeur de $\dot{\zeta}_1$, il faudra que son coëfficient soit nul, et qu'il donne $\lambda_1 + 1 = 0$ et $\lambda_1 = -1$, condition par laquelle on déterminera la valeur de la constante arbitraire b.

Cette équation deviendra ainsi

$$-b\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{(a)}} \times \dot{y}_1 = 0.$$

Si les deux points extrêmes de la courbe étaient donnés, les variations de x_0, y_0, x_1, y_1 seraient nulles, et les deux équations seraient satisfaites d'elles-mêmes.

Mais, si la question est de trouver la ligne par laquelle le corps partant d'une courbe donnée, et arrivant à une autre courbe donnée, acquiert la plus grande vîtesse ; nommant, comme plus haut, (y_0') et (y'_1) les tangentes des angles que les tangentes à ces courbes font avec l'axe aux deux extrémités de la ligne cherchée, on aura, ainsi qu'on l'a vu dans

le premier exemple,

$$\dot{y}_0 - (y'_0)\,\dot{x}_0 = 0, \text{ et } \dot{y}_1 - (y'_1)\,\dot{x}_1 = 0;$$

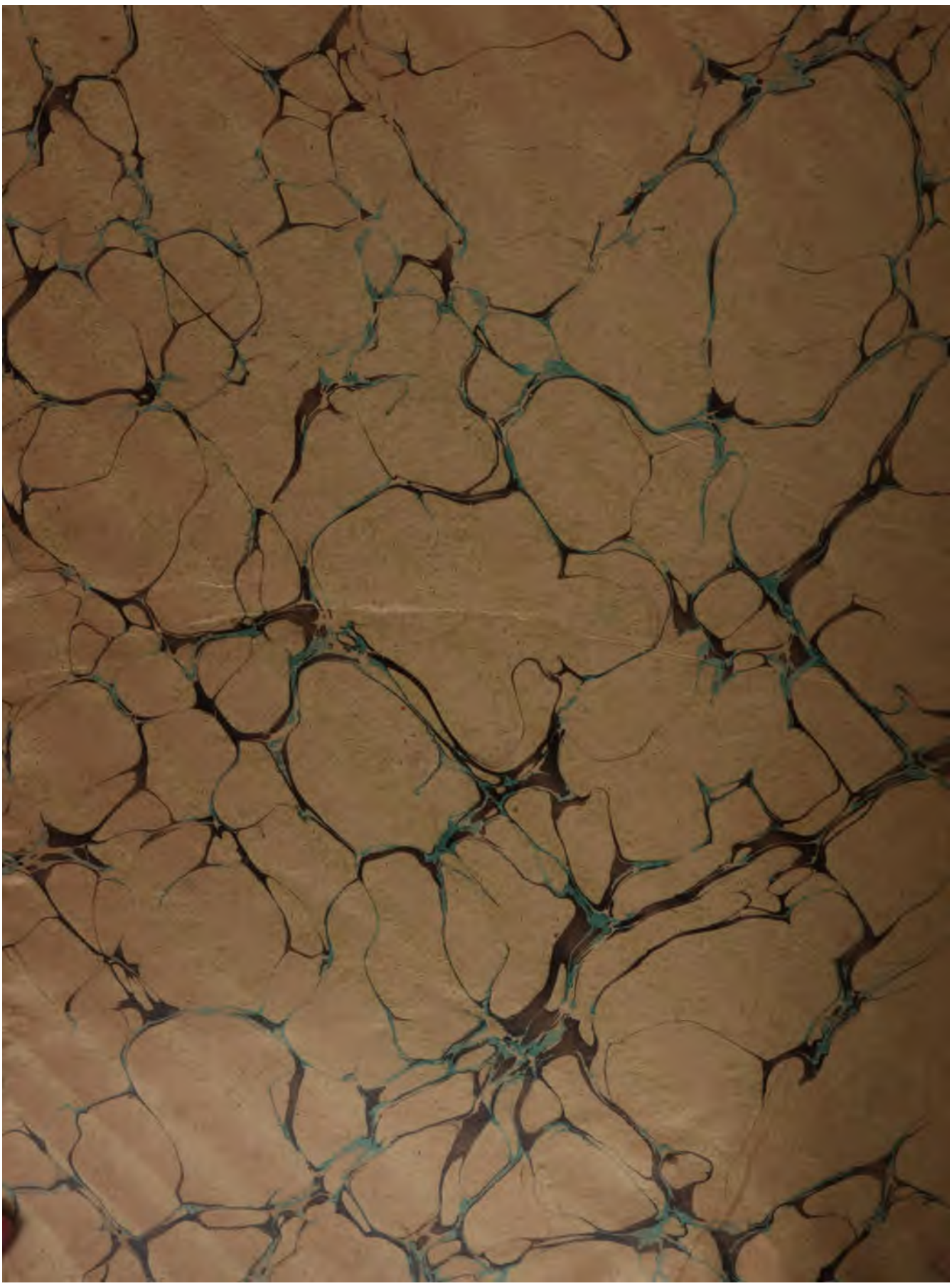
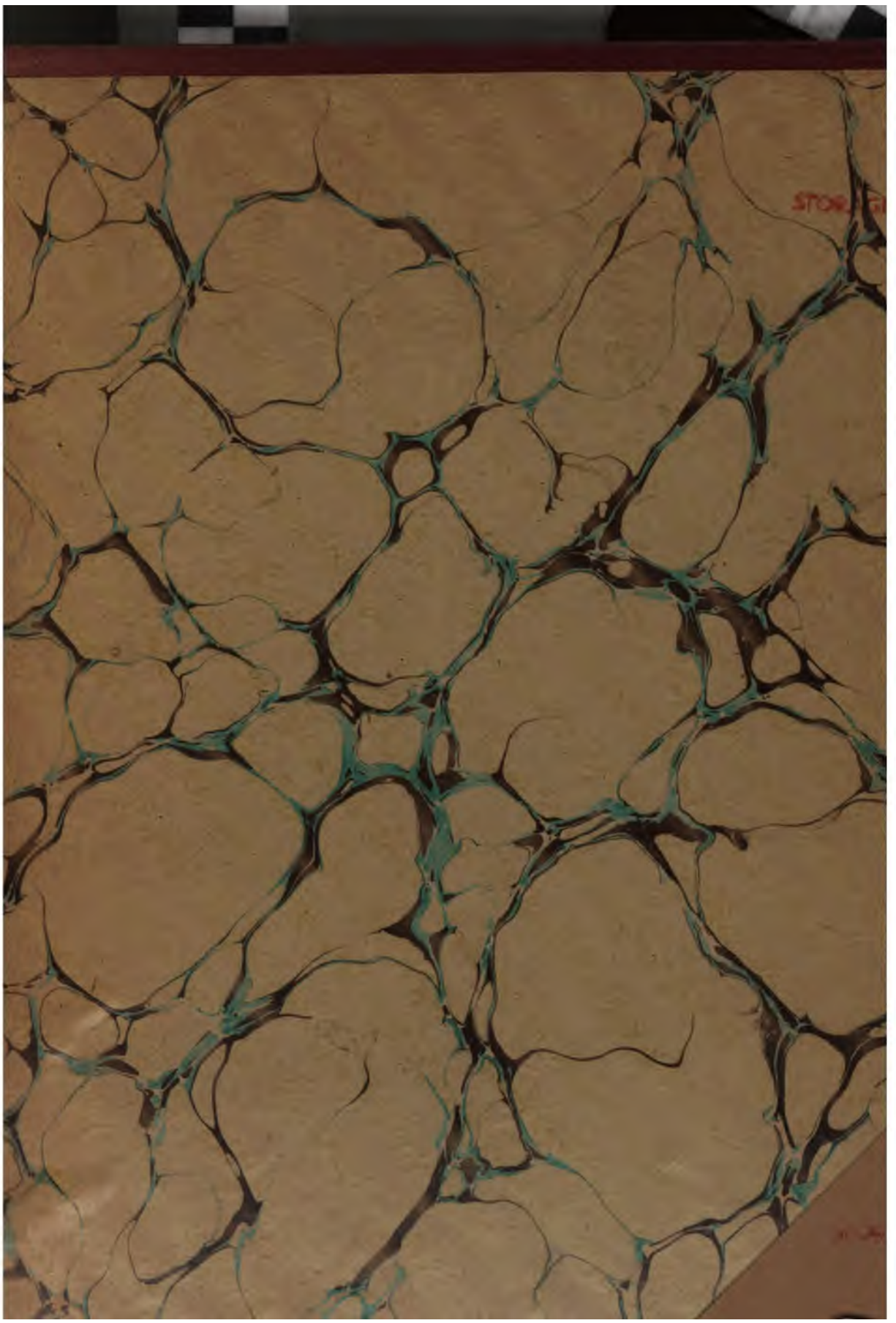
et ces équations étant combinées avec les deux précédentes, donneront

$$(y'_0) = b\sqrt{(a)}, \text{ et } (y'_1) = b\sqrt{(a)},$$

d'où l'on peut conclure que les tangentes aux deux courbes des limites, doivent être parallèles entre elles, comme dans la courbe de la plus vîte-descente.

Ces exemples peuvent suffire pour montrer l'usage de nos formules générales, et sur-tout des équations aux limites qui n'étaient pas connues avant le calcul des variations, et sans lesquelles on n'aurait que des solutions incomplètes.

FIN.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. Marcel, Directeur général de l'Imprimerie impériale, Membre de la Légion d'honneur.